

文章编号: 0258-7025(2010)12-3060-06

# 一种新的小波变换空间载频条纹相位重建方法

李思坤 苏显渝 陈文静

(四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064)

**摘要** 为了从小波变换系数幅值中得到一种完备的可靠度因子,提出了一种新的子小波定义,并将其应用到空间载频条纹相位重建中。通过提取小波脊处的小波变换系数的相位,提取载频条纹相位信息。利用子小波定义,小波变换脊处的小波变换系数幅值同时包含了载频条纹的调制信息 and 密度信息,能够有效地表示相位提取的可靠度。给出了新子小波定义在空间载频条纹相位重建中应用的严格理论论证,证明了在新子小波定义下的小波变换系数幅值可以作为相位提取的可靠度因子。计算机模拟和实验验证了所提方法的有效性。

**关键词** 条纹分析;小波变换;相位展开;小波脊

中图分类号 O438.2 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL20103012.3060

## A New Wavelet Transform Method for Optical Carrier-Fringe Pattern Phase Reconstruction

Li Sikun Su Xianyu Chen Wenjing

(School of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** In order to get a well reliability parameter, a new daughter wavelet for phase reconstruction of optical carrier-fringe pattern was proposed. The phase of the fringe pattern can be reconstructed from the ridge of the wavelet transform by employing this new daughter wavelet. The modulus of the new wavelet transform coefficients include both the modulation information and fringe density information, which can be treated as a well reliability parameter representing the phase reconstruction. Rigorous mathematical demonstration of this method was given. Theoretical demonstration shows that the modulus can be treated as a reliability parameter of the phase reconstruction. Computer simulation and experiment verify the feasibility of the proposed method.

**Key words** fringe analysis; wavelet transform; phase unwrapping; wavelet ridge

### 1 引 言

基于结构光的空间载频条纹投影技术由于只需要一帧图像就可以记录物体轮廓信息而受到广泛关注。随着数字信号处理技术的发展,傅里叶变换、窗口傅里叶变换、小波变换等相继被应用到空间载频条纹相位分析中,出现了傅里叶变换轮廓术<sup>[1,2]</sup>、窗口傅里叶变换轮廓术<sup>[3,4]</sup>和小波变换轮廓术<sup>[5~10]</sup>。小波变换由于其优秀的多分辨率分析能力和局部化分析能力在处理条纹存在局部不完善和相位突变的情况具有突出优势。由于小波变换的多分辨率分析能力和局部化分析能力来源于小波变换核函数——子小波,所以子小波的定义形式对小波变换系数幅值有很大影响。通常所用的小波变换中子小波有两种定义:一种为以  $1/\sqrt{a}$  归一化的母小波,另一种为以  $1/a$  归一化的母小波 ( $a > 0$  为小波的伸缩因子)。文献[10]以严格的公式推导讨论了这两种子小波定义在空间载频相位分析中应用的区别:第一种子小波定义下得到的小波脊处的小波变换系数的幅值正

收稿日期: 2010-07-05; 收到修改稿日期: 2010-08-26

基金项目: 国家自然科学基金(60838002)资助课题。

作者简介: 李思坤(1982—),男,博士研究生,主要从事光学三维传感和机器视觉等方面的研究。

E-mail: lisk0409@126.com

导师简介: 苏显渝(1944—),男,教授,博士生导师,主要从事光学三维传感与机器视觉、光电信息技术及应用等方面的研究。E-mail: xysu@scu.edu.cn(中国光学学会会员号: 610015)

比于条纹的调制度信息和  $1/\sqrt{f}$  ( $f$  是条纹局部空间频率,反映了条纹密度信息,  $f$  越大条纹越密); 第二种子小波定义下得到的小波脊处的小波变换系数的幅值仅正比于条纹的调制度信息, 不包含条纹密度信息。

小波变换相位分析方法和其他两种方法一样, 最后得到的相位仍然是截断相位, 需要以一定的方法进行相位展开得到其自然相位分布。在现有的相位展开方法中, 以可靠度导向方法效果优异<sup>[11]</sup>。可靠度导向相位展开方法以一个代表了相位提取可靠度的因子引导相位展开路径, 从高可靠度区域向低可靠度区域展开, 可将误差传递限制在最小的程度。傅里叶变换轮廓术中的加权调制度信息是一种常用的可靠度因子, 它同时包含了条纹的调制度信息和密度信息<sup>[11~14]</sup>。调制度大的区域条纹质量好、相位提取可靠度高。和未变形的参考条纹相比较, 变形条纹局部密度变大或者变小的区域表示该区域物体高度变化陡峭, 这些位置处通常相位提取的精度下降。在调制度信息中增加条纹密度信息可以有效减小局部条纹不完备(比如局部条纹过密引起欠抽样、局部条纹丢失引起条纹密度过大以及调制度过低等)造成条纹质量下降, 进而导致的相位提取精度下降, 有利于形成更完备的可靠度模板。傅里叶变换方法中采用汉宁滤波窗对变形条纹图的基频进行加权滤波, 然后对滤出的基频信息做逆傅里叶变换, 加权调制度信息可以方便地从得到的复信号的幅值中获得<sup>[11~14]</sup>。通过加权滤波对接近基频信息的部分赋予较大的权重使得变形条纹相对于参考条纹密度变化小的区域被赋予较大的可靠度因子, 远离基频的成分赋予较小的权重使得变形条纹相对于参考条纹密度变化较大的区域被赋予较小的可靠度因子, 将条纹的密度信息增加到调制度信息中。在两种常用的小波变换中得到的幅值信息都包含了调制度信息, 但是两者均没有把条纹密度信息正确地加入到调制度信息中。而且小波变换方法中并未涉及频谱滤波操作, 不能像傅里叶变换方法中通过加权滤波将条纹密度信息增加到幅值信息中。为了从小波变换幅值中得到一种较完备的可靠度因子, 本文提出了一种新子小波定义, 在该定义下, 小波变换脊处的小波变换系数幅值同时包含了载频条纹的调制度信息和密度信息, 可以作为相位提取可靠度因子指导相位展开, 同时利用该子小波进行小波变换也可以直接用来提取载频条纹相位信息。

## 2 新小波变换定义及其在空间载频条纹相位重建中的应用

光学载频条纹的形式通常为

$$I(x) = A(x) + B(x)\cos\varphi(x) = A_0 + \frac{1}{2}B_0\exp[j\varphi(x)] + \frac{1}{2}B_0\exp[-j\varphi(x)], \quad (1)$$

式中  $\varphi(x)$  为条纹图的相位,  $A(x)$  表示背景光强分布,  $B(x)$  代表调制度,  $A(x)$  和  $B(x)$  相对于载频信息通常是缓慢变化的, 可以分别看作常数  $A_0$  和  $B_0$ 。

对  $I(x)$  的小波变换可以表示为

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x)\psi_{a,b}^*(x)dx, \quad (2)$$

式中  $W(a, b)$  为小波变换系数,  $a > 0$  为和频率有关的伸缩因子,  $b$  代表和位置  $x$  有关的位移因子, “\*” 表示共轭。这里选择空域和频域局部化能力较好的复 Morlet 小波作为母小波, 其常用定义式为

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi F_b}} \exp(j2\pi F_c x) \exp\left(-\frac{1}{F_b} x^2\right), \quad (3)$$

式中  $F_b$  和  $F_c$  分别为母小波的带宽和中心频率。选择常用的子小波定义之一  $\psi_{a,b}(x) = 1/a \psi[(x-b)/a]$ , 首先对未经物体调制的参考条纹图进行小波变换, 提取小波脊处对应的伸缩因子  $a_0$ , 根据文献[10]伸缩因子  $a_0$  和参考条纹图相位梯度  $\varphi'_0(x)$  (也称为角频率) 之间的关系为

$$a_0 = \frac{2\pi F_c}{\varphi'_0(x)}, \quad (4)$$

由(4)式可知, 参考条纹小波变换脊处的伸缩因子  $a_0$  即代表了参考条纹的密度信息。

新的子小波定义为

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{\exp[-(a-a_0)^2]}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (5)$$

对变形条纹  $I(x)$  进行小波变换, 得到

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \psi_{a,b}^*(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_0 \exp[j\varphi(x)] \psi_{a,b}^*(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} B_0 \exp[-j\varphi(x)] \psi_{a,b}^*(x) dx = W_1 + W_2 + W_3 \quad (6)$$

在位置  $b$  处对相位函数  $\varphi(x)$  进行泰勒级数展开

$$\varphi(x) = \varphi(b) + \varphi'(b)(x-b) + \frac{\varphi''(b)}{2!}(x-b)^2 + \dots, \quad (7)$$

对大多数的载频条纹而言,  $\varphi'(b)$  是缓慢变化的, 可以认为  $\varphi''(b) \approx \varphi'''(b) \approx \dots \approx 0$ , 所以可以忽略(7)式中  $(x-b)$  的高阶项。(6)式可进一步写为

$$\begin{cases} W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \psi_{a,b}^*(x) dx \\ W_2 = \frac{1}{2} B_0 \exp[-(a-a_0)^2] \exp\left\{-\left\{\pi F_c \sqrt{F_b} \left[\frac{\varphi'(b)a}{2\pi F_c} - 1\right]\right\}^2\right\} \exp[j\varphi(b)] \\ W_3 = \frac{1}{2} B_0 \exp[-(a-a_0)^2] \exp\left\{-\left\{\pi F_c \sqrt{F_b} \left[\frac{\varphi'(b)a}{2\pi F_c} + 1\right]\right\}^2\right\} \exp[-j\varphi(b)] \end{cases}, \quad (8)$$

为了使母函数具有较大的带宽和满足容许性条件,通常设定  $F_b \geq 1, F_c \geq 1$ , 这时  $W_1 \approx 0$ 。对于载频条

纹图  $\varphi'(b) > 0$ , 所以  $W_3 \approx 0$ 。于是, 变形条纹  $I(x)$  的小波变换变为

$$W(a, b) = \frac{1}{2} B_0 \exp[-(a-a_0)^2] \exp\left\{-\left\{\pi F_c \sqrt{F_b} \left[\frac{\varphi'(b)a}{2\pi F_c} - 1\right]\right\}^2\right\} \exp[j\varphi(b)], \quad (9)$$

将(9)式中小波变换系数幅值  $|W(a, b)|$  对伸缩因子  $a$  求一阶导数, 并令其等于零, 此时

$$a_r(b) = \left| \frac{2\pi F_b F_c \varphi'(b) - 4a_0}{F_b \varphi'(b)^2 - 4} \right|, \quad (10)$$

式中  $a_r(b)$  表示在位置  $b$  处变形光栅小波脊处对应

的伸缩因子, 此时小波变换系数幅值达到最大值, 即为小波脊。因此变形光栅的小波脊处的小波变换系数可以进一步表示为

$$W(a_r, b) = \frac{1}{2} B_0 \exp\{-[a_r(b) - a_0]^2\} \exp\left\{-\left\{\pi F_c \sqrt{F_b} \left[\frac{\varphi'(b)a_r(b)}{2\pi F_c} - 1\right]\right\}^2\right\} \exp[j\varphi(b)], \quad (11)$$

由(11)式可知, 小波脊处的小波变换系数相位信息等于载频条纹的相位。在新子小波定义下, 先对变形条纹进行小波变换, 然后提取小波脊处的变换系数的相位信息就可得到载频条纹的相位信息。

进一步令  $|W(a_r, b)|$  对位置  $b$  的一阶导数为零, 得到在不同位置处满足

$$\varphi'(b) = \frac{2\pi F_c}{a_0} = \varphi'_0(b) \quad (12)$$

时小波脊处的小波变换系数有最大值。这时  $a_r(b) = a_0$ , 即变形条纹局部频率和参考条纹频率相等时幅值达到最大, 最大时等于  $B_0/2$ , 局部频率与参考条纹频率差异越大幅值越小, 即变形条纹密度和参考条纹密度相近处幅值较大, 而变稀疏和稠密的部分为物体轮廓变化剧烈的部分相对应幅值较小。可见条纹密度信息被成功地添加到小波变换系数幅值中。利用新的子小波定义的小波变换得到的小波脊处的小波变换系数幅值同时包含了变形条纹的调制度信息和正确的密度信息, 可以作为一个较完备的相位提取可靠度因子指导相位展开。

纹如图 1(a) 所示, 经过如图 1(b) 所示的相位调制得到的变形条纹如图 1(c) 所示。可见变形条纹的局部频率自左至右逐步增大, 即条纹密度逐渐增大, 在中间位置处变形条纹密度和参考条纹密度相等。

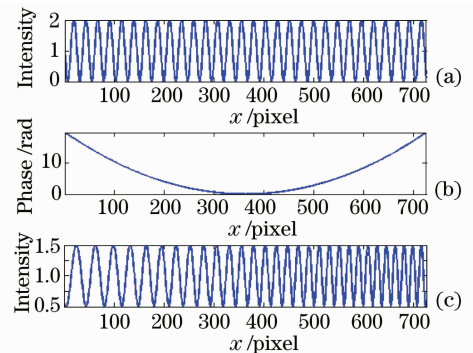


图 1 (a) 模拟参考条纹, (b) 调制相位, (c) 变形条纹  
Fig. 1 (a) Simulated fringe pattern, (b) modulated phase, (c) deformed fringe pattern

首先采用常用的子小波定义对参考条纹进行小波变换(WT), 提取小波脊处对应的伸缩因子。然后利用本文提出的子小波定义对变形条纹进行相位提取, 得到的小波变换系数的幅值如图 2(a) 所示, 在一个确定位置小波变换系数幅值最大处为小波脊。小波变换系数的相位如图 2(b) 所示, 提取小波脊处小波变换系数的相位信息, 并进行相位展开后,

### 3 计算机模拟和实验

通过计算机模拟和实验验证所提方法的正确性。模拟空间频率为  $1/24$ , 调制度  $B_0 = 1$  的参考载频条

减去参考条纹相位后重建的调制相位信息如图 2(c)所示,可见利用本文所提子小波变换定义可

以有效地重建载频条纹图相位信息。

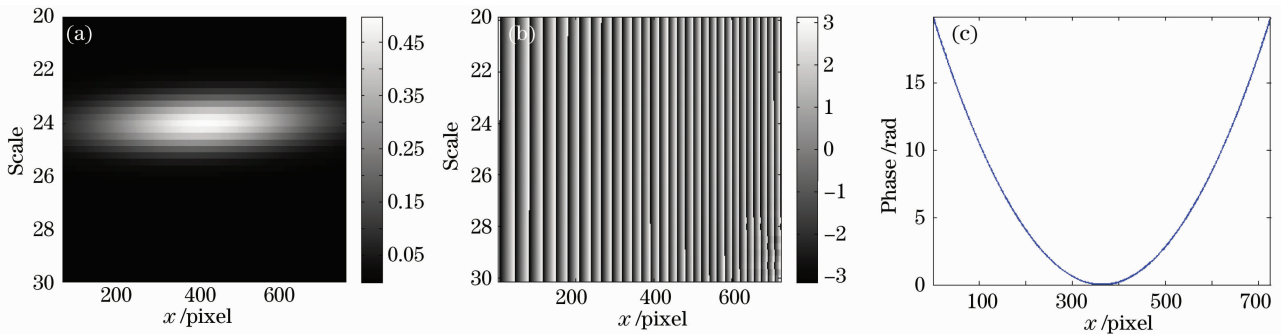


图 2 (a)小波变换系数幅值, (b)小波变换系数的截断相位, (c)重建相位

Fig. 2 (a) Modulus and (b) wrapped phase of the WT coefficients, (c) phase reconstructed

进一步将变形条纹的小波脊处的小波变换系数幅值显示如图 3(a)所示,变形条纹密度和参考条纹密度相等和相近的位置幅值较大,密度变化大的区域幅值较小。根据理论证明的结果,此时幅值最大理论值应为  $B_0/2=1/2$ 。由图 3(a)所示,模拟中小波脊处的小波变换系数幅值最大为  $1/2$ ,和参考条纹相比,密度变化大的区域幅值较小。可见利用新子小波变换定义得到的小波脊处变换系数幅值有效地包含了条纹密度信息和调制度信息,验证了文中理论证明的正确性。图 3(b)为本文所提方法恢复的调制相位点对点误差图。对比图 3(a)和(b),可见利用新子小波定义得到的小波脊处的小波变换系数幅值信息和相位重建误差之间存在相关关系。幅值大的地方误差相对较小,幅值小的地方误差相对较大。所以利用该子小波定义得到的小波脊处的小波变换系数幅值信息可以作为相位重建的可靠度参数。幅值大的地方,相位提取可靠度高,幅值小的地

方,相位提取可靠度低。以此小波变换系数幅值指导相位展开的路径,可以有效地减小误差传递。

进一步以实验验证所提子小波定义在载频条纹图相位提取和相位展开中的有效性。实验中分别以本文所提子小波变换方法和文献[15]中采用的传统子小波方法对变形条纹图相位重建进行对比分析。图 4(a)为实验中拍摄的载频条纹图,条纹图经物体调制变形后,左边条纹变稀疏,右边条纹变稠密。由于图像为  $256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$ ,并且条纹很密,所以经物体调制后很容易引起局部条纹欠抽样。首先利用本文提出的子小波定义对变形条纹图进行小波变换分析。解得的小波脊处的小波变换系数幅值信息如图 4(b)所示,可见条纹密度信息被成功添加到调制度信息中,变稠密和稀疏的位置对应物体边缘和高度变化比较大的区域相位提取可靠度较低、幅值均很小;在物体高度变化很小的区域条纹密度变化较小,相位提取可靠度较高,幅值大。图 4(c)为采用文献[15]所提的以传统子小波变换方法计算得到的小波脊处小波变换系数幅值图,可见物体左侧条纹变稀疏的区域的幅值要比右侧变稠密的幅值大,幅值中包含了不正确的条纹密度信息。图 4(d)和(e)分别为以图 4(b)和(c)为可靠度模板引导相位展开重建的连续相位分布。对比可见,以新子小波计算得到的小波脊处幅值为可靠度模板可更有效地覆盖条纹质量差的区域,以它为可靠度因子引导相位展开路径,可将误差限制在小区域内。图 4(f)为采用逐行展开方法重建的连续相位分布,可见由于没有经过可靠度因子引导,误差沿着展开路径有明显的传递。

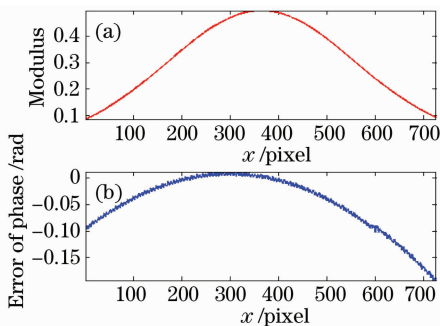


图 3 (a)小波脊处小波变换系数幅值, (b)重建相位误差

Fig. 3 (a) Modulus of the WT coefficients at the ridge position, (b) error of phase reconstructed

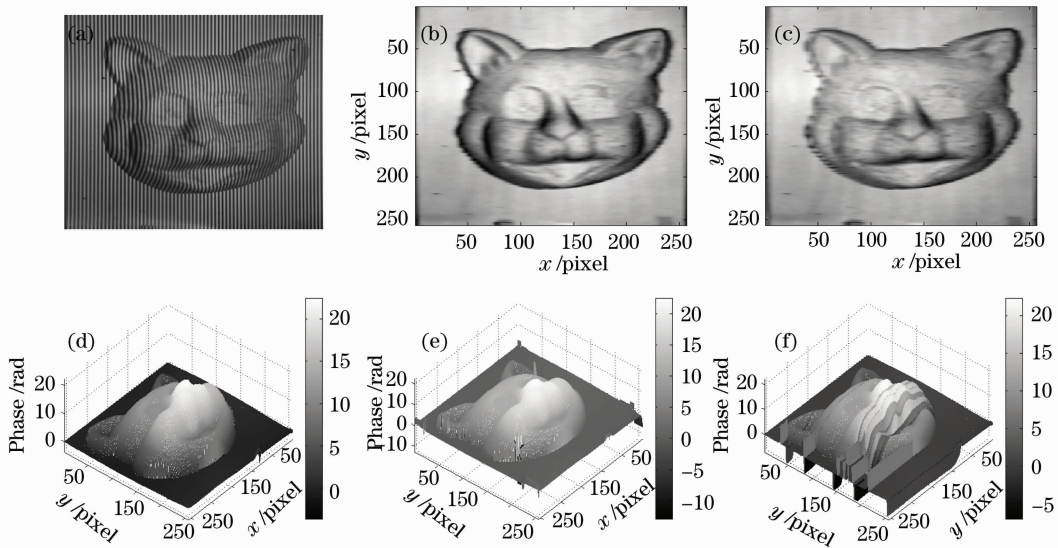


图4 实拍的变形条纹图(a), 利用新子小波(b)和传统的子小波(c)得到的小波脊处小波变换系数幅值和分别以它们为可靠度引导相位展开重建的相位(d)和(e), (f)为逐行展开方法重建的相位

Fig. 4 Real deformed fringe pattern (a), modulus of WT coefficients at the ridge position calculated utilizing the new daughter wavelet (b) and the conventional daughter wavelet (c), (d) and (e) are the unwrapped phase guided by (b) and (c), respectively, (f) unwrapped phase by line

## 4 结 论

提出了一种新的子小波定义, 并通过严格的理论分析证明了其在空间载频条纹图相位提取和相位展开中的有效性。载频条纹的相位信息可以通过小波脊处的小波变换系数相位提取。利用新的小波定义得到的小波变换系数幅值信息包含了条纹的代表条纹质量高低的调制度信息和密度信息, 可以作为一个较完备的相位提取可靠度因子指导相位展开, 减小相位展开过程中的误差传递。计算机模拟和实验都验证了理论分析的正确性和所提方法的有效性。

## 参 考 文 献

- 1 M. Takeda, K. Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement 3-D object shapes [J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(24): 3977~3982
- 2 Zhang Qican, Su Xianyu, Cao Yiping *et al.*. Three-dimensional shape measurement for rotating blade using stroboscopic structured illumination[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(2): 207~211
- 3 张启灿, 苏显渝, 曹益平等. 利用频闪结构光测量旋转叶片的三维面形[J]. *光学学报*, 2005, **25**(2): 207~211
- 3 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Application of dilating labor transform to three-dimensional shape analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(6): 725~729
- 4 翁嘉文, 钟金钢. 伸缩窗口傅里叶变换在三维形貌测量中的应用[J]. *光学学报*, 2004, **24**(6): 725~729
- 4 Q. Kemao. Windowed Fourier transform for fringe pattern analysis[J]. *Appl. Opt.*, 2004, **43**(13): 2695~2702
- 5 Weng Jiawen, Zhong Jingang. Apply wavelet transform to phase

- analysis of spatial carrier-fringe pattern[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(4): 454~459
- 翁嘉文, 钟金钢. 小波变换在载频条纹相位分析法中的应用研究[J]. *光学学报*, 2005, **25**(4): 454~459
- 6 J. Zhong, J. Weng. Phase retrieval of optical fringe patterns from the ridge of a wavelet transform[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(19): 2560~2562
- 7 Sun Juan, Chen Wenjing, Su Xianyu *et al.*. Study the measurement range of wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4): 647~653
- 孙娟, 陈文静, 苏显渝等. 小波变换轮廓术的测量范围研究[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4): 647~653
- 8 Zhou Xiang, Zhao Hong. Three-dimensional profilometry based on Mexican hat wavelet transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, **29**(1): 197~202
- 周翔, 赵宏. 基于 Mexican hat 小波变换的三维轮廓术[J]. *光学学报*, 2009, **29**(1): 197~202
- 9 Li Sikun, Su Xianyu, Chen Wenjing. Applications of two-dimensional wavelet transform on phase analysis of spatial carrier-fringe patterns[J]. *Acta Optica Sinica*, 2010, **30**(6): 1673~1679
- 李思坤, 苏显渝, 陈文静. 二维实小波变换在空间载频条纹相位分析中的应用[J]. *光学学报*, 2010, **30**(6): 1673~1679
- 10 S. Li, X. Su, W. Chen. Wavelet ridge techniques in optical fringe pattern analysis[J]. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 2010, **27**(6): 1245~1254
- 11 X. Su, W. Chen. Reliability-guided phase unwrapping algorithms: a review [J]. *Opt. Lasers Eng.*, 2004, **42**(3): 245~261
- 12 X. Su, L. Xue. Phase unwrapping algorithm based on frequency analysis in Fourier-transform profilometry[J]. *Opt. Eng.*, 2001, **40**(4): 637~642
- 13 Su Xianyu, Tan Songxin, Xiang Liqun *et al.*. Complex object shape measurement using FTP method[J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(9): 1228~1233
- 苏显渝, 谭松新, 向立群等. 基于傅里叶变换轮廓术方法的复杂

- 物体三维面形测量[J]. 光学学报, 1998, **18**(9): 1228~1233
- 14 Li Yong, Su Xianyu. Fast algorithm for reliability-guided phase unwrapping[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2005, **32**(11): 76~79
- 李 勇, 苏显渝. 用于可靠性导向的相位展开的快速算法[J]. 光电工程, 2005, **32**(11): 76~79
- 15 Li Sikun, Chen Wenjing, Su Xianyu. Phase unwrapping guided by amplitude of wavelet ridge coefficients in wavelet transform profilometry[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(4): 715~721
- 李思坤, 陈文静, 苏显渝. 小波变换轮廓术中用小波脊系数幅值引导相位展开的研究[J]. 光学学报, 2008, **28**(4): 715~721