

文章编号: 0258-7025(2010)02-0428-05

基于厄米-高斯光束单光子捕获概率研究

毕慧宁 马 晶

(哈尔滨工业大学可调谐激光技术国家级重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要 单光子捕获技术是自由空间量子密钥分配的关键技术。单光子捕获概率是一个重要问题。基于厄米-高斯光束处于 TEM_{20} , TEM_{02} , TEM_{30} , TEM_{03} 及 TEM_{11} 模式下的单光子捕获概率理论模型被建立, 通过数值仿真给出厄米-高斯光束处于不同模式下单光子捕获概率的大小。以 TEM_{10} 为例给出时间滤波的物理模型, 将该模型与数值仿真结果相结合, 分析在进行单光子捕获时需要被淘汰模式和最佳模式, 并给出了 TEM_{20} 模式下时间滤波的具体实现过程及其应用价值, 从而达到对自由空间量子密钥分配系统的优化。

关键词 量子通信; 量子密钥分配; 单光子捕获概率; 厄米-高斯光束

中图分类号 TN929.13 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103702.0428

Study of Single-Photon Acquisition Probability Based on Hermite-Gaussian Beams

Bi Huining Ma Jing

(National Key Laboratory of Tunable Laser Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150080, China)

Abstract Single-photon acquisition is the key technology of free-space quantum key distribution. Single-photon acquisition probability is very important. Based Hermite-Gaussian beams in TEM_{20} , TEM_{02} , TEM_{30} , TEM_{03} and TEM_{11} , the theoretical model of single-photon acquisition probability is established. And the probability in different modes is shown by numerical simulation. The physical model of time filtering is established, the limited mode and optimal mode are analyzed. The results can provide theoretical basis for the design of single-photon source, and optimize the system of free-space quantum key distribution.

Key words quantum communication; quantum key distribution; single-photon acquisition probability; Hermite-Gaussian beam

1 引 言

量子密码通信是最近 20 年发展起来的一种新的通信技术, 它利用量子特性来得到或提高通信的保密性^[1]。经过 20 年的发展, 量子密码通信目前已从单纯研究逐步走向实际应用。Nature 杂志 2002 年 10 月发表的文章^[2]提到, 曾在德国南部相距 23.4 km 的两座高山间进行实验, 检测码率为 1.5 ~ 2 kb/s。2006 年, 德国的 Ludwig-Maximilian 大学和 Max-Planck 量子光学学院进行了夜晚城市链路 480 m 的自由空间量子密钥分配实验^[3], 该实验采用 BB84 协议, 发射机脉冲重复频率为 10 MHz, 单

光子源采用平均光子数为 0.1 的高度衰减激光脉冲, 经过筛选的平均密钥率大于 50 kb/s, 量子误码率为 3% ~ 5%。2006 年 9 月, 德国的 Ludwig-Maximilian 大学和 Max-Planck 量子光学学院、奥地利的 Vienna 大学、欧洲空间局、意大利的 Padova 大学和英国的 Bristol 大学合作进行了夜晚室外 144 km 的自由空间量子密钥分配实验^[4]。该实验采用 BB84 协议, 发射机脉冲重复频率为 10 MHz, 光损耗约为 35 dB, 单光子源采用弱相干脉冲, 波长为 850 nm, 带宽为 1.5 nm。为了保证量子密钥分配的安全性, 实验采用了诱骗态分析。2007 年, 德国

收稿日期: 2008-12-08; 收到修改稿日期: 2009-05-10

作者简介: 毕慧宁(1984—), 女, 硕士研究生, 主要从事卫星光通信及量子通信方面的研究。

E-mail: bihuining@yahoo.com.cn

导师简介: 马 晶(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事卫星光通信方面的研究。E-mail: majing@hit.edu.cn

的 Max-Planck 量子光学学院和 Ludwig-Maximilian 大学、奥地利的 Vienna 大学和科学研究院、欧洲空间局、新加坡国立大学等合作进行了 144 km 自由空间量子密钥分配的实验演示^[5]。该实验采用 BB84 协议,单光子源采用弱相干光脉冲,实验中密钥率达 12.8 bit/s。实验的成功证明了通过卫星可以实现全球密钥分配的可行性。2008 年,意大利的 Padova 大学、奥地利的 Vienna 大学等合作首次对太空与地面站间量子信道的可行性进行了实验验证^[6]。

单光子捕获过程是自由空间量子密钥分配系统能否实现的关键,是区别于光纤量子信道的本质特征。对于单光子捕获,一个重要问题就是单光子捕获概率问题,也就是发射机和接收机的光学耦合问题。当利用基模高斯光束进行单光子捕获时,由于卫星的运动将导致接收机偏离概率密度极大值点,使得接收机无法以最大概率捕获单光子,即产生了

单光子捕获概率的损耗,采用高阶模则不会出现类似的情况,本文将在时间滤波物理模型中证明。文献[7]中曾推导了基于厄米-高斯光束处于 TEM₁₀, TEM₀₁ 模式下的单光子捕获概率表达式。本文将进一步建立基于厄米-高斯光束处于 TEM₂₀, TEM₀₂, TEM₃₀, TEM₀₃ 及 TEM₁₁ 模式下的单光子捕获概率理论模型。通过数值仿真给出厄米-高斯光束处于不同模式下单光子捕获概率的大小,从而得到最佳模式选择的理论依据。针对星间激光链路量子密钥分配中的单光子捕获问题给出时间滤波的具体物理模型,并根据该模型分析各种模式的实际意义及应用价值。

2 单光子捕获概率的理论模型

在直角坐标系下,沿 z 轴方向传播的归一化 TEM _{m} 模厄米-高斯光束的表达式为^[8]

$$\psi_{mn}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left\{ -i \left\{ k \left[z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right] - (1 + m + n) \arctan \left(\frac{z}{f} \right) \right\} \right\}, \quad (1)$$

式中 $H_m[\sqrt{2}x/w(z)]$ 和 $H_n[\sqrt{2}y/w(z)]$ 分别为 m 阶和 n 阶厄米多项式。文献[7]中给出了基于厄米-高斯光束处于 TEM₁₀, TEM₀₁ 模式下的单光子捕获概率表达式,对应于 TEM₁₀ 模式的表达式为^[7]

$$P_{10} = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho_{10}(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{w^4(z)} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \left[r \cos \varphi + \frac{w(z)}{\sqrt{2}} \right]^2 \exp \left\{ -\frac{2}{w^2(z)} \left[r^2 + \sqrt{2}w(z)r \cos \varphi + \frac{w^2(z)}{2} \right] \right\} r dr d\varphi. \quad (2)$$

进一步建立基于厄米-高斯光束处于 TEM₂₀, TEM₀₂, TEM₃₀, TEM₀₃ 及 TEM₁₁ 模式下的单光子捕获概率理论模型。下面以 TEM₂₀ 模式为例讨论其推导过程。

当 $m = 2, n = 0$ 时, $H_0(x) = 1, H_2(x) = 4x^2 - 2$ 。对应于 TEM₂₀ 模的归一化的光子波函数为

$$\psi_{20}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{4x^2}{w^3(z)} - \frac{1}{w(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ -i \left\{ k \left[z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right] - 3 \arctan \left(\frac{z}{f} \right) \right\} \right\}. \quad (3)$$

根据玻恩统计诠释,在传输横截面上光子的概率密度函数为

$$\rho_{20}(x, y, z) = |\psi_{20}(x, y, z)|^2 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4x^2}{w^3(z)} - \frac{1}{w(z)} \right]^2 \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)} \right]. \quad (4)$$

下面求 $\rho_{20}(x, y, z)$ 在传输横截面上的极值。考虑 x 方向,由 $\partial \rho_{20} / \partial x = 0$, 可得 $x = 0, x = \pm w(z)/2$ 或 $x = \pm \sqrt{5}w(z)/2$ 。经验证,当 $x = \pm w(z)/2$ 时, ρ_{20} 在传输横截面上有极小值,故舍去。考虑 y 方向,由 $\partial \rho_{20} / \partial y = 0$, 解得 $y = 0$ 。当 $x = 0, y = 0$ 时, $\rho_{20} = \frac{1}{\pi \cdot w^2(z)}$, 当 $x = \pm \sqrt{5}w(z)/2, y = 0$ 时, $\rho_{20} =$

$\frac{4}{\pi \cdot w(z)} \exp \left(-\frac{5}{2} \right)$ 。考虑到该模式的实际意义,只取 $x = \pm \sqrt{5}w(z)/2, y = 0$ 时的情况进行分析。

假设接收机位于极大值点 $(\sqrt{5}w(z)/2, 0)$ 或 $(-\sqrt{5}w(z)/2, 0)$ 。由于 $\rho_{20}(x, y, z)$ 在传输横截面上具有轴对称性,因此在两个极大值点的单光子捕获概率是相同的,所以这里只对极大值点 $(\sqrt{5}w(z)/2, 0)$ 进行计算。

设接收机天线孔径为 d , 接收机所在的圆域为

$$\left[x - \frac{\sqrt{5}\omega(z)}{2} \right]^2 + y^2 = \frac{d^2}{4}, \quad (5)$$

在该圆域对 $\rho_{20}(x, y, z)$ 积分得出基于 TEM_{20} 模的单光子捕获概率为

$$P_{20} = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho_{20}(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \left\{ \frac{4[r \cos \varphi + \sqrt{5}\omega(z)/2]^2}{\omega^3(z)} - \frac{1}{\omega(z)} \right\}^2 \times \exp\left\{ -\frac{2\{[r \cos \varphi + \sqrt{5}\omega(z)/2]^2 + r^2 \sin^2 \varphi\}}{\omega^2(z)} \right\} r dr d\varphi. \quad (6)$$

利用同样的方法可得到基于 TEM_{30} 及 TEM_{11} 模的单光子捕获概率, 分别为

$$P_{30} = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho_{30}(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \frac{1}{24\pi} \frac{1}{\omega^2(z)} \times \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \left[\frac{16\sqrt{2}(r \cos \varphi + \sqrt{18\omega^2 + 2\omega^2 \cdot \sqrt{57}/4})^3}{\omega^3(z)} - \frac{12\sqrt{2}(r \cos \varphi + \sqrt{18\omega^2 + 2\omega^2 \cdot \sqrt{57}/4})}{\omega(z)} \right]^2 \times \exp\left\{ -\frac{2[(r \cos \varphi + \sqrt{18\omega^2 + 2\omega^2 \cdot \sqrt{57}/4})^2 + r^2 \sin^2 \varphi]}{\omega^2(z)} \right\} r dr d\varphi, \quad (7)$$

$$P_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \rho_{11}(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \frac{32}{\pi} \frac{1}{\omega^6(z)} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \left[r \cos \varphi + \frac{\omega(z)}{\sqrt{2}} \right]^2 \left[r \sin \varphi + \frac{\omega(z)}{\sqrt{2}} \right]^2 \times \exp\left\{ -\frac{2}{\omega^2(z)} [r^2 + \sqrt{2}\omega(z)r(\cos \varphi + \sin \varphi) + \omega^2(z)] \right\} r dr d\varphi. \quad (8)$$

基于 TEM_{02} , TEM_{03} 模的单光子捕获概率只是将(7), (8)式中的 $\cos \varphi$ 与 $\sin \varphi$ 互换位置, 表示极大值点出现在 y 轴。

考虑远场情况, 与传播轴线相交于 z 点的高斯光束等相位面上的光斑半径 $\omega(z) \approx \frac{1}{2}z\theta$, 其中 θ 为光束远场发散角。图 1 是基于 TEM_{10} , TEM_{20} , TEM_{30} 模的单光子捕获概率随 θ 的变化曲线。从图中可以看出, 当 θ 在 $5 \sim 25 \mu\text{rad}$ 变化时, $P_{10} > P_{20} > P_{30}$, 即基于 TEM_{10} 模的单光子捕获概率最大, 当 $\theta > 25 \mu\text{rad}$ 时, P_{10} , P_{20} 及 P_{30} 相差很小。

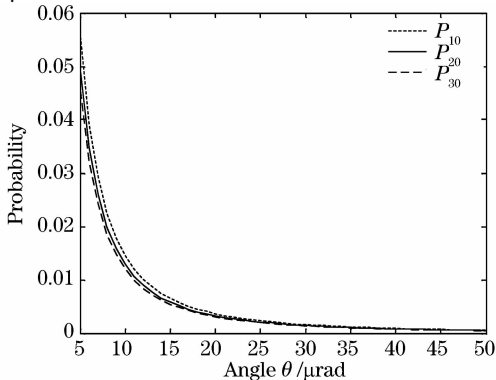


图 1 基于 TEM_{10} , TEM_{20} , TEM_{30} 模的单光子捕获概率与 θ 的关系

Fig. 1 Relationship of single-photon acquisition probabilities based TEM_{10} , TEM_{20} , TEM_{30} modes and θ

3 时间滤波物理模型

对于星间量子密钥分配系统, 在抑制背景光的同时, 为了能够以最大概率捕获单光子, 需要采用空域滤波、频域滤波和时域滤波^[9,10]。对于时域滤波, 通常采用前驱波参考脉冲设置时间窗口的方法^[11,12]。图 2 为 TEM_{mm} 模的强度分布^[13]。以 TEM_{10} 模式为例给出时间滤波的物理模型, 如图 3 所示。发射机在传输单光子脉冲前的几个毫秒发射明亮的参考脉冲, 这样接收机很容易探测到参考脉冲, 参考脉冲后的 τ 时刻单光子到达, 这样既有效抑制了背景光, 又能使卫星上接收机以最大概率捕获光子。假设卫星沿 x 轴方向运动, 运动速度为 v , 取 $z = 30000 \text{ km}$, $\theta_0 = 5 \mu\text{rad}$, 对于 TEM_{10} 模式卫星从原点 O 运动到捕获概率极大值点 A 的距离为 $75\sqrt{2}/2 \text{ m}$ 。假设卫星运行于圆形轨道, 运动速度为 $7.7261 \times 10^3 \text{ m/s}$, 则卫星从原点运动到极大值点所需时间 $\tau \approx 6.8641 \text{ ms}$ 。因此, 为了以最大概率捕获光子, 就要求光子在参考脉冲后的 τ 时刻沿与参考脉冲相同方向发射。若利用基模高斯光束, 采用上



图 2 厄米-高斯光束各模式强度分布
Fig. 2 Intensity pattern of Hermite-Gaussian beams

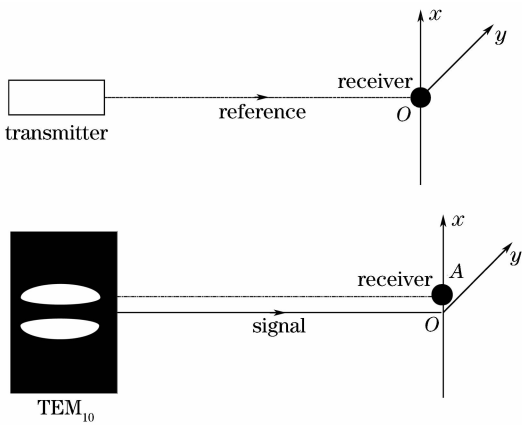


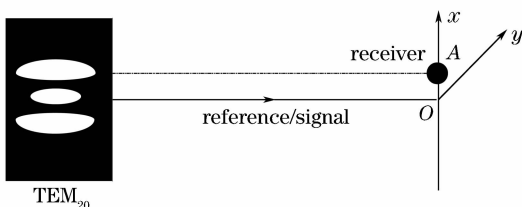
图 3 时间滤波的物理模型

Fig. 3 Physical model of time filtering

述方法捕获单光子,很显然接收机将偏离概率密度极大值点,从而产生单光子捕获概率的损耗,因此研究基于高阶模下的单光子捕获概率是必要的。这里考虑的是外层空间的量子密钥分配,没有考虑大气对单光子捕获概率的影响^[14~16]。

根据图 2 及图 3, TEM_{11} 模式不具有实际意义,因此在进行单光子捕获时需淘汰该模式。进一步分析可知,在单光子捕获时,只有 TEM_{m0} 或 TEM_{0n} 模式才可能具有实际意义。

如前所述,利用基模高斯光束将产生单光子捕获概率的损耗,故使用高阶模进行单光子捕获是必要的。结合图 1 和图 3,为了以最大概率捕获到单光子, TEM_{10} 模式显然是最佳模式。然而,对于 TEM_{20} 模式,同样有其自身的优势及使用价值,如图 4 所示。考虑到 TEM_{20} 模式强度分布的特点,可将图 3 中两个子图合并起来, TEM_{20} 模式中间偏小的光斑即可起到参考信号的作用,这样只需使用同一个发射机,先发射一束含有较多光子但不含加载信息的脉冲作为门信号,这个脉冲后的 τ 时刻沿相同方向开始发射含有加载信息的单光子,从而实现前面所述的时间滤波过程,可见 TEM_{20} 模式同样具有使用价值。在进行基于厄米-高斯光束的单光子捕获时,可根据实际情况及所具备的条件进行模式选择。通常情况下,不宜使用 TEM_{30} 及更高模式。而

图 4 基于 TEM_{20} 模式的时间滤波物理模型Fig. 4 Physical model of time filtering based TEM_{20} mode

TEM_{01} , TEM_{02} , TEM_{03} 模式则对应于卫星沿着 y 轴运动时的情况。

4 结 论

对基于厄米-高斯光束单光子捕获概率问题进行了进一步的研究。建立了基于厄米-高斯光束处于 TEM_{20} , TEM_{02} , TEM_{30} , TEM_{03} 及 TEM_{11} 模式下的单光子捕获概率理论模型,通过数值仿真给出了厄米-高斯光束处于不同模式下单光子捕获概率的大小。针对星间激光链路给出了时间滤波的物理模型,并根据该模型分析了各种模式的实际意义及应用价值。此外,模式选择过程以及所引入的时间滤波物理模型是一种一般性的、基础性的分析,可以为量子密钥分配系统的设计提供参考。

参 考 文 献

- 1 C. H. Bennett, G. Brassard. Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing [C]. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer, System and Signal Processing*, 1984. 175~179
- 2 C. Kurtsiefer, P. Zarda, M. Halder *et al.*. A step towards global key distribution [J]. *Nature*, 2002, **419**(6906):450
- 3 M. Furst, T. Schmitt-Manderbach, H. Weier *et al.*. Free-space quantum cryptography for metropolitan areas [C]. *SPIE*, 2006, **6399**:639901
- 4 M. Furst, H. Weier, T. Schmitt-Manderbach *et al.*. Free-space quantum key distribution over 144 km [C]. *SPIE*, 2006, **6399**:63990G
- 5 Tobias Schmitt-Manderbach, Henning Weier, Martin Furst *et al.*. Experimental demonstration of free-space decoy-state quantum key distribution over 144 km [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**(1):010504
- 6 P. Villoresi, T. Jennewein, F. Tamburini *et al.*. Experimental verification of the feasibility of a quantum channel between space and earth [J]. *New J. Phys.*, 2008, **10**:033038
- 7 Zhang Guangyu, Ma Jing, Tan Liying. Theoretical study of single-photon acquisition based on Hermite-Gaussian beams [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2005, **34**(8):1201~1204
张光宇,马晶,谭立英. 基于厄米-高斯光束的单光子捕获理论研究[J]. *光子学报*, 2005, **34**(8):1201~1204
- 8 Zhou Bingkun, Gao Yizhi, Chen Tirong *et al.*. *Laser Principle* [M]. Beijing: Defense Industry Press, 2004. 24~95
周炳琨,高以智,陈侗嵘等. *激光原理*[M]. 北京:国防工业出版社, 2004. 24~95
- 9 Jane E. Nordholt, Richard J. Hughes, George L. Morgan *et al.*. Present and future free-space quantum key distribution [C]. *SPIE*, 2002, **4635**:116~126
- 10 Miao Erlong, Han Zhengfu, Gong Shunsheng *et al.*. Background noise of satellite-to-ground quantum key distribution [J]. *New J. Phys.*, 2005, **7**(1):215
- 11 R. J. Hughes, W. T. Buttler, P. G. Kwiat *et al.*. Free-space quantum cryptography in daylight [C]. *SPIE*, 2000, **3632**:117~126
- 12 W. T. Buttler, R. J. Hughes, P. G. Kwiat *et al.*. Practical free-space quantum key distribution over 1 km [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**(15):3283~3286
- 13 Wang Yusan, Zhang Zhonghua, Lin Dianyang. Opto-

- Electronics Principle and Application [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2005. 70~74
王雨三,张中华,林殿阳. 光电子学原理与应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005. 70~74
- 14 Ji Xiaoling, Chen Senhui, Li Xiaoqing. Polarization properties of partially coherent electromagnetic Hermite-Gaussian beams in atmospheric turbulence [J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(1):67~72
季小玲,陈森会,李晓庆. 部分相干电磁厄米高斯光束通过湍流大气传输的偏振特性[J]. 中国激光, 2008, **35**(1):67~72
- 15 Huang Yinbo, Wang Yingjian. The effect of tracking jitter on the beam spreading induced by atmospheric turbulence [J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2):152~156
黄印博,王英俭. 跟踪抖动对激光湍流大气传输光束扩展的影响[J]. 光学学报, 2005, **25**(2):152~156
- 16 Chen Yan, Hu Yu. Effect of turbulent atmosphere on quantum key distribution systems [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1):21~25
陈彦,胡渝. 湍流大气对量子密钥分布系统性能的影响[J]. 光学学报, 2007, **27**(1):21~25