

文章编号: 0258-7025(2010)10-2533-04

单向链式网络的激光混沌同步

吕翎 李钢* 孟乐 杨明 郭丽 邹家蕊 李春清 柴元

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 辽宁 大连 116029)

摘要 提出了一种实现单向链式网络激光混沌同步的方法。以具有混沌特性的单模激光洛伦茨-哈肯(Lorenz-Haken)系统作为网络的节点,采用单向链式连接构成复杂网络。基于李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性定理,通过构造合适的Lyapunov函数,确定了网络控制输入的具体结构以及实现网络完全同步的条件。研究发现,仅对网络中的一个节点施加控制输入就能使整个网络达到稳定的同步状态。进一步通过仿真模拟验证了理论分析结果的正确性。

关键词 非线性光学;链式网络;混沌同步;Lyapunov稳定性定理

中图分类号 O415.5 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20103710.2533

Synchronization of Chaotic Lasers in Unidirectional Chain-Connection Network

Lü Ling Li Gang Meng Le Yang Ming Guo Li Zou Jiarui Li Chunqing Chai Yuan

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029, China)

Abstract A method of realizing synchronization of chaotic lasers in unidirectional chain-connection network is proposed. The single-mode laser Lorenz-Haken system with chaotic characteristics is taken as node to construct the complex network in unidirectional chain-connection. The appropriate Lyapunov function is constructed, and the structure of control input and the conditions of realizing global synchronization of the network are discussed and confirmed based on Lyapunov stability theory. It is found that the entire network is steady when the control signal is input only one node of the network. Then the correctness of theoretical analysis is verified by the artificial simulation.

Key words nonlinear optics; chain-connection network; chaos synchronization; Lyapunov stability theory

1 引言

混沌具有其运动状态对初值的敏感依赖性以及在状态空间区域上一定程度的遍历性,同时混沌在其相空间内的轨迹含有极其丰富的信息,而且这样的信息是高度不稳定的,所以,它在物理学、信息通信以及自动控制等领域有着广泛的应用,相应的理论研究也得到了迅猛发展^[1~8]。在远程混沌通信系统中,一般情况下混沌信号在传输过程中会产生一定程度的衰减,这种信号振幅和相位的衰减程度会因传输距离的增加而增大,有时甚至会导致信号在终端难以提取。克服这种弊端的一个有效手段是在

远程混沌通信系统中建立混沌中继系统,对混沌信号进行接收和恢复,从而达到理想的信号同步转换效果。从信号的发射直至最后的接收,视传输距离的远近可以设置若干个中继系统,这可以看成是由发射系统、若干个中继系统以及接收系统分别作为节点构成一个链式网络进行信号的同步转换过程。

在利用混沌系统进行远程通信方面,与电路混沌系统、人工神经网络系统等相比,激光混沌系统具有:1)宽带谱能够加密更多的信息;2)光子难以被篡改,因而保密性更强;3)激光具有最小色散和较小衰减等优势,它非常适合于信息的获取、传递、处理、存

收稿日期: 2009-12-28; 收到修改稿日期: 2010-02-28

基金项目: 辽宁省自然科学基金(20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(2008T108)资助课题。

作者简介: 吕翎(1960—),女,教授,主要从事复杂网络混沌同步方面的研究。E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

* 通信联系人。E-mail: lglhc@163.com

储和显示,因此,选择激光混沌系统进行通信,尤其是进行远程通信具有得天独厚的优势。为此,Sun等^[9]进行了 N 个激光器阵列中强度和相位的混沌同步研究;Kusumoto等^[10]利用两个半导体激光器实现了正弦信号的混沌保密通信;Wu等^[11]提出了基于混沌同步的多模激光系统的通信方案;Register等^[12]完成了大规模局域耦合激光阵列的时空混沌同步研究。本文提出了一种实现单向链式网络激光混沌同步的方法。以具有混沌特性的单模激光洛伦茨-哈肯(Lorenz-Haken)系统作为网络的节点,采用单向链式连接构成复杂网络。基于李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性定理,通过构造合适的Lyapunov函数,确定了网络控制输入的具体结构以及实现网络完全同步的条件。

2 网络同步方案的设计

考虑连续型混沌系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态变量, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 。

将 m 个混沌系统(1)作为节点构成复杂网络。网络中第 i 个节点所满足的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}_i(t)] + \rho \sum_{j=1}^m A_{ij} \mathbf{L}(\mathbf{x}_j), \quad (2)$$

式中 $\mathbf{L}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为网络各节点之间的耦合函数, ρ 为耦合强度因子,表示网络节点之间耦合的强弱程度,是一个大于零的常数。为方便计算,不妨取 $\rho = 1$ 。 A_{ij} 表示耦合矩阵 \mathbf{A} 的矩阵元,它的具体表示因网络的连接类型而异,代表网络的拓扑结构。采用单变量单向链式连接,耦合函数 $\mathbf{L}(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_j(t)$, 耦合矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

对于这样一个单向链式网络,仅在网络中的一个节点施加控制输入 $\mathbf{u}(t)$,就能使整个网络达到稳定的同步状态。假设控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 加在单向链式网络的终端,即网络的第 m 个节点上。定义网络节点之间状态变量的误差

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_{i+1}(t) - \mathbf{x}_i(t), (i = 1, 2, \dots, m-1), \quad (4)$$

构造网络的第一个部分 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_1^2, \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\eta}_1 = \mathbf{e}_1$ 。对(5)式求导数,得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \boldsymbol{\eta}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = -\boldsymbol{\eta}_1^2 + \boldsymbol{\eta}_1(\mathbf{e}_1 + \dot{\mathbf{e}}_1) = \\ &= -\boldsymbol{\eta}_1^2 + \boldsymbol{\eta}_1[\mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{e}_2]. \end{aligned} \quad (6)$$

在此基础上,构造第二个部分 Lyapunov 函数为

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_2^2, \quad (7)$$

式中 $\boldsymbol{\eta}_2 = \mathbf{e}'_1 + \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{e}_2$ 。容易证明, V_2 的导数为

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = -\boldsymbol{\eta}_1^2 - \boldsymbol{\eta}_2^2 + \boldsymbol{\eta}_2(\mathbf{e}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \dot{\boldsymbol{\eta}}_2). \quad (8)$$

依此类推,构造的第 i 个部分 Lyapunov 函数的形式为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_i^2, \quad (9)$$

并且

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + \boldsymbol{\eta}_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\sum_{j=1}^i \boldsymbol{\eta}_j^2 + \boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_{i-1} + \boldsymbol{\eta}_i + \dot{\boldsymbol{\eta}}_i). \quad (10)$$

最终,构造整个网络的 Lyapunov 函数

$$V_{m-1} = V_{m-2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{m-1}^2. \quad (11)$$

由(11)式可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m-1} &= \dot{V}_{m-2} + \boldsymbol{\eta}_{m-1} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{m-1} = \\ &= -\sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{\eta}_i^2 + \boldsymbol{\eta}_{m-1}(\boldsymbol{\eta}_{m-2} + \boldsymbol{\eta}_{m-1} + \dot{\boldsymbol{\eta}}_{m-1}) = \\ &= -\sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{\eta}_i^2 + \boldsymbol{\eta}_{m-1}[\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) + \mathbf{u}(t)], \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)$ 是由 $\boldsymbol{\eta}_{m-2}, \boldsymbol{\eta}_{m-1}, \dot{\boldsymbol{\eta}}_{m-1}$ 所表示的关于 \mathbf{x}_i 的函数。当网络控制输入的形式满足

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m), \quad (13)$$

可得

$$\dot{V}_{m-1} = -\sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{\eta}_i^2 \leq 0. \quad (14)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理^[13],整个复杂网络的混沌同步得以实现。

3 仿真实验与讨论

以单模激光 Lorenz-Haken 系统为例进行同步原理的仿真实验。单模激光 Lorenz-Haken 系统的动力学方程为^[14]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - cz, \end{cases} \quad (15)$$

式中状态变量 x 表示激光的电场强度, y 表示激光器工作物质的宏观电极化强度, z 表示激光器工作物质的反转粒子数密度。参量 σ, c 是由工作物质的宏观电极化强度弛豫速率、光场的衰减速率以及反转粒子数密度的弛豫速率决定的, 这里取 $\sigma = 10$, $c = 8/3$ 。参量 r 表示激光器的抽运, 是激光器的控制参量。

由于 Lyapunov 指数是判定系统动力学行为的有效手段, 所以首先计算系统的最大 Lyapunov 指数随控制参量 r 的演化情况, 如图 1 所示。由图 1 可以发现控制参量 $r = 28$ 时系统的最大 Lyapunov 指数大于零, 表明此时系统处于混沌态, 其三维相图如图 2 所示。

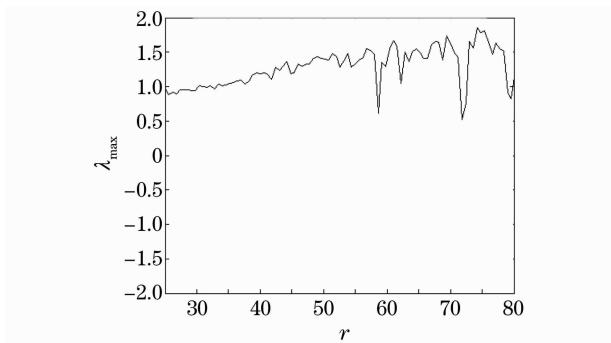


图 1 最大 Lyapunov 指数随参数 r 的演化

Fig. 1 Evolution of maximum Lyapunov exponent with parameters r

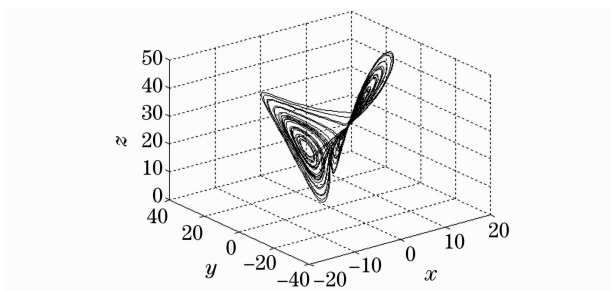


图 2 Lorenz-Haken 系统的相图

Fig. 2 Phase map of Lorenz-Haken system

以(15)式的 m 个单模激光 Lorenz-Haken 系统作为网络节点, 按(2)式的连接构成单向链式网络, 耦合矩阵 \mathbf{A} 取(3)式的形式。仿真实验时, 节点数取 $m = 3$ 。三个节点处单模激光 Lorenz-Haken 系统状态变量分别取 $[x_1(t), y_1(t), z_1(t)]$, $[x_2(t), y_2(t), z_2(t)]$, $[x_3(t), y_3(t), z_3(t)]$ 。网络节点之间的耦合矩阵 \mathbf{A} 的具体表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

网络终端所施加的控制输入的形式为

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} f(x_1) - f(x_3) + \dot{f}(x_1) - \dot{f}(x_2) - e_{11} \\ f(y_1) - f(y_3) + \dot{f}(y_1) - \dot{f}(y_2) - e_{12} \\ f(z_1) - f(z_3) + \dot{f}(z_1) - \dot{f}(z_2) - e_{13} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

在模拟过程中, 网络中各参量值的选择保持不变, 状态变量初始值取 $x_1(0) = 1.2, y_1(0) = 0.5, z_1(0) = -1, x_2(0) = 0, y_2(0) = 1.5, z_2(0) = 1, x_3(0) = -0.5, y_3(0) = 1, z_3(0) = 1$ 。定义网络节点之间状态变量的误差信号 $\mathbf{e}_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13})^T = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)^T, \mathbf{e}_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2)^T$, 仿真模拟这些误差信号随时间的演化结果如图 3, 4 所示。图 3, 4 显示, 整个网络所有节点之间状态变量的误差信号经过一个暂态过程后均趋于零, 网络同步得以实现。此时网络中各节点处状态变量随时间的演化如图 5, 6 所示。图 5, 6 显示, 经过短暂的时间序列后, 网络中各节点所对应的状态变量随时间的演化轨迹完全一致。

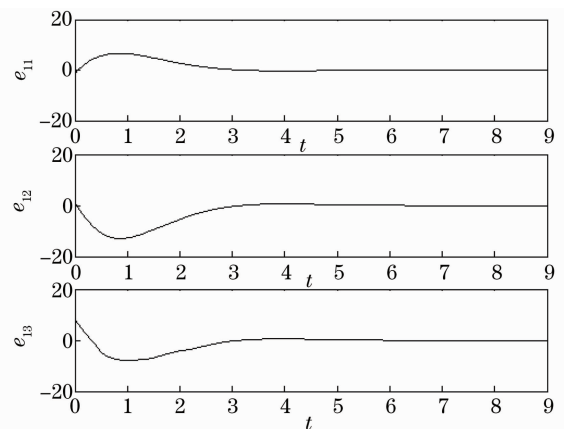


图 3 误差变量 e_1 的时间演化

Fig. 3 Evolution of error variable e_1 with time

4 结 论

研究了单向链式网络的激光混沌同步问题。以 m 个具有混沌特性的单模激光 Lorenz-Haken 系统作为网络的节点, 采用单向链式连接使所有节点建立关联, 构成复杂网络。基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 确定了网络控制输入的具体结构以及实现网络完全同步的条件, 通过仿真模拟验证了这种同步方案的有效性。理论

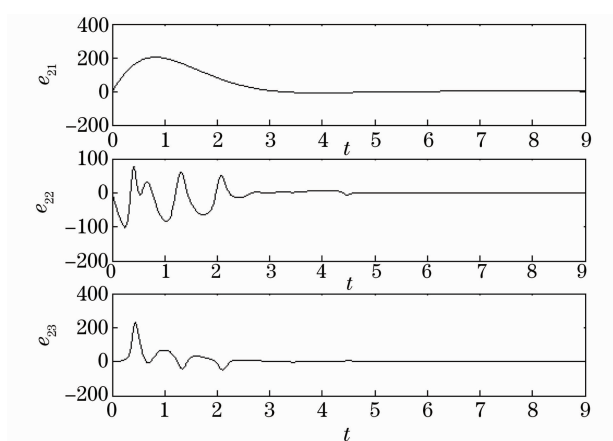
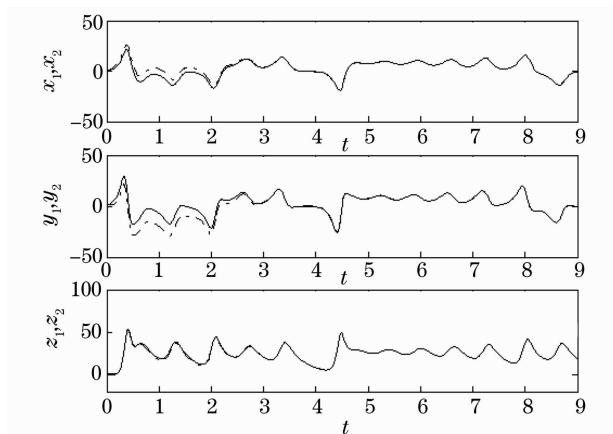
图 4 误差变量 e_2 的时间演化Fig. 4 Evolution of error variable e_2 with time

图 5 节点 1 与 2 状态变量随时间的演化

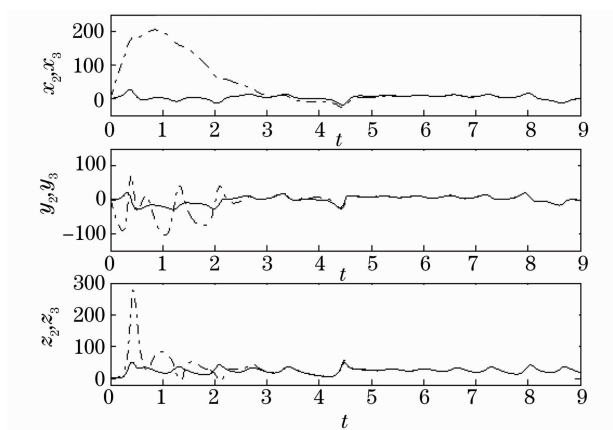
Fig. 5 Evolution of state variable with time
in node 1 and 2

图 6 节点 2 与 3 状态变量随时间的演化

Fig. 6 Evolution of state variable with time
in node 2 and 3

分析和仿真结果表明,在仅仅对网络中的一个节点施加控制输入的情况下,网络中所有节点之间状态变量的误差信号经过一个暂态过程后均趋于零,各节点所对应的状态变量随时间的演化轨迹完全一致,整个网络的完全同步得以实现。

参 考 文 献

- 1 M. T. Yassen. Controlling, synchronization and tracking chaotic Liu system using active backstepping design[J]. *Phys. Lett. A*, 2007, **360**(4-5): 582~587
- 2 L. Lü, L. Luan, Z. A. Guo. Synchronization of chaotic systems of different orders[J]. *Chin. Phys.*, 2007, **16**(2): 346~351
- 3 L. Lü, Z. A. Guo, C. Zhang. Synchronization between two different chaotic systems with nonlinear feedback control[J]. *Chin. Phys.*, 2007, **16**(6): 1603~1607
- 4 Wang Yanbin, Zhang Shenghai, Mi Chaowei *et al.*. Chaotic control in semiconductor laser with time-delayed opto-electronic feedback[J]. *Chinese J. Lasers*, 2009, **36**(8): 1968~1972
王彦斌,张胜海,米朝伟等.延时光电反馈法实现半导体激光器的混沌控制[J]. *中国激光*, 2009, **36**(8): 1968~1972
- 5 S. Brandt, B. K. Dellen, R. Wessel. Synchronization from disordered driving forces in arrays of coupled oscillators[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, **96**(3): 34104~34107
- 6 L. Lü, Y. Li, Z. A. Guo. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in uncertain Gray-Scott system[J]. *Science in China Series G*, 2008, **51**(11): 1638~1646
- 7 S. B. Shim, M. Imboden, P. Mohanty. Synchronized oscillation in coupled nanomechanical oscillators [J]. *Science*, 2007, **316**(5821): 95~99
- 8 A. I. Lerescu, S. Oancea, I. Grosu. Collection of mutually synchronized chaotic systems[J]. *Phys. Lett. A*, 2006, **352**(3): 222~226
- 9 J. Sun, S. Q. Zhu. Synchronization of chaotic intensities and phases in a array of N lasers[J]. *Commun. Theor. Phys.*, 2005, **43**(2): 233~239
- 10 K. Kusumoto, J. Ohtsubo. 1.5 GHz message transmission based on synchronization of chaos in semiconductor lasers[J]. *Opt. Lett.*, 2002, **27**(12): 989~991
- 11 L. Wu, S. Q. Zhu. Communications using multi-mode laser system based on chaotic synchronization[J]. *Chin. Phys.*, 2003, **12**(3): 300~304
- 12 F. Rogister, R. Roy. Spatiotemporal chaos synchronization in a large array of locally coupled nonidentical lasers [J]. *Laser Phys.*, 2005, **15**(2): 313~319
- 13 Lü Ling. *Nonlinear Dynamics and Chaos* [M]. Dalian: Dalian Publishing House, 2000
吕翎. *非线性动力学与混沌* [M]. 大连:大连出版社, 2000
- 14 H. Haken. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers[J]. *Phys. Lett. A*, 1975, **53**(1): 77~78