

文章编号: 0258-7025(2010)10-2625-07

喷嘴工件距对激光切缝中气体流场的影响

党东显¹ 盛晓军¹ 胡俊¹ 罗敬文²

(¹ 上海交通大学机械与动力工程学院机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

² 上海团结普瑞玛激光设备有限公司, 上海 200240

摘要 以锥型和收敛型两种典型的会聚型喷嘴为对象,建立了包含工件的激光切割平面对称三维撞击射流模型,采用 N-S 方程积分形式和 RNG $k-\epsilon$ 湍流模型,对辅助气体流场结构进行计算,研究喷嘴工件距对钢板切缝的气体流场影响。发现收敛型喷嘴的切缝气体动力学性能优于锥型喷嘴,且至少存在两个合理的切割区域。最后,进行了激光切割实验和分析。

关键词 激光技术;激光切割;喷嘴;工件距;气体流场

中图分类号 TG485 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103710.2625

Effect of Standoff Distance on Flow Field of Assist Gas in Cutting Slot in Laser Cutting

Dang Dongxian¹ Sheng Xiaojun¹ Hu Jun¹ Luo Jingwen²

(¹ State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

² Shanghai Unity-Prima Limited Corporation, Shanghai 200240, China

Abstract Adopting two typical assemble nozzles which called taper nozzles and convergence nozzles as targets, the three-dimensional and plane symmetrical impinging jet model of laser cutting comprised workpieces is established and the flow field of assist gas is computed by adopting the integral form of N-S equation and RNG $k-\epsilon$ onflow model. The flow structure of assist gas and study the influence of standoff distance on flow field in cutting slot are calculated. The investigation reveals that the dynamics in cutting slot of convergence nozzle is more predominant than that in taper nozzle and at least two reasonable cutting scopes exist to make the assisting gas in cutting slot have predominant dynamic characteristic. In the end, laser cutting experiment and analysis are shown.

Key words laser technique; laser cutting; nozzle; standoff distance; gas flow field

1 引 言

激光切割质量主要受激光束、材料属性、加工工艺以及辅助气体的影响^[1~4]。为了提高切割质量和效率,必须严格设计喷嘴的形状,并对其产生的流场进行分析,良好的辅助气体流场结构不但能在激光切割中提供充足的剪切力以促使熔融金属能及时排除,确保加工质量和效率;同时控制工件的热影响区

在很小的范围内,减少热应力对工件的影响。对于喷嘴的结构对气体流场的影响阮鸿雁等^[5]做了一定的研究,胡俊等^[6]进一步研究了简易折线超音速喷嘴的辅助气体流场的动力学特性。本文从喷嘴工件距出发,对辅助气体的外流场结构,特别是切缝中气体的动力学性能进行研究。研究表明喷嘴工件距对提高切割质量和切割效率有重要影响。

收稿日期: 2009-12-16; **收到修改稿日期**: 2009-12-26

基金项目: 上海市科学技术发展基金登山计划(08111100802)资助课题。

作者简介: 党东显(1987—),男,硕士研究生,主要从事嵌入式数控技术及激光弯曲成形工艺参数方面的研究。

E-mail: ipkq@sjtu.edu.cn

导师简介: 胡俊(1975—),男,博士,副教授,主要从事激光加工工艺与装备等方面的研究。

E-mail: hujun@sjtu.edu.cn

国内外学者对这方面的研究已取得很大成果。郭绍刚等^[7]分析了激光切割的简易折线结构超音速喷嘴辅助气体射流场结构与喷嘴喉部转角的关系,以及发散段长度对射流场状态参数的影响规律。D. Leidinger 等^[8]对锥型喷嘴垂直切割工件时切割缝里气流场的压力和速度分布进行了详细分析,分析结果与拍摄的纹影照片基本相同。D. Leidinger 等^[9]还采用数值仿真分析了传统锥型喷嘴和超音速喷嘴在激光切割中割缝气流场压力梯度和速度分布,并对超音速喷嘴参数的调整对割缝气流场的影响做了进一步分析。O. B. Kovalev 等^[10]论述了亚音速喷嘴激光切割钢板时割缝进口和出口处的流场状况,使用透明玻璃装置设计的实验仪器进行实验,并使用 CCD 成像技术得到的照片与数值仿真的结果进行对比验证。F. Quintero 等^[11]主要研究了偏轴拉瓦尔喷嘴激光辅助气体超音速切割的优化基本原理,并采用纹影成像再现了割缝中气体流场的状况。H. C. Man 等^[12~14]完成了对激光切割过程的解析关系描述和数学模型构造,分析了切割前端曲线的形成、切缝中超音速流场以及切割参数对切割表面质量的影响,特别对超音速射流的激波结构进行了详细的描述。Mai 等^[15]对切割过程中喷嘴的自由射流和撞击射流进行了仿真分析,重点论述了自由射流时马赫盘的形成因素与撞击射流时马赫盘的偏移,并完成了对激光开槽过程中超音速流场结构的分析。

本文采用改进的锥型和收敛型喷嘴,分析了辅助气体平面对称撞击射流过程中气体与工件之间的相互作用情况,讨论了喷嘴与工件之间的距离对切缝中气体动力学性能的影响,研究了气体辅助加工能力随工件与喷嘴距离之间的关系,为切割参数的优化提供了依据。最后,进行了激光切割实验和分析。

2 主控方程与湍流模型

2.1 主控方程

激光切割过程中气体与工件的相互作用采用轴对称射流模型,流场主控方程描述为稳态可压缩雷诺平均 N-S 方程(RANS)。

连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0.$$

动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i u_j) &= \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] &+ \frac{\partial}{\partial x_j}(-\rho u'_i u'_j). \end{aligned} \quad (1)$$

控制方程采用有限体积法离散和求解,无粘通量采用基于 ROE 矢通量分裂的迎风格式,粘性通量采用中心差分,差分格式为二阶精度。

2.2 湍流模型

湍流模型为重正化群(RNG) $k-\epsilon$ 湍流模型^[16,17],在近壁处采用壁面函数进行修正。

RNG 方程为

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k - \rho \epsilon - Y_M, \quad (2)$$

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} G_k - C_{2\epsilon}^* \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (3)$$

式中 G_k 表示湍流动能的产生项,可表示为

$$G_k = -\rho \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (4)$$

由 Boussinesq 假设可知

$$G_k = \mu_\tau S^2, \quad (5)$$

式中

$$\mu_\tau = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Y_M 表示可压缩性产生的修正项

$$Y_M = \rho \epsilon 2M_\tau^2, \quad (6)$$

式中 $M_\tau = \sqrt{k/a^2}$, $a = \sqrt{\gamma RT}$ 。

α_k 和 α_ϵ 分别指 Prandtl 数对 k 和 ϵ 的影响,且 $\alpha_k = \alpha_\epsilon = 1.393$ 。

$$C_{2\epsilon}^* = C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}, \quad (7)$$

式中 $\eta = Sk/\epsilon$, $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$, $C_{1\epsilon} = 1.42$, $C_{2\epsilon} = 1.68$, $C_\mu = 0.0845$ 。

RNG $k-\epsilon$ 湍流模型是应用重整化群的方法导出的,该方法应用对等原理于高斯平衡态,对 ϵ 进行二次展开,大尺度对涡的影响由无序力来描述,应用统计物理中研究相变化的方法逐次消除湍流的小尺度。与标准的 $k-\epsilon$ 二方程湍流模型相比较,RNG $k-\epsilon$ 二方程湍流模型在剪切流和涡流方面的计算准确度有了较大的提高,这里将其引进到三维撞击射流的数值模拟。

3 数值模拟及结果分析

3.1 模拟参数设定

研究对象为锥形喷嘴和收敛型喷嘴等常用的亚

音速型喷嘴,其中锥形喷嘴锥角为 30° ,收敛型喷嘴的收缩段内壁采用抛物线拟合,出口上的点为抛物线最低点。进口直径 $D=2R=6$ mm,出口直径 $d=2r=1.6$ mm,喷嘴总长 $L=6$ mm,平行段长度 $l=3$ mm。

辅助气体与工件之间相互作用描述为平面对称撞击射流过程,能够描述激光切割过程中气体与工件的相互作用关系,网格相应划分为六面体非结构网格,如图 1 所示。以切割厚度 $h_2=1.5$ mm 的碳

钢板为例,实际切割缝宽一般在 $0.5\sim 1.5$ mm 之间,故取切缝宽度 $\Delta d=0.7$ mm;切割不超过 5 mm 的板材时,切割倾角一般在 12° 左右,故可取切割倾角 $\alpha=12^\circ$ 。喷嘴与工件之间的外流场计算域长宽为 $25d\times 12.5d$,高度为喷嘴与工件之间的距离,工件之后的外流场计算域长宽高为 $25d\times 12.5d\times 12.5d$ 。

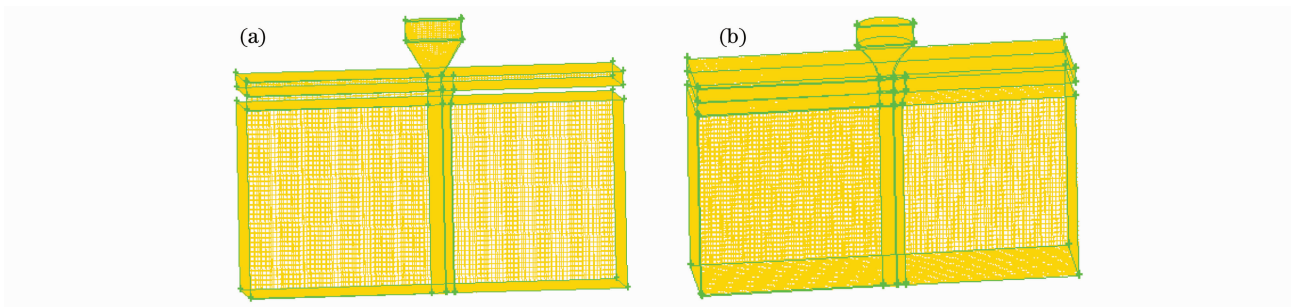


图 1 计算域及网格划分示意图。(a)锥型,(b)收敛型

Fig. 1 Sketch map of calculation region and meshing. (a) taper, (b) convergence

喷嘴工件距 h_1 分别取 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 和 3.0 mm。为了避免在流场中形成强烈的正激波结构,辅助气体滞止压力 P_i 取 3.04×10^5 Pa, P_e 取 1.01×10^5 Pa, P_i 实际是入口绝对总压, P_e 为环境压力。

3.2 结果分析

熔化层金属的去除最终取决于切缝中辅助气体的质量流率、速度和压力,因此评价撞击射流动力学性能的好坏也必须由切缝中的质量流率 \dot{m} ,速度 v 和压力 p 大小决定。定义质量流率为^[1]

$$\dot{m} = \int c_D P_e \sqrt{\left[\left(\frac{2}{RT} \right) \left(\frac{r}{r+1} \right) \left(\frac{2}{r+1} \right)^{2/r-1} \right]} dA_{\text{entry}}. \quad (8)$$

图 2 为喷嘴工件距为 1.0 mm 时两种喷嘴轴线上的静压和速度分布情况,出喷嘴后气流急剧膨胀,压力相应衰减,而速度上升。在工件上表面,收敛型

喷嘴气体压力降为 1.42×10^5 Pa,速度上升到 336.023 m/s;锥型喷嘴气体压力降为 1.33×10^5 Pa,速度上升到 344.699 m/s。工件切缝中,压力和速度梯度大,内部气流的紊流度大,湍流十分剧烈,此时进入锥型喷嘴切缝中气体的质量流率为 4.368×10^{-4} kg/s,进入收敛型喷嘴切缝中气体的质量流率为 4.561×10^{-4} kg/s。在工件下表面,收敛型喷嘴气体压力降为 0.78×10^5 Pa,速度继续上升到 427.41 m/s;锥型喷嘴气体压力降为 0.82×10^5 Pa,速度继续上升到 417.117 m/s。在气体出了切缝之后,压力趋近于环境压力,速度也趋向稳定。无论是从速度还是从质量流率来看,收敛型喷嘴切缝中气体的动力学性能都明显优于锥型喷嘴。图 3 和图 4 分别为喷嘴工件距为 1.0 mm 和 3.0 mm 时收敛型喷嘴对称平面上的压力和速度等值线。喷嘴

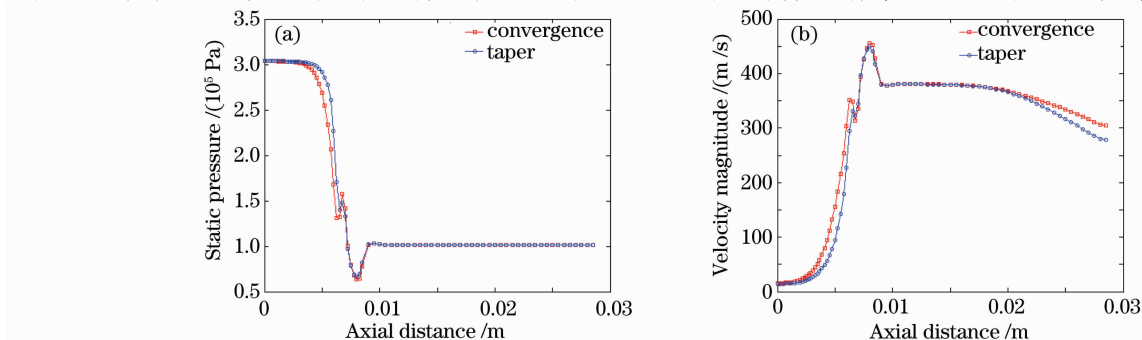


图 2 喷嘴工件距为 1.0 mm 时亚音速喷嘴轴线上的静压(a)和速度(b)分布

Fig. 2 Static pressure (a) and velocity (b) distribution of flow on the axis of subsonic nozzle when standoff distance is 1.0 mm

工件距为 1.0 mm 时,切缝中气体的质量流率为 4.561×10^{-4} kg/s,喷嘴工件距为 3.0 mm 时,切缝

中气体的质量流率为 5.350×10^{-4} kg/s。

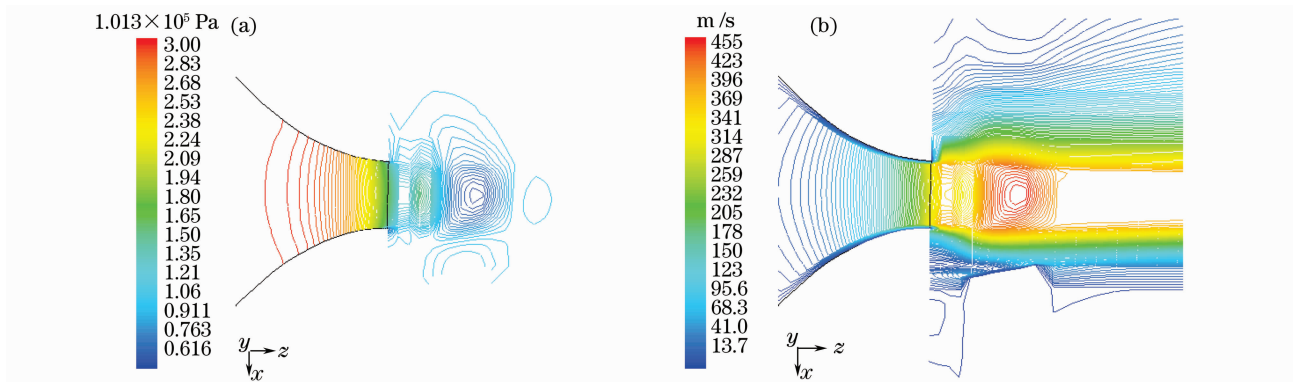


图 3 喷嘴工件距为 1.0 mm 时收敛型喷嘴对称平面上压力(a)和速度(b)等值线

Fig. 3 Isoline of pressure (a) and velocity (b) on symmetry plane of convergence nozzle when standoff distance is 1.0 mm

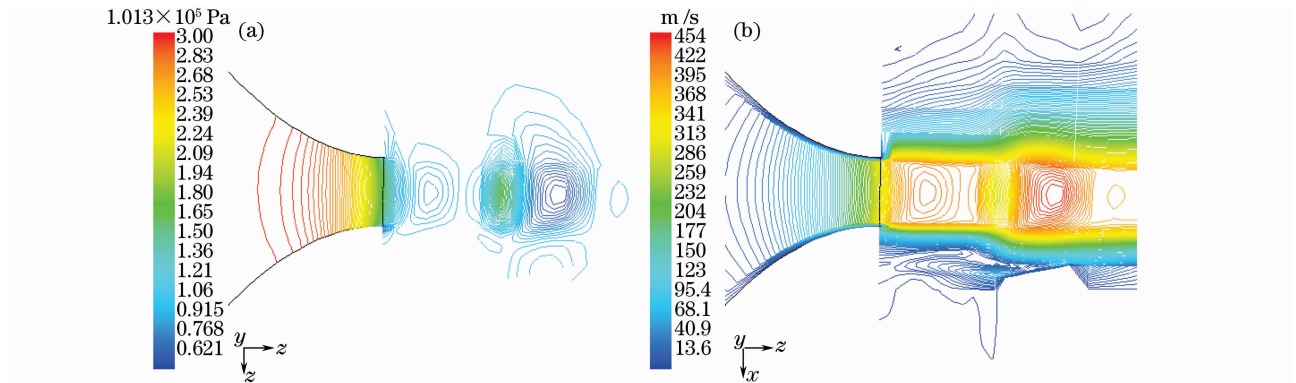


图 4 喷嘴工件距为 3.0 mm 时收敛型喷嘴对称平面上压力(a)和速度(b)等值线

Fig. 4 Isoline of pressure (a) and velocity (b) on symmetry plane of convergence nozzle when standoff distance is 3.0 mm

图 5,6 是不同喷嘴工件距时工件切缝中沿收敛型和锥型喷嘴轴线上各点的静压分布和速度分布。图 7 是不同喷嘴工件距下,切缝轴线上的气体速度平均值。从总体上看,随着喷嘴工件距的增加,切缝中沿轴线上相应位置气体的静压先增大后减小,气体平均速度先减小后增大。在激光加工的实际过程

中,切割性能好坏考虑更多的是切缝中气体的平均速度,图 7 中气体平均速度先减小后增大,这也就说明了随着喷嘴工件距的变化,工件上表面激波的强度也随之变化,切缝中的气体的动力学性能也相应变化,因此至少存在两个合理的切割区域范围。

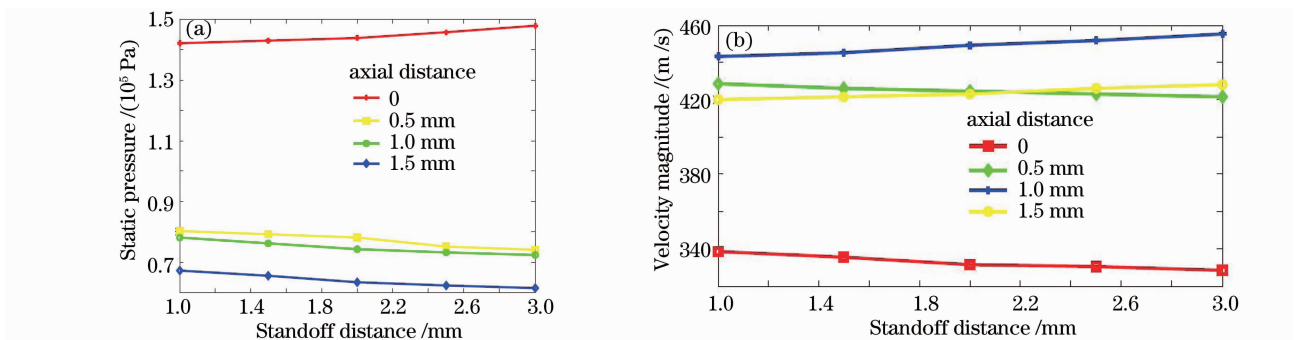


图 5 不同喷嘴工件距时工件切缝中沿收敛型喷嘴轴线上的(a)静压分布和(b)速度分布

Fig. 5 Static pressure (a) and velocity distributing (b) on the axis of convergence nozzle in cutting slot with different standoff distances

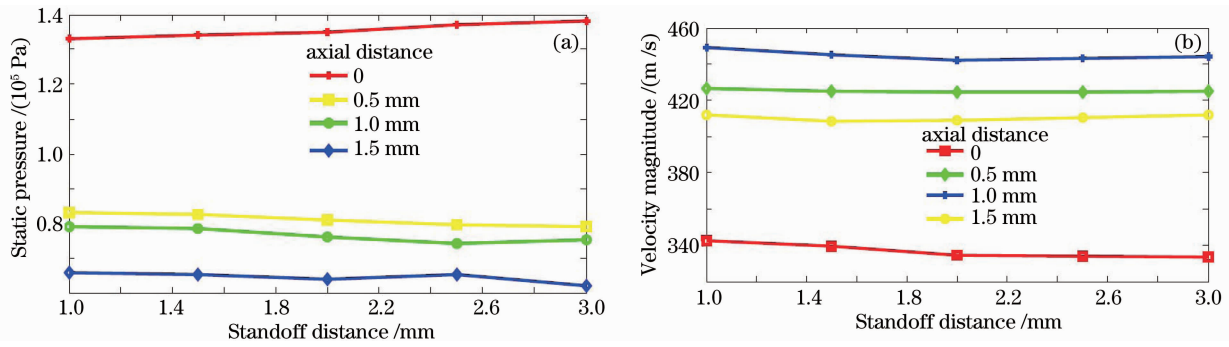


图 6 不同喷嘴工件距时工件切缝中沿锥型喷嘴轴线上的(a)静压分布和(b)速度分布

Fig. 6 Static pressure (a) and velocity distributing (b) on the axis of taper nozzle in cutting slot with different standoff distances

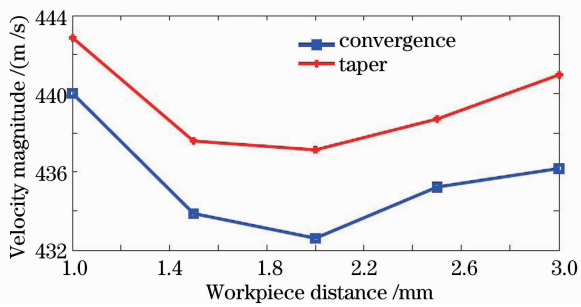


图 7 不同工件距时会聚型喷嘴切缝中沿轴线上气体速度的平均值

Fig. 7 Average gas velocity on the axis of assemble nozzles in kerfs for different stand off distances

由图 8(a),(b)可知,在无论是锥型喷嘴还是收敛型喷嘴,亚音速轴线的压力在工件距为 3 mm 时均比 1 mm 时稍大。产生这种现象的原因是工件上表面的激波强度不同。气流通过的激波强度越大,能量和动量损失就越多,波动后的动力学性能就越差。由图 3(a),4(a)可以看出,工件距为 1.0 mm 和 3.0 mm 时均存在一定的激波,但二者的强度不一样,直观上看就是喷嘴和切缝中的等压线相互影响的程度。在图 4(a)中,工件距为 3.0 mm,工件下移避开了入射斜波与压缩波的直接作用,工件上表面正激波强度相对低,因此使得工件距为 3.0 mm 时切缝中的动力学性能优于工件距为 1.0 mm 时的动力学性能。

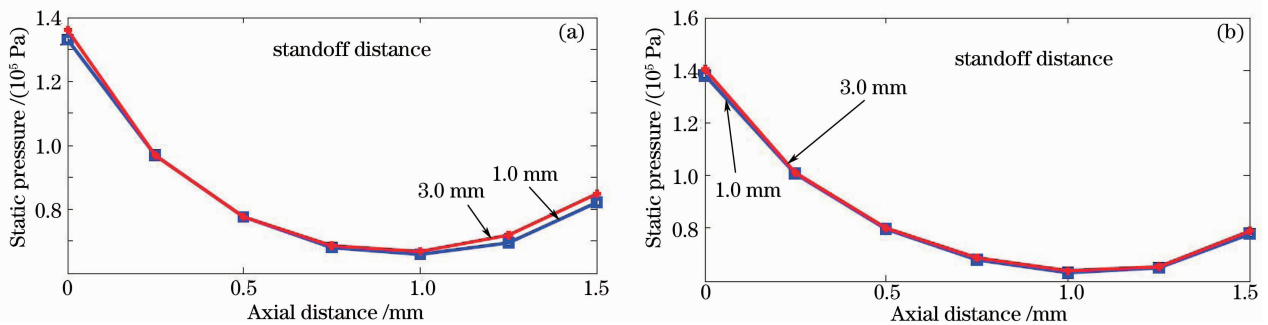


图 8 喷嘴工件距为 1.0 mm 和 3.0 mm 时工件切缝中沿亚音速喷嘴轴线上压力比较。(a)锥型喷嘴,(b)收敛型喷嘴

Fig. 8 Pressure compare of assistant gas on the axis in kerf of subsonic nozzles when stand-off distance is 1.0 mm and 3.0 mm. (a) taper, (b) convergence

4 切割实验与分析

4.1 实验设备

实验采用上海团结普瑞玛公司激光设备有限公司生产的 SLCF 激光切割机,配置 ROFIN 公司 CO₂ 激光器,功率为 2.5 kW。喷嘴分别选用锥型喷嘴和收敛型喷嘴,结构参数如 3.1 节所述。工件是厚度为 2 mm 的碳钢板,牌号为 Q235,辅助气体

为氮气,供气压力为 3.04×10^5 Pa。

4.2 实验结果分析

喷嘴与工件距离 h_1 分别取 1.0,1.5,2.0,2.5 和 3.0 mm,切缝宽度为 0.35 mm,切割速度为 4.0 m/min,采用 Nikon,SMZ1000 型体视显微镜拍摄的切口表面如图 9,10 所示。

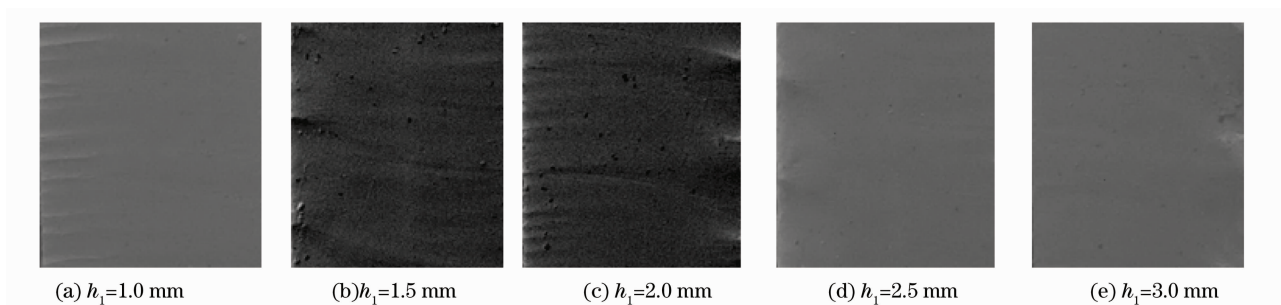


图 9 锥型喷嘴在不同喷嘴工件距时的切口表面形貌图

Fig. 9 Incision surface maps of taper nozzle with different standoff distances

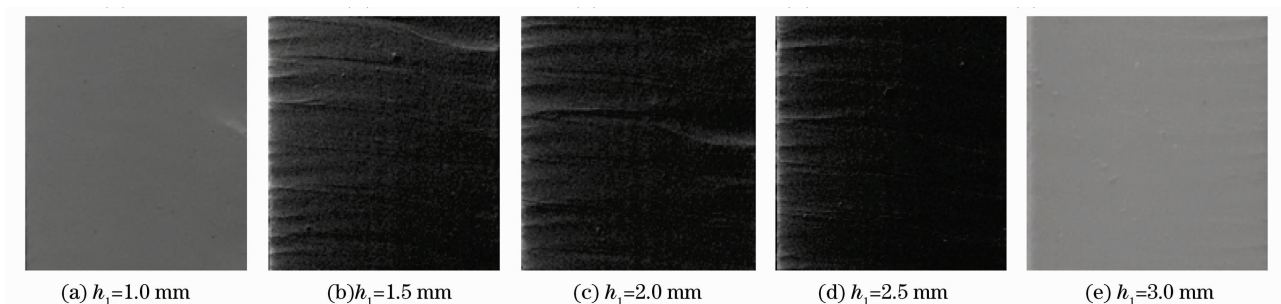


图 10 收敛型喷嘴在不同喷嘴工件距时的切口表面形貌图

Fig. 10 Incision surface maps of convergence nozzle with different standoff distances

图 9,10 分别是锥型喷嘴和收敛型喷嘴不同工件距时切口的表面形貌图。可以看出,相同喷嘴工件距时收敛型喷嘴切割性能明显优于锥型喷嘴,而且两种喷嘴在工件距由 1~3 mm 逐渐增大的过程中,工件切割面的切割质量都经历了“光滑-粗糙-光滑”的变化过程。

表 1 为切口表面粗糙度实测值,图 11 表示表面粗糙度平均值变化趋势。其中锥型喷嘴工件距由

1~2 mm 增大过程中,切口粗糙度由 $0.6 \mu\text{m}$ 增加至 $1.47 \mu\text{m}$,达到最高点;而后工件距由 2~3 mm 逐渐增大的过程中,切口粗糙度下降至 $1.38 \mu\text{m}$ 。收敛型喷嘴与锥型喷嘴切口粗糙度变化趋势相同,这也证明了随着喷嘴工件距的变化,可使工件上面激波的强度减弱,改善切缝中的气体动力学性能,至少存在两个合理的切割区域范围。

表 1 不同工件距时切口表面的粗糙度值

Table 1 Roughness of incision surface with different standoff distances

Serial number	Roughness at upper surface / μm	Roughness at middle surface / μm	Roughness at lower surface / μm	Average roughness / μm
9(a)	0.65	0.55	0.66	0.62
9(b)	1.36	1.05	1.23	1.21
9(c)	1.40	1.46	1.56	1.47
9(d)	0.58	0.94	2.81	1.44
9(e)	0.63	0.53	2.97	1.38
10(a)	0.48	0.52	0.58	0.53
10(b)	0.98	1.06	1.27	1.10
10(c)	1.37	1.35	1.54	1.42
10(d)	0.90	1.01	1.11	1.01
10(e)	0.81	0.83	0.94	0.86

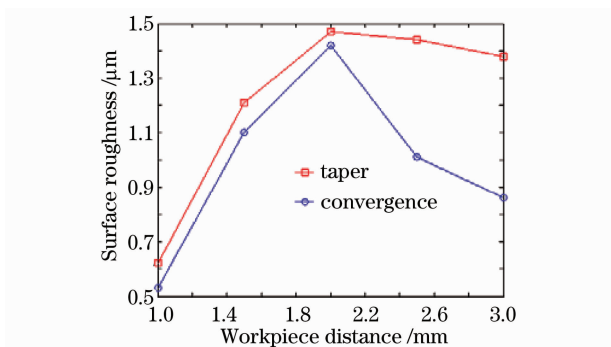


图 11 切口表面粗糙度平均值

Fig. 11 Average roughness in incision surface

5 结 论

以锥型和收敛型两种典型的会聚型喷嘴为对象,建立了包含工件的激光切割平面对称三维撞击射流模型,采用 N-S 方程积分形式和 RNG $k-\epsilon$ 湍流模型,对辅助气体流场结构进行计算,研究喷嘴工件距对钢板切缝的气体流场影响,并进行了激光切割实验和分析,研究结果表明:

1) 喷嘴工件距为 1.0 mm 时,从速度或质量流率判断,收敛型喷嘴切缝中气体的动力学性能明显优于锥型喷嘴。

2) 喷嘴工件距为 3.0 mm 时,能够避开入射斜波与压缩波发生直接相互作用,较低工件上表面的正激波强度,其切缝中气体的动力学性能优于喷嘴工件距为 1.0 mm 的情况。

3) 随着喷嘴工件距的变化,可使工件上面激波的强度较弱,切缝中的气体具有较好的动力学性能,至少存在两个合理的切割区域范围。

参 考 文 献

- Hu Jun, Guo Shaogang, Luo Lei *et al.*. Dynamic characteristic analysis of impinging jet in laser drilling[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(8): 1250~1254
胡俊,郭绍刚,罗磊等.激光穿孔中辅助气体动力学性能分析[J].中国激光,2008, **35**(8): 1250~1254
- Hu Jun, Qiu Mingyong, Guo Shaogang. Effect of gas outlet Mach number on Mach shock in laser cutting[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(11): 1789~1794
胡俊,邱明勇,郭绍刚.激光切割气体出口马赫数对马赫盘的影响[J].中国激光,2008, **35**(8): 1789~1794
- Liao Jianhong, Meng Hongyun, Wang Hongwei *et al.*. Investigation and applications of fiber laser precision cutting system[J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(1): 135~138

- 廖健宏,蒙红云,王红卫等.光纤激光精密切割系统的研制及其应用[J].中国激光,2007, **34**(1): 135~138
- Li Xiangyou, Zeng Xiaoyan. Kerf roughness and quality control of laser precision cutting[J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(2): 176~180
李祥友,曾晓雁.激光精密切割不锈钢模板割缝质量控制[J].中国激光,2002, **A29**(2): 176~180
- Ruan Hongyan, Lü Jianjun, Yang Bo *et al.*. Analysis of flow field for supersonic nozzle in laser cutting[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(5): 1234~1237
阮鸿雁,吕建军,杨波等.激光切割超音速喷嘴的流场特性[J].中国激光,2009, **36**(5): 1234~1237
- Hu Jun, Qiu Mingyong, Yao Zhenqiang. Structural design and assist gas flow analysis of two laser cutting supersonic nozzles[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(4): 1005~1007
胡俊,邱明勇,姚振强.两种激光切割超音速喷嘴结构与辅助气体流场分析[J].中国激光,2009, **36**(4): 1005~1007
- Guo Shaogang, Hu Jun, Luo Lei *et al.*. Analysis of assist gas glow and the structural optimizing for simple supersonic nozzle in laser fusion cutting[J]. *Applied Laser*, 2007, **27**(5): 403~407
郭绍刚,胡俊,罗磊等.激光切割中的简易超音速喷嘴辅助气体流场分析与结构优化[J].应用激光,2007, **27**(5): 403~407
- D. Leidinger, A. Penz, D. Schuöcker *et al.*. Nozzle design and simulation of gas flow for the laser cutting process[C]. *SPIE*, 1994, **2207**: 469~479
- D. Leidinger, D. Schuöcker. Investigations on the gas flow of conic-cylindrical and supersonic nozzles in a laser cut kerf[C]. *SPIE*, 1995, **2502**: 577~582
- O. B. Kovalev, P. V. Yudin, A. V. Zaitsev. Formation of a vortex flow at the laser cutting of sheet metal with low pressure of assisting gas[J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2008, **41**(15): 155112
- F. Quintero, J. Pou, J. L. Ferna' ndez. Optimization of an off-axis nozzle for assist gas injection in laser fusion cutting[J]. *Optics and Lasers in Engineering*, 2006, **44**(11): 1158~1171
- H. C. Man, J. Duan, T. M. Yue. Modeling the laser cutting process; I. mathematical modeling of the cut kerf geometry for the laser fusion cutting of thick metal[J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2001, **34**(14): 2127~2134
- H. C. Man, J. Duan, T. M. Yue. Modeling the laser cutting process; II. distribution of supersonic gas flow field inside the cut kerf[J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2001, **34**(14): 2135~2142
- H. C. Man, J. Duan, T. M. Yue. Modeling the laser cutting process; III. effects of various process parameters on cut kerf quality[J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2001, **34**(14): 2143~2150
- Chingchuan Mai, Jehnming Lin. Supersonic flow characteristics in laser grooving[J]. *Optics & Laser Technology*, 2003, **35**(8): 597~604
- V. Yakhot, S. A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. I. basic theory[J]. *J. Scientific Computing*, 1986, **1**(1): 43~51
- V. Yakhot, S. A. Orszag. Numerical simulation of turbulent flow in the inlet region of a smooth pipe[J]. *J. Scientific Computing*, 1993, **8**(2): 111~121