

文章编号: 0258-7025(2010)02-0444-05

椭圆高斯光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性

陈天禄¹ 吴平² 厉海金¹ 次仁尼玛¹ 宁长春¹ 胡海冰¹ 高佳杰¹

(¹ 西藏大学理学院物理系, 西藏 拉萨 850000; ² 西南交通大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610031)

摘要 以椭圆梯度折射率介质作为实现二维轴对称分数傅里叶变换(FRFT)的光学系统,利用分数傅里叶变换与维格纳(Wigner)分布函数旋转等效的性质,推导出了椭圆高斯光束在二维轴对称分数傅里叶变换面上束宽和光强分布的解析表达式,研究了光束光强和束宽随二维轴对称分数傅里叶变换阶数的变化规律,并对数值计算结果进行了分析和讨论。研究表明,光束在二维轴对称分数傅里叶变换出射面上光束光强和束宽分别随各自方向的变换阶数变化;在特定出射面上椭圆高斯光束变为圆高斯光束;若入射面光束束宽 w_x 小于 w_y ,在特定出射面上将出现 w_x 大于 w_y 。该方法可用于其他光束二维轴对称分数傅里叶变化性质的分析,同时也可直接推广到透镜系统,有望在光束传输、耦合等领域获得实际应用。

关键词 几何光学;椭圆高斯光束;二维轴对称分数傅里叶变换;Wigner 分布函数;椭圆梯度折射率介质

中图分类号 O435; TN241 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103702.0444

Two-Dimensional Axial Symmetric Fractional Fourier Transforms for Elliptical Gaussian Beams Employing Wigner Distribution Function

Chen Tianlu¹ Wu Ping² Li Haijin¹ Ciren Nima¹ Ning Changchun¹
Hu Haibing¹ Gao Jiajie¹

(¹ Department of Physics, Science School, Tibet University, Lhasa, Tibet 850000, China)
(² Science School, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract With the elliptical gradient-index medium used as the optical system to implement two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transforms (FRFT), the analytical formula of the beam width and the intensity distribution for two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transform of elliptical Gaussian beams have been derived, based on the equivalence between the rotation of the Wigner distribution function and the fractional Fourier transform. By employing the derived formula, the influence of the fractional order on the properties of elliptical Gaussian beams in the fractional Fourier transform plane has been studied in detail. The results indicate that the on-axis intensity and the beam width of elliptical Gaussian beams change asynchronously along the x , y axes and the two parameters are dependent on the fractional order p_x and p_y respectively. The circular Gaussian beams will be obtained in specific output plane. Meanwhile, it will appear that the beam width satisfies $w_x > w_y$ in specific output plane in spite of $w_x < w_y$ in the input plane. The results will have applications in beam coupling, shaping and material thermal processing by laser beam. The approach presented in this paper can be extended to analyze and calculate the two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transform of other beams and related results are straightforward.

Key words geometric optics; elliptical Gaussian beams; two-dimensional axial symmetric fractional Fourier transforms; Wigner distribution function; elliptical gradient-index medium

1 引 言

1993 年以来, Mendlovic 等^[1,2]将分数傅里叶变换的概念引入光学领域并做了一系列的研究,他们在梯度折射率 (gradient-index, GRIN) 介质中找

到了分数傅里叶变换的光学解释^[1]。Lohmann^[3]采用维格纳 (Wigner) 分布函数定义了分数傅里叶变换,并给出了利用单透镜和双透镜实现分数阶傅里叶变换的结构。通常情况下的二维分数傅里叶变换

收稿日期: 2009-04-21; 收到修改稿日期: 2009-05-19

基金项目: 西藏大学校科学研究基金 (ZDZK200706) 资助课题。

作者简介: 陈天禄 (1979—), 男, 硕士, 讲师, 主要从事激光光束的传输与变换方面的研究。E-mail: ctl_071@163.com

具有旋转对称性(即在 xoy 平面内变换阶数相等, $p_x = p_y$), 事实上具有轴对称性的二维分数傅里叶变换(即 xoy 平面内变换阶数不相等, $p_x \neq p_y$) 具有更广泛的应用价值, 对此, 1998 年 A. Sahin 等^[4] 进行了较为系统的研究, 给出了实现它的透镜系统。同年, Y. Li 等^[5] 指出椭圆梯度折射率 (elliptic gradient-index, EGRIN) 介质也可以实现二维轴对称分数傅里叶变换。

目前, 光束分数傅里叶变换是该领域研究的热点, 研究者已采用不同的方法研究了多种光束的二维旋转对称分数傅里叶变换特性^[6-16], 但对光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性的研究还未见文献报道。本文以椭圆梯度折射率介质作为实现二维轴对称分数傅里叶变换的光学系统, 利用 Wigner 分布函数分析法, 推导出了椭圆高斯光束参数通过二维轴对称分数傅里叶变换系统的解析公式, 研究了椭圆高斯光束的光束参数随二维轴对称分数傅里叶变换阶数变化的规律。

2 理论分析

椭圆梯度折射率介质折射率分布为^[5]

$$n^2(x, y) = n_0^2 \left[1 - \left(\frac{n_x}{n_0} \right) x^2 - \left(\frac{n_y}{n_0} \right) y^2 \right], \quad (1)$$

式中 n_0, n_x, n_y 为椭圆梯度折射率介质的参数。

Y. Li 等^[5] 已证明椭圆梯度折射率介质可以实现二维轴对称分数傅里叶变换, 其介质参数与变换阶数之间满足关系

$$\begin{cases} p_x = \frac{L}{L_x}, L_x = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_x}} = \frac{\pi}{2\beta_x} \\ p_y = \frac{L}{L_y}, L_y = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n_0}{n_y}} = \frac{\pi}{2\beta_y} \\ \gamma = \frac{p_y}{p_x} = \sqrt{\frac{n_y}{n_x}} \end{cases}, \quad (2)$$

式中 p_x, p_y 分别为 x, y 方向上分数傅里叶变换阶数; $\beta_x = \sqrt{n_x/n_0}, \beta_y = \sqrt{n_y/n_0}$; $\gamma = p_y/p_x$, 显然, γ 由介质参数决定, 与介质的长度 L 无关。当 $L = L_x = \pi/(2\beta_x)$ [或 $L = L_y = \pi/(2\beta_y)$] 时, $p_x = 1$ (或 $p_y = 1$), 此时, 在 x (或 y) 方向上分别实现常规傅里叶变换; 而当 $L = p_x L_x$ (或 $L = p_y L_y$) 时, 在 x (或 y) 方向上分别实现 p_x (或 p_y) 阶傅里叶变换。

Lohmann^[3] 指出一个函数的分数傅里叶变换可等效为其 Wigner 分布函数的旋转, p_x (或 p_y) 阶分数傅里叶变换对应 Wigner 分布函数旋转角度 φ_x (或 φ_y) 为

$$\varphi_x = \frac{\pi}{2} \cdot p_x, \varphi_y = \frac{\pi}{2} \cdot p_y. \quad (3)$$

椭圆高斯光束在入射面 $z=0$ 平面场分布函数为

$$E(x, y, 0) = E_0 \exp \left[- \left(\frac{x^2}{\omega_{0x}^2} + \frac{y^2}{\omega_{0y}^2} \right) \right], \quad (4)$$

式中 ω_{0x}, ω_{0y} 分别表示椭圆高斯光束在 $z=0$ 平面 x 方向和 y 方向的束腰宽度。为计算方便, 令 $E_0=1$ 。

在 $z=0$ 平面椭圆高斯光束的 Wigner 分布函数为^[3]

$$\begin{aligned} W_0(x_0, y_0, \mu_0, \nu_0, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E \left(x_0 + \frac{x'}{2}, y_0 + \frac{y'}{2}, 0 \right) E^* \left(x_0 - \frac{x'}{2}, y_0 - \frac{y'}{2}, 0 \right) \times \\ &\exp \left[- \frac{j2\pi}{\lambda} (\beta_x x_0 \mu_0 + \beta_y y_0 \nu_0) \right] dx' dy' = W_{x_0}(x_0, \mu_0, 0) W_{y_0}(y_0, \nu_0, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 * 表示取共轭, μ_0, ν_0 为角坐标, λ 为入射光波波长,

$$\begin{cases} W_{x_0}(x_0, \mu_0, 0) = \sqrt{2\pi} \omega_{0x} \exp \left(- \frac{2x_0^2}{\omega_{0x}^2} \right) \exp \left(- \frac{2\pi^2 \beta_x^2 \omega_{0x}^2 \mu_0^2}{\lambda^2} \right), \\ W_{y_0}(y_0, \nu_0, 0) = \sqrt{2\pi} \omega_{0y} \exp \left(- \frac{2y_0^2}{\omega_{0y}^2} \right) \exp \left(- \frac{2\pi^2 \beta_y^2 \omega_{0y}^2 \nu_0^2}{\lambda^2} \right). \end{cases} \quad (6)$$

引入 Wigner 分布函数旋转角 φ_x, φ_y 后可以表示为^[3]

$$\begin{aligned} W_p(x, \mu, y, \nu) &= W_0(x \cos \varphi_x - \mu \sin \varphi_x, y \cos \varphi_y - \nu \sin \varphi_y, \mu \cos \varphi_x + x \sin \varphi_x, \nu \cos \varphi_y + y \sin \varphi_y) = \\ &W_{xp}(x, \mu) W_{yp}(y, \nu), \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} W_{xp}(x, \mu) &= \sqrt{2\pi} \omega_{0x} \exp \left\{ - 2 \left[\left(\frac{\cos^2 \varphi_x}{\omega_{0x}^2} + \frac{\pi^2 \beta_x^2 \omega_{0x}^2 \sin^2 \varphi_x}{\lambda^2} \right) x^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. \left(\frac{1}{\omega_{0x}^2} - \frac{\pi^2 \beta_x^2 \omega_{0x}^2}{\lambda^2} \right) \sin 2\varphi_x x \mu + \left(\frac{\sin^2 \varphi_x}{\omega_{0x}^2} + \frac{\pi^2 \beta_x^2 \omega_{0x}^2 \cos^2 \varphi_x}{\lambda^2} \right) \mu^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$W_{yp}(y, \nu) = \sqrt{2\pi}\omega_{0y} \exp \left\{ -2 \left[\left(\frac{\cos^2 \varphi_y}{\omega_{0y}^2} + \frac{\pi^2 \beta_y^2 \omega_{0y}^2 \sin^2 \varphi_y}{\lambda^2} \right) y^2 + \left(\frac{1}{\omega_{0y}^2} - \frac{\pi^2 \beta_y^2 \omega_{0y}^2}{\lambda^2} \right) \sin 2\varphi_y y \nu + \left(\frac{\sin^2 \varphi_y}{\omega_{0y}^2} + \frac{\pi^2 \beta_y^2 \omega_{0y}^2 \cos^2 \varphi_y}{\lambda^2} \right) \nu^2 \right] \right\}. \quad (8)$$

对于光强分布函数 $I(x, y)$, 可由 Wigner 分布函数积分得到^[3]

$$I(x, y) = \frac{\beta_x \beta_y}{\lambda^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W(x, y, \mu, \nu) d\mu d\nu. \quad (9)$$

经过繁冗的积分运算, 由(9)式可以求出经 p_x, p_y 阶分数傅里叶变换后的光强分布函数

$$I_p(x, y) = \frac{Z_{0x} Z_{0y} \beta_x \beta_y}{\sqrt{mn}} \exp \left[-2 \left(\frac{Z_{0x}^2 \beta_x^2}{\omega_{0x}^2} \frac{1}{m} x^2 + \frac{Z_{0y}^2 \beta_y^2}{\omega_{0y}^2} \frac{1}{n} y^2 \right) \right], \quad (10)$$

式中 $m = \sin^2 \varphi_x + Z_{0x}^2 \beta_x^2 \cos^2 \varphi_x$, $n = \sin^2 \varphi_y + Z_{0y}^2 \beta_y^2 \cos^2 \varphi_y$; $Z_{0x} = \pi \omega_{0x}^2 / \lambda$, $Z_{0y} = \pi \omega_{0y}^2 / \lambda$ 分别为椭圆高斯光束在 x, y 方向上的瑞利长度。

由(3), (10)式可以看出, 在给定入射参数的情况下, 椭圆高斯光束在二维轴对称分数傅里叶变换面上光强取决于 p_x 及 p_y 。

令 $x = 0, y = 0$, 从(10)式可以得到椭圆高斯光束轴上光强随分数傅里叶变换阶数变化的公式

$$I(0, 0) = \frac{2Z_{0x} Z_{0y} \beta_x \beta_y}{\sqrt{(1 + Z_{0x}^2 \beta_x^2) + (Z_{0x}^2 \beta_x^2 - 1) \cos 2\varphi_x} \times \sqrt{(1 + Z_{0y}^2 \beta_y^2) + (Z_{0y}^2 \beta_y^2 - 1) \cos 2\varphi_y}}. \quad (11)$$

由(11)式可知, 轴上光强极值的出现在 x, y 方向上不同步, x (或 y) 方向上轴上光强取值不仅与分数傅里叶变换阶数 p_x (或 p_y) 有关, 而且取决于椭圆高斯光束的瑞利长度 Z_{0x} (或 Z_{0y}) 和介质参数 β_x (或 β_y)。

由二阶矩方法, 还可以得到椭圆高斯光束经过 p_x (或 p_y) 阶分数傅里叶变换后, 在 p_x (或 p_y) 阶分数傅里叶变换平面上光束束宽 w_x, w_y 的解析计算公式

$$\begin{cases} w_x = 2 \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{Z_{0x}^2 \beta_x^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{Z_{0x}^2 \beta_x^2} \right) \cos 2\varphi_x \right]} w_{0x}, \\ w_y = 2 \sqrt{\langle y^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{Z_{0y}^2 \beta_y^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{Z_{0y}^2 \beta_y^2} \right) \cos 2\varphi_y \right]} w_{0y}, \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle$ 为方差矩阵元, 其定义为:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} x^2 W_p(x, y, u, \nu) dx dy du d\nu}{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_p(x, y, u, \nu) dx dy du d\nu}, \quad \langle y^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} y^2 W_p(x, y, u, \nu) dx dy du d\nu}{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} W_p(x, y, u, \nu) dx dy du d\nu}.$$

从(12)式可以看出, 在 x, y 方向上光束束宽随分数傅里叶变换阶数 p_x, p_y 周期性变化, 且其周期对应分数傅里叶变换阶数 $p_x = 2, p_y = 2$ 。

由(12)式还可以看出, 在 $Z_{0x} \geq 1/\beta_x$ (或 $Z_{0y} \geq 1/\beta_y$) 的条件下, 当 $\cos 2\varphi_x = -1$ (或 $\cos 2\varphi_y = -1$), 即 $\varphi_x = k\pi + \pi/2, p_x = 2k + 1$ (或 $\varphi_y = k\pi + \pi/2, p_y = 2k + 1$), x (或 y) 方向光束束宽达到最小值, $w_{x\min} = \omega_{0x} / (Z_{0x} \beta_x)$ [或 $w_{y\min} = \omega_{0y} / (Z_{0y} \beta_y)$]. 当 $\cos 2\varphi_x = 1$ (或 $\cos 2\varphi_y = 1$), 即 $\varphi_x = k\pi, p_x = 2k$ (或 $\varphi_y = k\pi, p_y = 2k$) 时, x (或 y) 方向光束束宽达到最大值, $w_{x\max} = \omega_{0x}$ (或 $w_{y\max} = \omega_{0y}$). 反之亦然。显然, 当 $Z_{0x} > 1/\beta_x$ (或 $Z_{0y} > 1/\beta_y$) 时, 系统对光束具有聚焦作用, 而当 $Z_{0x} < 1/\beta_x$ (或 $Z_{0y} < 1/\beta_y$) 时, 系统对

光束具有发散作用。

由以上分析可知, 椭圆高斯光束在分数傅里叶变换平面上光束束宽 w_x, w_y 随阶数的变化在 x, y 方向上不同步, w_x, w_y 不仅与分数傅里叶变换阶数 p_x, p_y 有关, 而且还与椭圆高斯光束的瑞利长度 Z_{0x}, Z_{0y} 和介质参数 β_x, β_y 有关。

利用(12)式, 可以推导出当二维轴对称分数傅里叶变换阶数满足条件

$$1 + \frac{1}{Z_{0x}^2 \beta_x^2} + \left(1 - \frac{1}{Z_{0x}^2 \beta_x^2} \right) \cos 2\varphi_x = \frac{\omega_{0y}^2}{\omega_{0x}^2} \left[\left(1 + \frac{1}{Z_{0y}^2 \beta_y^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{Z_{0y}^2 \beta_y^2} \right) \right] \cos 2\varphi_y, \quad (13)$$

时, 光束束宽 w_x, w_y 相等, 此时, 光束是完全对称化

的圆高斯光束。

当入射、出射光束束宽 ω_{0x} , ω_{0y} , ω_x 和 ω_y 已知时,可以由(12)式来确定分数傅里叶变换阶数 p_x , p_y 和所需介质的参数 β_x, β_y 。

3 数值计算和讨论

利用(10)式进行数值计算,可得到不同阶数的

二维轴对称分数傅里叶变换平面上椭圆高斯光束的光强分布图,如图 1(注意各图坐标范围不同)所示。计算用光束参数为: $\omega_{0x} = 2.0 \text{ mm}$, $\omega_{0y} = 4.5 \text{ mm}$, $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, $1/\beta_x = 25 \text{ mm}$, $1/\beta_y = 6.25 \text{ mm}$, $\gamma = \beta_y/\beta_x = 4.0$, 此时,瑞利长度分别为: $Z_{0x} = \pi\omega_{0x}^2/\lambda = 95.8 \text{ mm} > 1/\beta_x$, $Z_{0y} = \pi\omega_{0y}^2/\lambda = 485.4 \text{ mm} > 1/\beta_y$ 。

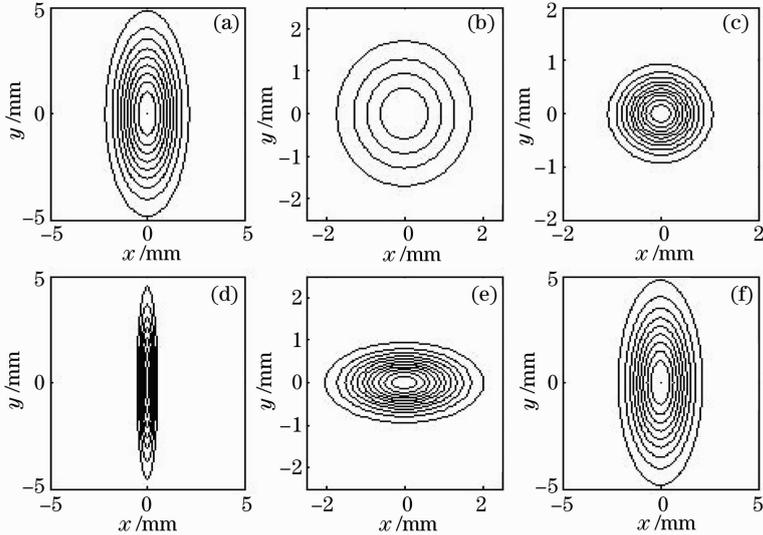


图 1 椭圆高斯光束在不同阶数的二维轴对称分数傅里叶变换平面上光强等值线分布图

Fig. 1 Contour graphs of the intensity distribution of elliptical Gaussian beams on the 2-dimension axial-symmetric FRFT plane with different fractional orders

在给定介质参数和入射光束参数的情况下,对于一定阶数的二维轴对称分数傅里叶变换阶数,由理论计算可以得出出射光束参数及介质长度,计算结果见表 1,其给出了光束束宽和介质长度随二维分数傅里叶变换阶数的变化关系以及和图 1 的对应关系。

由图 1 可以看出二维分数傅里叶变换的阶数对椭圆高斯光束的光强分布有很大影响。结合图 1 和表 1 可以看出光斑在 x 方向和 y 方向的光束束宽随分数傅里叶变换独立地进行周期性变化。当 $p_x = 2$, $p_y = 8$ 时,光束实现自再现,如图 1(f) 所示,此时,光束 x, y 方向的束宽均达到最大值。当 $p_x = 1$, $p_y = 4$ 时,光束 x 方向的束宽达到最小值,而在 y

方向的束宽达到最大值,如图 1(d) 所示。由(13)式可以求出对称化的圆高斯光束所对应的分数傅里叶变换阶数,图 1(b) 和 (c) 给出的是当 $p_x = 0.18$, $p_y = 0.72$, $p_x = 0.72$, $p_y = 2.88$ 时圆高斯光束的情况。虽然计算采用的入射光束 x 方向束宽小于 y 方向束宽,但在经过一定阶数二维轴对称分数傅里叶变换时, x 方向束宽却大于 y 方向的束宽,如图 1(e) 所示,此时, $p_x = 1.72$, $p_y = 6.88$ 。由分析可以看出二维轴对称分数傅里叶变换的阶数对光束的参数有很大影响,对不同阶数的二维轴对称分数傅里叶变换,输出光束的参数变化很大,该结果可为实际的工程设计提供较大的自由度。

表 1 光束束宽和介质长度随二维轴对称分数傅里叶变换阶数的变化关系及与图 1 的对应关系

Table 1 Beam width and medium length on the 2-dimension axial-symmetric FRFT plane with different fractional Fourier order and it's corresponding to Fig. 1

p_x, p_y	Length of the medium /mm	Beam width /mm	Sequence number corresponding to Fig. 1
0.0,0.0	0.0	2.0,4.5	(a)
0.18,0.72	7.06	1.92,1.92	(b)
0.72,2.88	28.12	0.94,0.94	(c)
1.0,4.0	39.27	0.42,4.5	(d)
1.72,6.88	67.54	1.82,0.84	(e)
2.0,8.0	78.5	2.0,4.5	(f)

4 结 论

以椭圆梯度折射率介质作为实现二维轴对称分数傅里叶变换的光学系统,利用分数傅里叶变换与Wigner分布函数旋转等效的性质,推导出了椭圆高斯光束在二维轴对称分数傅里叶变换平面上光强分布的解析公式和其束宽随分数傅里叶变换的阶数变化的解析公式。用此解析公式研究了椭圆高斯光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性。

研究表明,二维轴对称分数傅里叶变换阶数对椭圆高斯光束的光强分布有明显影响,某一方向光斑尺寸随该方向阶数周期性变化;通过适当选取二维轴对称分数傅里叶变换阶数可以使椭圆高斯光束在 x, y 方向的束宽相等,实现椭圆高斯光束的对称化,同时,若入射面上 x 方向束宽大于 y 方向束宽,在特定出射面上 x 方向束宽大于 y 方向束宽。由本文的解析结果可以分析给定椭圆高斯光束的二维轴对称分数傅里叶变换特性,也可以根据实际需要在已知光束相关参数的情况下确定实现光束二维轴对称分数傅里叶变换所需椭圆梯度折射率介质的参数,该结果有望获得应用实际。同样是研究椭圆高斯光束的分数傅里叶变换,但与文献[6]相比,本文采取了不同研究方法,更重要的是本文研究了椭圆高斯光束的二维轴对称(文献[6]为旋转对称)分数傅里叶变换特性。由于已经证明二维轴对称分数傅里叶变换两种定义是等价的,所以本文的研究结果可直接推广至由透镜系统实现的二维轴对称分数傅里叶变换。

参 考 文 献

- 1 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation. I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~1881
- 2 H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier transform and their optical implementation. II [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(12): 2522~2531
- 3 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the

- fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~2186
- 4 A. Sahin, H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Optical implementations of two-dimensional fractional Fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(11): 2130~2141
- 5 Yu Li, Huang Meichun, Wu Liqing *et al.*. Fractional Fourier transform and the elliptic gradient-index medium [J]. *Opt. Commun.*, 1998, **152**(1~3): 23~25
- 6 Cai Yangjian, Qiang Lin. Fractional Fourier transform for elliptical Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **217**: 7~13
- 7 Zhao Daomu, Mao Daidan, Liu Hongjie *et al.*. Propagation of Hermite-cosh-Gaussian beams in apertured fractional Fourier transforming systems [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **236**(4-6): 225~235
- 8 Hongjie Liu, Daomu Zhao, Haidan Mao *et al.*. Studies of beam propagation characteristics on apertured fractional Fourier transforming systems [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2004, **2**(4): 206~209
- 9 Wu Ping, Lü Baida, Chen Tianlu. Fractional Fourier transform of beams in the use of the Wigner distribution function method [J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(2): 658~664
吴平,吕百达,陈天禄. 光束分数傅里叶变换的Wigner分布函数分析方法 [J]. *物理学报*, 2005, **54**(2): 658~664
- 10 Chen Tianlu, Wu Ping. Fractional Fourier transforms for cosh-Gaussian beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(7): 908~912
陈天禄,吴平. 双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶变换特性研究 [J]. *中国激光*, 2005, **32**(7): 908~912
- 11 Chongwei Zheng. Fractional Fourier transform for a hollow Gaussian beam [J]. *Phys. Lett. A*, 2006, **355**(2): 156~161
- 12 Chen Baoxin, Li Ming, Zhang Aiju. Phase space beam matrix method for evaluating geometrical aspect of fractional Fourier transform of light beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(8): 4535~4541
陈宝信,李明,张爱菊. 光束分数傅里叶变换几何特性的相空间束矩阵分析方法 [J]. *物理学报*, 2007, **56**(8): 4535~4541
- 13 Zheng Chongwei. Fractional Fourier transform of an elliptical dark-hollow beam [J]. *Optics and Laser Technology*, 2008, **40**(4): 632~640
- 14 Xinyue Du, Daomu Zhao. Fractional Fourier transform of off-axial elliptical cosh-Gaussian beams [J]. *Optik*, 2008, **119**(8): 379~382
- 15 Chen Senhui, Zhang Tingrong, Feng Xiaofang. Transformation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beam in fractional Fourier transform plane [J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(2): 374~378
陈森会,张廷蓉,冯小芳. 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯光束的变换特性 [J]. *中国激光*, 2009, **36**(2): 374~378
- 16 Senhui Chen, Tingrong Zhang, Xiaofang Feng. Propagation properties of cosh-squared-Gaussian beam through fractional Fourier transform systems [J]. *Opt. Commun.*, 2009, **282**(6): 1083~1087