

文章编号: 0258-7025(2010)03-0726-07

# 离轴高斯-谢尔模型电磁光束的非傍轴传输

邢 燕 吕百达

(四川大学激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064)

**摘要** 基于广义瑞利-索末菲衍射积分公式, 推导出了非傍轴离轴高斯-谢尔模型(GSM)电磁光束在自由空间传输  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵的解析公式, 并用以表示电磁光束在  $z$  面的光谱密度(光强)、偏振度和光谱相干度。非傍轴共轴 GSM 电磁光束和非傍轴离轴高斯电磁光束可为特例来处理。着重研究了离轴参数、自相关和互相关长度对电磁光束的光强、偏振度和光谱相干度的影响。对所得结果用数值计算例做了说明。

**关键词** 物理光学; 非傍轴离轴高斯-谢尔模型电磁光束; 离轴参数; 相干性; 偏振度

**中图分类号** O436 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103703.0726

## Propagation of Off-Axis Gaussian-Schell Model Electromagnetic Beams Beyond the Paraxial Approximation

Xing Yan Lü Baida

(Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** Based on the generalized Rayleigh-Sommerfeld diffraction integrals, the analytical expression for the  $3 \times 3$  cross-spectral density matrix of nonparaxial off-axis Gaussian-Schell model (GSM) electromagnetic beams propagating in free space is derived and used to formulate the spectral density (intensity), degree of polarization and spectral degree of coherence of electromagnetic beams at the  $z$  plane. Nonparaxial on-axis GSM electromagnetic beams and nonparaxial off-axis Gaussian electromagnetic beams can be treated as special cases of our results. The effect of off-axis parameter, self- and cross-correlation lengths on the intensity, the degree of polarization and the spectral degree of coherence of electromagnetic beams are stressed. The results are illustrated by numerical examples.

**Key words** physical optics; nonparaxial off-axis Gaussian-Schell model electromagnetic beam; off-axis parameter; coherence; degree of polarization

### 1 引言

光场的相干性和偏振性是有重要理论和实际意义的研究问题, 对此国内外已进行了许多研究<sup>[1~4]</sup>。在经典光学中, 光场的相干性和偏振性是分别处理的。1998 年 Gori<sup>[5]</sup>引入了描述空间-时间域中准单色部分相干部分偏振光场的  $2 \times 2$  光束相干-偏振矩阵。2003 年 Wolf<sup>[6]</sup>提出了在空间-频率域中用  $2 \times 2$  交叉谱密度矩阵处理随机电磁光束的相干性和偏振性的统一理论, 对随机电磁光束的光谱密度(光强), 光谱相干度和偏振度给出了统一的描述, 为应

用带来了方便。上述理论都仅在傍轴近似下成立, Setälä 等<sup>[7,8]</sup>用  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵将理论推广到非傍轴范畴。最近, Y. Qiu 等<sup>[9]</sup>用这一方法对部分偏振高斯-谢尔模型(GSM)电磁光束的传输特性、光强分布和偏振度的变化做了计算分析。本文基于  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵和广义瑞利-索末菲衍射积分公式, 推导出更为普遍的非傍轴离轴三维 GSM 电磁光束在自由空间的传输公式, 重点对离轴参数、自相关和互相关长度对光强分布、偏振度和光谱相干度的影响做了研究。共轴 GSM 电磁光束和离轴高

收稿日期: 2009-04-23; 收到修改稿日期: 2009-06-12

基金项目: 国家自然科学基金(10874125)资助项目。

作者简介: 邢 燕(1985—), 女, 硕士研究生, 主要从事激光传输变换方面的研究。E-mail: soyoula1985@163.com

导师简介: 吕百达(1943—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事高功率激光物理与技术、激光传输与控制、奇点光学新效应的研究。E-mail: baidalu0@tom.com(通信联系人)

斯电磁光束的非傍轴传输可作为本文的特例处理。

两场点  $\mathbf{P}_1(r_1)$  和  $\mathbf{P}_2(r_2)$  的二阶相关性由  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵描述。在直角坐标系下,  $z = 0$  面上的交叉谱密度矩阵为<sup>[1]</sup>

## 2 理 论

在空间-频率域中非傍轴电磁光束在空间任意

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, 0) = \begin{bmatrix} W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{xy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{xz}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \\ W_{yx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{yy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{yz}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \\ W_{zx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{zy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) & W_{zz}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中矩阵元定义为

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) = \langle E_i^*(\boldsymbol{\rho}_{10}, 0) E_j(\boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \rangle, \quad (i, j = x, y, z) \quad (2)$$

$\mathbf{E}$  为电场,  $\langle \rangle$  表示求系综平均,  $*$  表示复共轭,  $\boldsymbol{\rho}_{10} = (x_{10}, y_{10})$ ,  $\boldsymbol{\rho}_{20} = (x_{20}, y_{20})$  为  $z = 0$  面上的位置矢量。

利用广义瑞利衍射积分公式,  $z$  面上交叉谱密度矩阵可表示为<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \frac{1}{\lambda^2} \iiint_{(z=0)} \mathbf{W}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{R_1 R_2} \exp[ik(R_2 - R_1)] d^2 \boldsymbol{\rho}_{10} d^2 \boldsymbol{\rho}_{20}, \quad (3)$$

式中  $R_\alpha = [(x_\alpha - x_{a0})^2 + (y_\alpha - y_{a0})^2 + z^2]^{1/2}$ ,  $\cos \theta_\alpha = z/R_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ )。式(2)成立条件是  $R_\alpha \gg \lambda$ 。 $z$  面上  $3 \times 3$  的交叉谱密度矩阵元为<sup>[11]</sup>

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^2 \iiint_{(z=0)} W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{R_1^2 R_2^2} d^2 \boldsymbol{\rho}_{10} d^2 \boldsymbol{\rho}_{20}, \quad (i, j = x, y)$$

$$W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = -\frac{z}{\lambda^2} \iiint_{(z=0)} [W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(x_2 - x_{20}) + W_{yx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(y_2 - y_{20})] \times \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{R_1^2 R_2^2} d^2 \boldsymbol{\rho}_{10} d^2 \boldsymbol{\rho}_{20},$$

$$W_{yx}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = -\frac{z}{\lambda^2} \iiint_{(z=0)} [W_{yy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(y_2 - y_{20}) + W_{xy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(x_2 - x_{20})] \times \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{R_1^2 R_2^2} d^2 \boldsymbol{\rho}_{10} d^2 \boldsymbol{\rho}_{20},$$

$$W_{zz}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \iiint_{(z=0)} [W_{xx}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) + 2W_{xy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(x_1 - x_{10})(y_2 - y_{20}) + W_{yy}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0)(y_1 - y_{10})(y_2 - y_{20})] \times \frac{\exp[ik(R_2 - R_1)]}{R_1^2 R_2^2} d^2 \boldsymbol{\rho}_{10} d^2 \boldsymbol{\rho}_{20}. \quad (4)$$

非傍轴离轴 GSM 电磁光束在  $z = 0$  面上的交叉谱密度矩阵元可表示为<sup>[6,12]</sup>

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_{10}, \boldsymbol{\rho}_{20}, 0) = A_i A_j B_{ij} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{\rho}_{10} - \boldsymbol{\rho}_d)^2 + (\boldsymbol{\rho}_{20} - \boldsymbol{\rho}_d)^2}{\omega_0^2}\right] \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_{10} - \boldsymbol{\rho}_{20}|^2}{2\delta_{ij}^2}\right), \quad (i, j = x, y) \quad (5)$$

式中  $\boldsymbol{\rho}_d = (x_d, y_d)$  是离轴矢量,  $x_d, y_d$  分别为在  $x, y$  方向的位移, 称为离轴参数。 $A_i, B_{ij}$  为常数,  $i \neq j$  时,  $B_{ij}$  一般为复数,  $B_{xy} = B_{yx}^*$ ,  $i = j$  时,  $B_{xx}, B_{yy}$  为实数<sup>[13]</sup>。 $\omega_0$  为束腰宽度。 $\delta_{ij}$  为相关长度, 当  $i = j$  时  $\delta_{ii}$  为自相关长度, 当  $i \neq j$  时  $\delta_{ij}$  为互相关长度, 且有  $\delta_{xy} = \delta_{yx}$ 。

将  $R_\alpha$  展开为级数<sup>[14]</sup>

$$R_\alpha \approx r_\alpha + \frac{x_{a0}^2 + y_{a0}^2 - 2x_a x_{a0} - 2y_a y_{a0}}{2r_\alpha}, \quad (6)$$

式中  $r_\alpha = (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2)^{1/2}$ 。将(5)和(6)式代入(4)式, 经冗长积分运算, 所得结果可整理为

$$W_{ij}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = z^2 M A_i A_j B_{ij} N_{ij}, \quad (i, j = x, y)$$

$$W_{iz}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = z M \left[ \left(\frac{T_{xzi}}{2Q_{xi}} - x_2\right) A_i A_x B_{xi} N_{xi} + \left(\frac{T_{yzi}}{2Q_{yi}} - y_2\right) A_i A_y B_{yi} N_{yi} \right], \quad (i = x, y)$$

$$W_{zz}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z) = M \left[ \left(x_1 x_2 - \frac{x_1 T_{xxx}}{2Q_{xx}} - \frac{x_2 G_{1x}}{2E_{1xx}} - \frac{x_2 T_{xxx} - 1}{4E_{1xx} \delta_{xx}^2 Q_{xx}} + \frac{G_{1x} T_{xxx}}{4Q_{xx} E_{1xx}} + \frac{T_{xxx}^2}{8E_{1xx} \delta_{xx}^2 Q_{xx}^2}\right) A_x^2 B_{xx} N_{xx} + \right.$$

$$\begin{aligned} & \left( y_1 y_2 - \frac{y_1 T_{yyy}}{2Q_{yy}} - \frac{y_2 G_{1y}}{2E_{1yy}} - \frac{y_2 T_{yyy}}{4E_{1yy}\delta_{yy}^2 Q_{yy}} - 1 + \frac{G_{1y} T_{yyy}}{4Q_{yy} E_{1yy}} + \frac{T_{yyy}^2}{8E_{1yy}\delta_{yy}^2 Q_{yy}^2} \right) A_y^2 B_{yy} N_{yy} + \\ & 2 \left( x_1 y_2 - \frac{x_1 T_{xyy}}{2Q_{xy}} - \frac{y_2 G_{1x}}{2E_{1xy}} - \frac{y_2 T_{xyy}}{4E_{1xy}\delta_{xy}^2 Q_{xy}} + \frac{G_{1x} T_{xyy}}{4Q_{xy} E_{1xy}} + \frac{T_{xyy} T_{xyy}}{8E_{1xy}\delta_{xy}^2 Q_{xy}^2} \right) A_x A_y B_{xy} N_{xy} \Big], \quad (7) \end{aligned}$$

式中<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} M &= \frac{k^2 \exp[ik(r_2 - r_1)]}{4\pi^2 r_1^2 r_2^2} \exp[-2k^2 f^2 (y_d^2 + x_d^2)], \quad f = \frac{1}{k\omega_0}, \\ N_{ij} &= \frac{\pi^2}{E_{1ij} Q_{ij}} \exp\left(\frac{G_{1x}^2 + G_{1y}^2}{4E_{1ij}} + \frac{T_{xij}^2 + T_{yij}^2}{4Q_{ij}}\right), \quad Q_{ij} = E_{2ij} - \frac{1}{4E_{1ij}\delta_{ij}^4}, \\ T_{xij} &= G_{2x} + \frac{G_{1x}}{2E_{1ij}\delta_{ij}^2}, \quad T_{yij} = G_{2y} + \frac{G_{1y}}{2E_{1ij}\delta_{ij}^2}, \\ E_{1ij} &= k^2 f^2 + \frac{1}{2\delta_{ij}^2} + \frac{ik}{2r_1}, \quad E_{2ij} = k^2 f^2 + \frac{1}{2\delta_{ij}^2} - \frac{ik}{2r_2}, \quad (i, j = x, y) \\ G_{1x} &= 2k^2 f^2 x_d + \frac{ik}{r_1} x_1, \quad G_{2x} = 2k^2 f^2 x_d - \frac{ik}{r_2} x_2, \\ G_{1y} &= 2k^2 f^2 y_d + \frac{ik}{r_1} y_1, \quad G_{2y} = 2k^2 f^2 y_d - \frac{ik}{r_2} y_2. \quad (8) \end{aligned}$$

在(7)式中令  $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$ , 可得  $z$  面的光强  $I$  和偏振度  $P$ <sup>[7,15]</sup>

$$I = W_{xx}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) + W_{yy}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) + W_{zz}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z), \quad (9)$$

$$P(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) = \sqrt{\frac{3}{2} \left\{ \frac{\text{Tr}[\mathbf{W}^2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)]}{\text{Det}^2[\mathbf{W}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)]} - \frac{1}{3} \right\}}. \quad (10)$$

为简单起见光谱相干度讨论与  $z$  轴对称的两点, 令  $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\rho}_2 = -\boldsymbol{\rho}$ , 由(7)式得两场分量之间的光谱相干度<sup>[8]</sup>

$$\mu_{ij}(\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{W_{ij}(\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\rho}, z)}{\sqrt{W_{ii}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)W_{jj}(-\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)}}, \quad (i, j = x, y, z) \quad (11)$$

$$\text{和} \quad \mu^2(\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{\sum_{i,j} |\mu_{ij}(\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\rho}, z)|^2 W_{ii}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) W_{jj}(-\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)}{\sum_{i,j} W_{ii}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) W_{jj}(-\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z)}. \quad (i, j = x, y, z) \quad (12)$$

值得指出的是, 对用  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵描述的随机电磁光束的光谱相干度, 本文使用文献[8]的(6)和(13)式, 但其他文献中有不同的表示式, 对此问题的进一步讨论可参见文献[16]。

现分析(7)式的一些特例。令离轴参数  $x_d = y_d = 0$ , 由(7)式得到非傍轴共轴 GSM 电磁光束在输出  $z$  面上的交叉谱密度矩阵元的解析公式, 容易证明, 当  $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}$  时, 本文(7)式与文献[9]中(7)式相同。

令相关长度  $\delta_{ij}$  趋于无穷, 由(7), (8)式得到非傍轴离轴高斯电磁光束在输出  $z$  面上的光强公式

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) &= M \frac{\pi^2}{E_1 E_2} \exp\left(\frac{G_{1x}^2 + G_{1y}^2}{4E_1} + \frac{G_{2x}^2 + G_{2y}^2}{4E_2}\right) \left[ \left(x^2 - \frac{xG_{2x}}{2E_2} - \frac{xG_{1x}}{2E_1} + \frac{G_{1x}G_{2x}}{4E_1 E_2} + z^2\right) A_x^2 B_{xx} + \right. \\ & \left. \left(y^2 - \frac{yG_{2y}}{2E_2} - \frac{yG_{1y}}{2E_1} + \frac{G_{1y}G_{2y}}{4E_1 E_2} + z^2\right) A_y^2 B_{yy} + 2 \left(yx - \frac{xG_{2y}}{2E_2} - \frac{yG_{1x}}{2E_1} + \frac{G_{1x}G_{2y}}{4E_1 E_2}\right) A_x A_y B_{xy} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} G_{1x} &= 2k^2 f^2 x_d + \frac{ik}{r}, \quad G_{2x} = 2k^2 f^2 x_d - \frac{ik}{r}, \\ G_{1y} &= 2k^2 f^2 y_d + \frac{ik}{r}, \quad G_{2y} = 2k^2 f^2 y_d - \frac{ik}{r}, \\ E_1 &= k^2 f^2 + \frac{ik}{2r}, \quad E_2 = k^2 f^2 - \frac{ik}{2r}. \quad (14) \end{aligned}$$

若在  $z = 0$  面上是沿  $x$  方向线偏振的离轴高斯光束, 则由(7)式得到在  $z$  面上的光强公式为

$$I(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, z) = M \frac{\pi^2}{E_1 E_2} \left(x^2 - \frac{xG_{2x}}{2E_2} - \frac{xG_{1x}}{2E_1} + \frac{G_{1x}G_{2x}}{4E_1 E_2} + z^2\right) A_x^2 B_{xx} \exp\left(\frac{G_{1x}^2 + G_{1y}^2}{4E_1} + \frac{G_{2x}^2 + G_{2y}^2}{4E_2}\right), \quad (15)$$

(15)式与文献[12]中由(7)式所得光强公式相同。

### 3 数值计算和分析

#### 3.1 光强分布

数值计算中,取  $\rho_1 = \rho_2 = \rho, \omega_0 = 1 \text{ mm}, f = 0.3, B_{xx} = B_{yy} = 1, B_{xy} = 0.2 \times \exp(i\pi/6), B_{yx} = 0.2 \times \exp(-i\pi/6), A_x = A_y = 1, x_d = y_d = d_0 \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_0, \delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_0. z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$  为非傍轴离轴 GSM 电磁光束的瑞利长度.图 1 给出离轴参数和相关长度对  $z = 10z_R$  面上非傍轴离轴 GSM 电磁光束光强的影响.图 1(a) 和 (b) 中计算参数为  $z = 10z_R, \delta_0 = 0.2 \text{ mm}, \delta = 0.3 \text{ mm}, d$  在图 1(a), (b) 中分别为 2 mm 和 10 mm. 由图 1(a), (b) 知, 离轴参数  $d$  引起光强分布发生变化. 图 1(c) 计算参数为  $\delta_0 = 0.25 \text{ mm}, \delta = 0.3 \text{ mm}, d = 2 \text{ mm}$ , 对比图 1(a), (c), 随自相关长度  $\delta_0$  的增大, 光强  $I$  分布在  $y = x$  方向压缩. 图 1(d) 计算参数为  $\delta_0 = 0.2 \text{ mm}, \delta = 0.4 \text{ mm}, d = 2 \text{ mm}$ . 从图 1(a), (d) 中可以看出, 互相关长度  $\delta$  的增大引起光强  $I$  分布在  $y = x$  方向拉伸. 因此, 互相关长度与自相关长度对光强分布的影响是不同的.

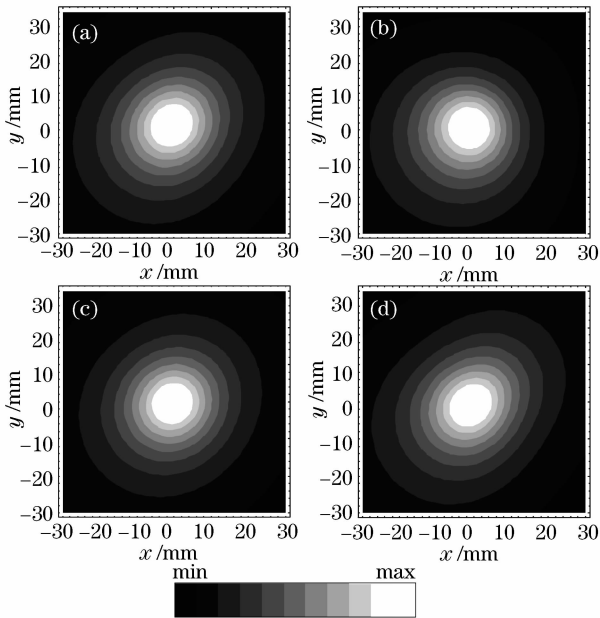


图 1 离轴参数和相关长度对  $z = 10z_R$  面上非傍轴离轴 GSM 电磁光束光强的影响

Fig.1 Influence of off-axis parameter and correlation lengths on the intensity of nonparaxial off-axis GSM electromagnetic beams at the plane  $z = 10z_R$

图 2(a), (b) 分别给出非傍轴高斯电磁光束和非傍轴 GSM 电磁光束的光强  $I$  和纵向分量  $I_z$  在  $x$  方向的变化. 从图 2(a), (b) 可以看出, 随着离轴参数  $d$  的增大, 纵向分量极小值位置向  $x$  正方向移动

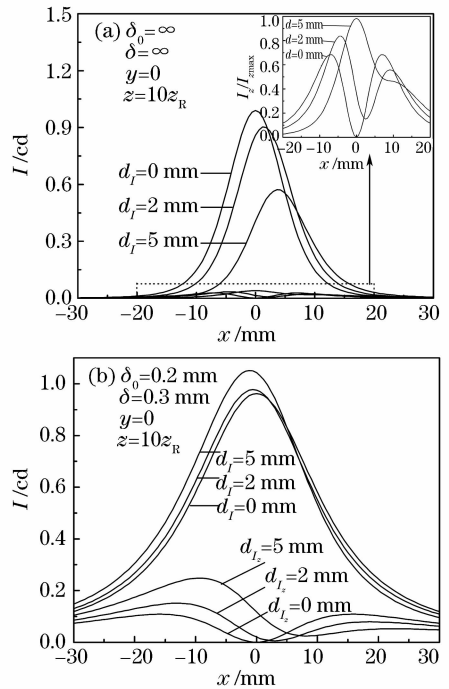


图 2 (a) 非傍轴高斯电磁光束; (b) 非傍轴离轴 GSM 电磁光束在  $x$  方向的光强  $I$  和纵向分量  $I_z$  分布  
Fig.2 Intensity distributions  $I$  and  $I_z$  of nonparaxial Gaussian electromagnetic beams (a) and nonparaxial GSM electromagnetic beams (b) in the  $x$  direction

且纵向分量的极小值增大, 图 2(a) 中, 光强的最大值位置向  $x$  正方向移动且光强的最大值减小; 图 2 (b) 中, 光强的极大值位置的移动方向为  $x$  负方向且光强的最大值增大. 当离轴参数  $d = 0, 2$  和 5 mm 时, 非傍轴高斯电磁光束  $I_{z\text{max}}/I_{\text{max}}$  分别为 0.028, 0.037, 0.069, 非傍轴 GSM 电磁光束  $I_{z\text{max}}/I_{\text{max}}$  分别为 0.113, 0.155, 0.236, 所以纵向分量对光强的影响随离轴参数  $d$  的增大而增大, 且在离轴参数  $d$  相同的情况下非傍轴 GSM 电磁光束的纵向分量对光强的影响比非傍轴高斯电磁光束的大.

#### 3.2 偏振度

离轴参数  $d$  和相关长度对非傍轴离轴 GSM 电磁光束偏振度的影响如图 3 所示. 图 3(a) 和 (b) 中计算参数为  $\rho_1 = \rho_2 = \rho, z = 10z_R, \delta_0 = 0.2 \text{ mm}, \delta = 0.3 \text{ mm}$ , 离轴参数分别取  $d = 2 \text{ mm}$  和 10 mm. 对比两图可知, 随着离轴参数的增大, 偏振度的两个极小值向  $x, y$  正方向移动, 由  $(-11 \text{ mm}, 15 \text{ mm}), (15 \text{ mm}, -11 \text{ mm})$  移动至  $(-3.2 \text{ mm}, 23.2 \text{ mm}), (23.2 \text{ mm}, -3.2 \text{ mm})$  位置. 图 3(c) 和 (d) 分别给出了自相关长度  $\delta_0$  和互相关长度  $\delta$  对偏振度的影响, 计算参数为  $d = 2 \text{ mm}, (c) \delta_0 = 0.25 \text{ mm}, \delta =$

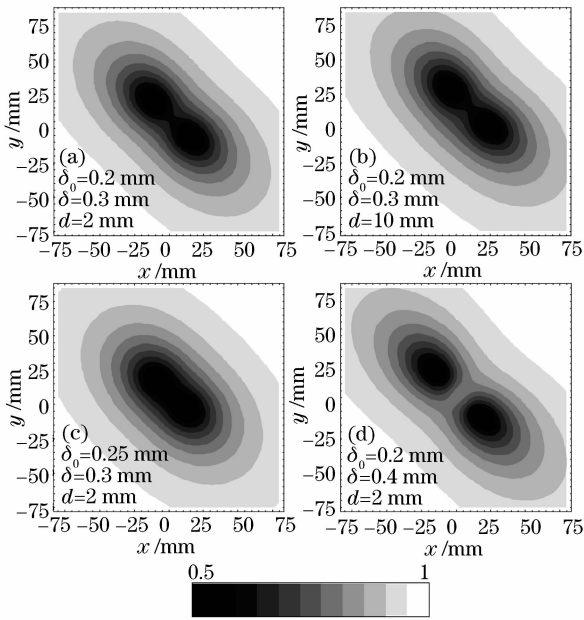


图3 离轴参数和相关长度对  $z=10z_R$  面上偏振度的影响

Fig.3 Influence of off-axis parameter and correlation lengths on the degree of polarization  $P$  at the plane  $z=10z_R$

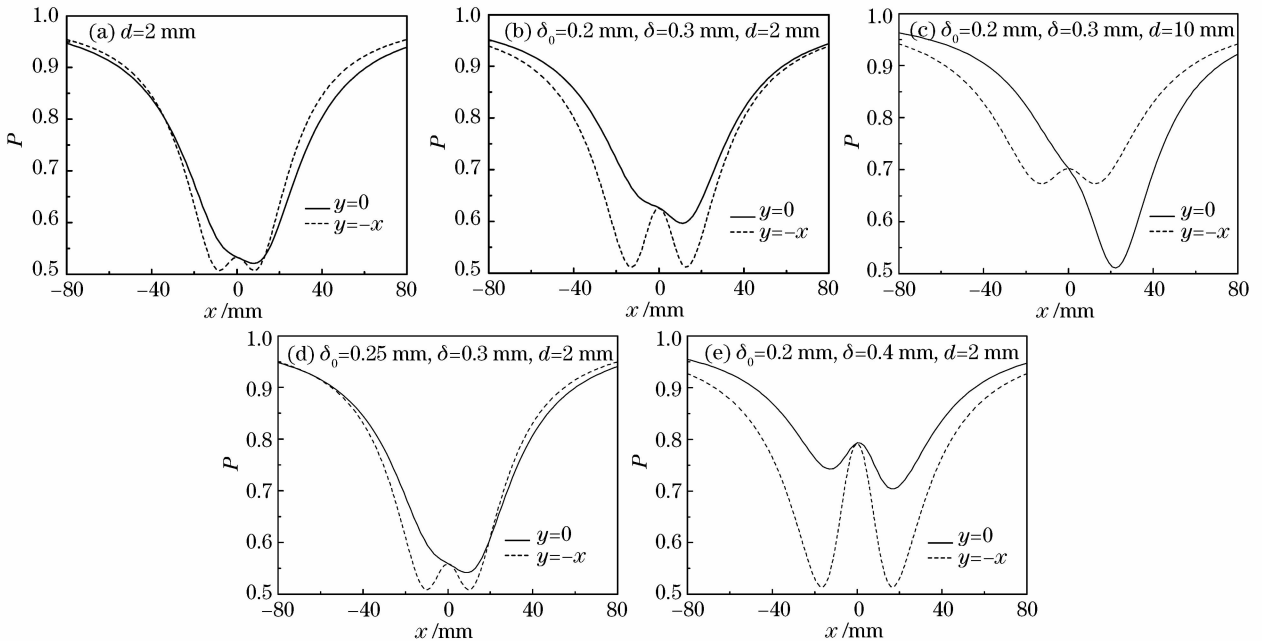


图4 离轴参数和相关长度对  $z=10z_R$  面上  $y=-x$  和  $y=0$  时  $x$  方向偏振度  $P$  的影响

Fig.4 Influence of off-axis parameter and correlation length on the degree of polarization  $P$  in the  $x$  direction for  $y=-x$  and  $y=0$  at the plane  $z=10z_R$

$y=x$  时  $x$  方向非傍轴共轴 GSM 电磁光束  $\mu_{xy}$  的影响。由图 5(a) 可知, 随着离轴参数  $d$  的增大,  $\mu_{xy}$  振荡加剧。对比图 5(b) 中线 1, 2 和 2, 3 可知,  $\mu_{xy}$  随着自相关长度  $\delta_0$  的增大而增大, 随着互相关长度  $\delta$  的增大而减小,  $\mu_{xy}$  极大值和极小值位置不变。

0.3 mm 和 (d)  $\delta_0 = 0.2$  mm,  $\delta = 0.4$  mm, 对比图 3(a) 可以看出, 偏振度分布的两个凹陷的距离随着  $\delta_0$  的增大而减小, 随  $\delta$  的增大而增大。

图 4 反映了非傍轴离轴高斯电磁光束和非傍轴离轴 GSM 电磁光束在  $z=10z_R$  面上离轴参数和相关长度对  $y=-x$  和  $y=0$  方向偏振度的影响。图 4 (a) 计算参数为  $d=2$  mm。图 4 (b)~(e) 的计算参数与图 1(a)~(d) 的对应。由图 4(a), (b) 可知, 偏振度在  $y=0$  方向的极小值变大, 在  $y=-x$  方向出现的两个极小值距离变大, 即凹陷程度加大。由图 4 (b), (c) 可知, 离轴参数增大, 偏振度在  $y=0$  方向的极小值变小, 在  $y=-x$  方向出现的两个凹陷程度变小, 两凹陷峰值变大。由图 4(b), (d) 和图 4 (b), (e) 可知, 自相关长度  $\delta_0$  增大, 偏振度在  $y=0$  方向的极小值变小, 在  $y=-x$  方向出现的两个凹陷程度变小。互相关长度  $\delta$  的增大引起  $y=-x$  方向出现的两个凹陷程度变大。因此, 互相关长度  $\delta$  与自相关长度  $\delta_0$  对偏振度的影响是不同的。

### 3.3 光谱相干度

图 5 为离轴参数和相关长度对  $z=30z_R$  面上

由图 5(a) 可以看出, 当  $d=0$  mm 时, 在轴上  $\mu_{xy}=0.43$ 。图 5(b) 中, 轴上  $\mu_{xy}$  随  $\delta_0$  的增大而增大, 随  $\delta$  的增大而减小。所得结果可作以下解释: 当  $d=0$  mm,  $x=y=0$  时, 由 (7) 和 (12) 式得

$$W_{ij}(0,0,z) = \frac{A_i A_j k^2}{4z^2 \left( k^2 f^2 + \frac{1}{2\delta_{ij}^2} \right)^2 + k^2 - \frac{z^2}{\delta_{ij}^4}}, \quad W_{iz}(0,0,z) = 0, \quad W_{zz}(0,0,z) = 0, \quad (16)$$

所以

$$\mu_{xy}(0,0,z) = \frac{W_{xy}(0,0,z)}{\sqrt{W_{xx}(0,0,z)W_{yy}(0,0,z)}} = \frac{B_{xy} \left[ 4z^2 \left( k^2 f^2 + \frac{1}{2\delta_0^2} \right)^2 + k^2 - \frac{z^2}{\delta_0^4} \right]}{\sqrt{B_{xx} B_{yy} \left[ 4z^2 \left( k^2 f^2 + \frac{1}{2\delta_0^2} \right)^2 + k^2 - \frac{z^2}{\delta_0^4} \right]}}. \quad (17)$$

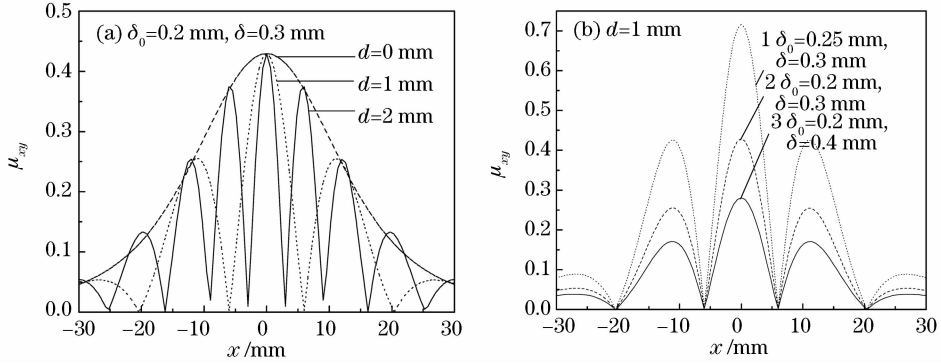


图 5 离轴参数和相关长度对  $z = 30z_R$  面上  $y = x$  时  $x$  方向  $\mu_{xy}$  的影响

Fig. 5 Influence of off-axis parameter and correlation lengths on the spectral degree of coherence  $\mu_{xy}$  in the  $x$  direction for  $y = x$  at the plane  $z = 30z_R$

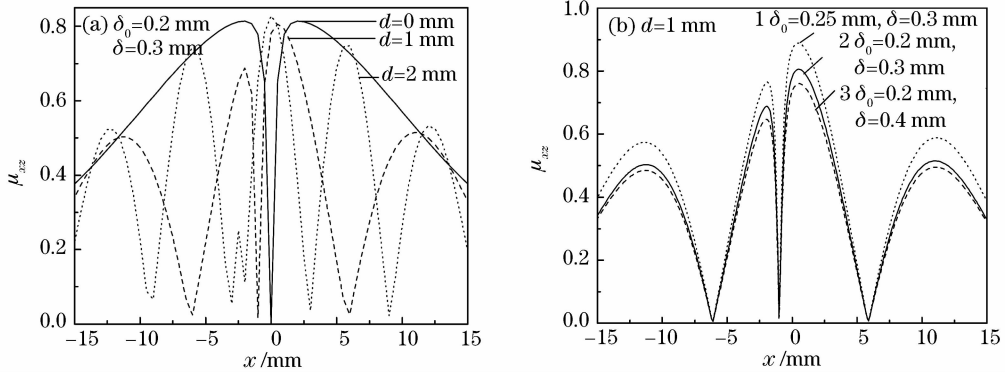


图 6 离轴参数和相关长度变化对  $z = 30z_R$  面上  $y = x$  时  $x$  方向  $\mu_{xz}$  的影响

Fig. 6 Influence of off-axis parameter and correlation lengths on the spectral degree of coherence  $\mu_{xz}$  in the  $x$  direction for  $y = x$  at the plane  $z = 30z_R$

图 5(b) 中  $\mu_{xy}(0,0,z)$  随  $\delta_0, \delta$  变化规律与 (17) 式一致, 且由 (17) 式得  $\mu_{xy}(0,0,z)|_{d=0} = 0.43$ 。

图 6 是离轴参数和相关长度对  $z = 30z_R$  处面上  $y = x$  时  $x$  方向非傍轴共轴 GSM 电磁光束  $\mu_{xz}$  的影响。由图 6(a) 可以看出, 当  $d = 0$  mm 时, 在轴上  $\mu_{xz} = 0$ 。这可由解析结果直接得出, 因为由 (12) 和 (16) 式知

$$\mu_{xz}(0,0,z) = \frac{W_{xz}(0,0,z)}{\sqrt{W_{xx}(0,0,z)W_{zz}(0,0,z)}} = 0. \quad (18)$$

图 6(a) 中  $\mu_{xz}$  随参数  $d$  的增大振荡加剧。图 6(b) 中,  $\mu_{xz}$  随着自相关长度  $\delta_0$  的增大而变大, 随着

互相关长度  $\delta$  的增大而减小 ( $\mu_{yz}$  的变化规律与  $\mu_{xz}$  相似, 从略)。

## 4 结 论

对离轴 GSM 电磁光束的非傍轴传输做了详细研究, 推导出了非傍轴离轴 GSM 电磁光束在自由空间传输  $3 \times 3$  交叉谱密度矩阵的解析表达式。非傍轴共轴 GSM 电磁光束和非傍轴离轴高斯电磁光束可作为本文结果的特例来处理。研究表明, 随离轴参数增加非傍轴离轴 GSM 电磁光束的光强  $I$  和偏振度  $P$  分布发生变化, 光谱相干度振荡加剧。互相关长度的增加和自相关长度的减小会使光强和偏

振度的分布在某一方向拉伸,偏振度的两个凹陷的距离增加。在  $z$  为常数时光谱相干度随着自相关长度的增大而增大,随着互相关长度的增大而减小。

### 参 考 文 献

- Leonard Mandel, Emil Wolf. Optics Coherence and Quantum Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- Ji Xiaoling, Chen Senhui, Li Xiaoqing. Polarization properties of partially coherent electromagnetic Hermite-Gaussian beams in atmospheric turbulence [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(1):67~72  
季小玲,陈森会,李晓庆. 部分相干电磁厄米-高斯光束通过湍流大气传输的偏振特性[J]. *中国激光*, 2008, **35**(1):67~72
- Shu Jianhua, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Changes in the degree of polarization of partially coherent lights diffracted by multiple circular aperture [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(6):849~854  
舒建华,陈子阳,蒲继雄. 部分相干光经多个圆孔衍射后的偏振度变化[J]. *中国激光*, 2008, **35**(6):849~854
- Xiao Qinggang, Xiao Yao, Zeng Yangsu. Study of grating diffractive field's degree of polarization and angular coherence of partially polarized and coherent beam [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5):822~827  
肖擎纲,肖尧,曾阳素. 部分偏振部分相干光光栅衍射场的偏振特性和角相关研究[J]. *光学学报*, 2008, **28**(5):822~827
- Franco Gori. Matrix treatment for partially polarized, partially coherent beams [J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(4):241~243
- Emil Wolf. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 2003, **312**(5-6):263~267
- T. Setälä, M. Kaivola, A. T. Friberg. Degree of polarization in near fields of thermal sources: effects of surface waves [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**:123902
- T. Setälä, A. T. Friberg. Complete electromagnetic coherence in the space-frequency domain [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(4):328~330
- Qiu Yunli, Xu Aijun, Liu Jinglin *et al.*. Propagation of partially polarized, partially coherent beams [J]. *J. Opt. A: Pure. Appl. Opt.*, 2008, **10**:075004
- Duan Kailiang, Lü Baida. Partially coherent nonparaxial beams [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(8):800~802
- Duan Kailiang, Lü Baida. Partially coherent vectorial nonparaxial beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(10):1924~1932
- Gao Zenghui, Lü Baida. Propagation of vectorial off-axis Gaussian beams beyond the paraxial approximation [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(11):5144~5148  
高曾辉,吕百达. 矢量非傍轴离轴高斯光束的传输[J]. *物理学报*, 2005, **54**(11):5144~5148
- Olga Korotkova, Mohamed Salem, Emil Wolf. The far-zone behavior of the degree of polarization of electromagnetic beams propagating through atmospheric turbulence [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **233**(4-6):225~230
- Lü Baida, Duan Kailiang. Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture [J]. *Opt. Lett.*, 2003, **28**(24):2440~2442
- T. Setälä, A. Shevchenko, M. Kaivola *et al.*. Degree of polarization for optical near fields [J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **66**:016615
- Olga Korotkova, Emil Wolf. Spectral degree of coherence of a random three-dimensional electromagnetic field [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, **21**(12):2832~2835