

基于最小二乘的径向剪切干涉波前重建技术

漆小平 李大海 刘效勇 李洪儒 王琼华

(四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064)

摘要 提出了一种基于最小二乘迭代的环路径向剪切干涉(CRSI)波前重建技术。先将一幅 CRSI 图分割成 4 帧相移子干涉图,然后用最小二乘迭代法计算出干涉图的相位差分布,再根据 CRSI 波前重建算法,由相位差分布求出待测的真实波前。模拟计算表明,该技术重建波前的精度峰谷值(PV)小于 $\lambda/50$,均方根(RMS)小于 $\lambda/300$,并且在实验上得到了验证。该技术解决了基于傅里叶变换(FFT)法的 CRSI 波前重建技术中存在的频谱移中和精度不高的问题,并且只需单幅 CRSI 图即可重建待测波前,可用于光束波前的动态测量。

关键词 测量;径向剪切干涉;最小二乘迭代;波前重建;傅里叶变换法

中图分类号 O436.1 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL200936s2.0168

Wave-Front Reconstruction Technique of Radial Shearing Interferometry Based on Least-Squares

Qi Xiaoping Li Dahai Liu Xiaoyong Li Hongru Wang Qionghua

(School of Electronic and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract A wave-front reconstruction technique of cyclic radial shearing interferometry (CRSI) based on least-squares is proposed. First, it divides a single CRSI figure into four sub-figures and then obtains the phase difference distribution of the interferogram by least-squares iteration. By using the wave-front reconstruction algorithm of CRSI, the real wave-front can be obtained with the phase difference distribution. The simulations show that the accuracy is better than $\lambda/50$ (peak value, PV) and $\lambda/300$ (root mean square, RMS). The feasibility of this technique is experimentally verified. This technique overcomes the problems of spectrum shifting and low precision, which exist in traditional wave-front reconstruction of CRSI based on fast Fourier transformation(FFT). And it can be used to reconstruct wave-front with only one CRSI figure, and also can be used in dynamic measurement of beam wave-front.

Key words measurement; radial shearing interferometry; least-squares iteration; wave-front reconstruction; Fourier transform method

1 引言

目前,相位测量方法比较常用的有:时间相移测量、空间相移测量、傅里叶变换法^[1]等。时间相移法测量精度最高^[2],需要至少 3 帧相移干涉图,因此不适合动态测量过程;空间相移法虽能用于动态测量,但其光路复杂,对探测器要求苛刻,干涉图间需进行相位匹配,因而,其应用也受到了限制;快速傅里叶变换法(FFT)可用于动态测量,且只需单幅干涉图,其缺点是需要进行频谱移中和精度不高。环路径向剪切干涉(CRSI)应用很广泛,可用于近场光强分布的重建^[3]、波前检测等^[4~6]。环路径向剪切干涉波前重建技术一般采用快速傅里叶变换法^[7,8],因此,

在测量上仍存在一定的误差。本文提出了一种基于最小二乘迭代的 CRSI 波前重建技术。首先将一幅载频 CRSI 图分割成 4 帧相移子干涉图,然后用最小二乘迭代法计算出干涉图的相位差分布,再根据 CRSI 波前重建算法,由相位差分布求出待测的真实波前。此技术只需要单幅 CRSI 条纹图,即可精确地重建出待测波前,能用于动态测量。

2 基本原理

2.1 环路径向剪切干涉的基本原理

环路径向剪切干涉的基本原理如图 1 所示。平行光束经过待测元件 E 后形成待测波前,经过分束

基金项目: 国家自然科学基金重大项目(60890203/F050604)资助课题。

作者简介: 漆小平(1986—),女,硕士研究生,主要从事波前检测方面的研究。E-mail: xpin_1201@163.com

导师简介: 李大海(1968—),男,教授,博士,主要从事波前检测、三维立体显示和光学信息处理等方面的研究。

E-mail: dahaili@email.scu.edu.cn

镜 BS 被分成一束反射光和一束透射光,该两束光经开普勒望远系统在相反方向上分别被放大和缩小,然后在分束镜表面汇合,并在其重叠区域产生干涉。其中径向剪切比 $s = f_1/f_2$, f_1 和 f_2 为望远系统两透镜的焦距。

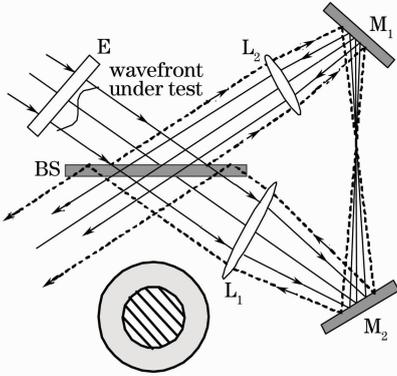


图 1 环路径向剪切干涉原理图

Fig. 1 Principle diagram of cyclic radial shearing interferometry

假设入射光为 $A(x,y)\exp[iW(x,y)]$, 经过 CRSI 后,待测光缩小为 $A(x/s,y/s)\exp[iW(x/s,y/s)]$, 反射光扩大为 $A(xs,ys)\exp[iW(xs,ys)]$ 。在其公共区域形成的干涉条纹的光强分布为

$$I(x/s,y/s) = |A(x/s,y/s)\exp[iW(x/s,y/s)] + A(xs,ys)\exp[iW(xs,ys)]|^2 = A^2(x/s,y/s) + A^2(xs,ys) + 2A(x/s,y/s)A(xs,ys) \times \cos[W(x/s,y/s) - W(xs,ys)], \quad (1)$$

式中 $A(xs,ys)$ 是扩大波前振幅,可近似为一个常数,因此干涉条纹的光强分布变为

$$I(x/s,y/s) = a(x/s,y/s) + b(x/s,y/s) \times \cos[W(x/s,y/s) - W(xs,ys)], \quad (2)$$

式中 $a(x/s,y/s)$ 和 $b(x/s,y/s)$ 分别表示背景光强和条纹调制强度,而 $W(x/s,y/s)$ 和 $W(xs,ys)$ 分别代表缩小和扩大波前相位,若将公共区域两波前之差表示为 $\Delta W(x/s,y/s)$, 则可以得到

$$\Delta W(x/s,y/s) = W(x/s,y/s) - W(xs,ys), \quad (3)$$

由下式可以重建出待测波前^[8]

$$W\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) = \sum_{n=1}^N \Delta W(xs^{2n-1} + ys^{2n-1}) + W(xs^{2N-1} + ys^{2N-1}), \quad (4)$$

式中 N 为正整数。当 N 足够大时,(4) 式右边的最后一项被展成了平面,可以忽略。所以,知道相位差函数 $\Delta W(x/s,y/s)$, 就可恢复出缩小波前 $W(x/s,y/s)$, 即得到了原始波前。传统的提取 CRSI 条纹图中相位差的算法是 FFT 算法,但 FFT 算法存在频谱移中和精

度不高的问题,不能满足精确提取相位差的实际需要。

2.2 基于最小二乘迭代法求剪切干涉图相位差

本文采用了一种基于最小二乘迭代的提取 CRSI 相位差的算法。具体原理如下:

1) 由一幅 CRSI 条纹图获取 4 帧相移子干涉图。

由于使用最小二乘迭代算法来提取相位差时,至少需要 3 帧相移干涉图,因此需要由一幅 CRSI 条纹图获取多帧相移子干涉图。常用 4 帧相移干涉图就能满足精度要求^[9,10], 因此,本文中取 4 帧,具体方法为:

将(2)式中 $x/s,y/s$ 替换成 x,y , 通过将图 1 中的分束镜 BS 稍微倾斜,可在 x,y 方向上加入载频,于是,由(2)式变换得到的 CRSI 条纹图可表示为

$$I(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\cos[2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \Delta W(x,y)], \quad (5)$$

式中 $a(x,y)$ 可近似为常数 a , f_x, f_y 分别表示 x,y 方向上空间载频分布, $\Delta W(x,y)$ 表示待提取的相位差。

因此,(5)式可以简化为

$$I(x,y) = a + b(x,y)\cos[2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \Delta W(x,y)]. \quad (6)$$

将 CRSI 条纹图分割成 4 帧相移子干涉图^[11,12]的方法为:将 CRSI 条纹图中坐标为 $(x = 2k - 1, y = 2k - 1)$ 的像素作为第一帧, $(x = 2k, y = 2k - 1)$ 作为第二帧, $(x = 2k - 1, y = 2k)$ 作为第三帧, $(x = 2k, y = 2k)$ 作为第四帧(k 为正整数)。假设 f_x, f_y 远大于 $a, b, \Delta W$ 的变化频率,则可认为相邻像素间 $a, b, \Delta W$ 保持不变,于是可认为相移子干涉图上对应像素的 $a, b, \Delta W$ 相等。令

$$\varphi(x,y) = \Delta W(x,y) + 2\pi f_x x + 2\pi f_y y$$

则 φ 表示载频干涉条纹图对应的相位,且

$$\varphi(2k,2k-1) - \varphi(2k-1,2k-1) = \delta_x,$$

$$\varphi(2k-1,2k) - \varphi(2k,2k-1) = \delta_y,$$

$$\varphi(2k,2k) - \varphi(2k-1,2k) = \delta_x + \delta_y,$$

式中 δ_x, δ_y 分别是载波引入的相邻像素在 x,y 方向上的相移。假设 $\delta_1 = 0$, 则与第一帧相移子干涉图相比,其他 3 帧子干涉图的相移量分别为 $\delta_2 = \delta_x, \delta_3 = \delta_y, \delta_4 = \delta_x + \delta_y$ 。

用上述方法由一幅 CRSI 条纹图得到 4 帧相移子干涉图后,即可应用最小二乘迭代算法,计算出每帧相移子干涉图的相位分布信息,即得到了 CRSI 的相位分布信息 φ 。以下从 2)~4) 是该最小二乘迭代算法的 3 个步骤。

2) 将相移作为已知量, 一个个像素地迭代, 得到相位分布。

第 i 帧相移子干涉图的强度可以表示为

$$I_{ij}^t = a_{ij} + b_{ij} \cos(\varphi_j + \delta_i), \quad (7)$$

式中上标 t 表示理论值, 脚标 i 表示第 i 帧相移子干涉图 ($i = 1, 2, \dots, M, M$ 表示相移子干涉图的总帧数, 本文中 $M = 4$), j 表示相移子干涉图中第 j 个像素 ($j = 1, 2, \dots, N, N$ 表示像素个数), φ_j 是第 j 个像素的相位值, δ_i 是第 i 帧的相移量。

假设各帧相移子干涉图间的背景光强和调制强度只是像素位置的函数, 即

$$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{Mj}, b_{1j} = b_{2j} = \dots = b_{Mj}.$$

定义一组新变量

$$a'_j = a_{ij}, b'_j = b_{ij} \cos \varphi_j, c'_j = -b_{ij} \sin \varphi_j$$

则(7)式可改写为

$$I_{ij}^t = a'_j + b'_j \cos \delta_i + c'_j \sin \delta_i, \quad (8)$$

容易看出(8)式中包含 $3N$ 个未知量和 MN 个方程, 当 $M \geq 3$ 时, (8)式为一个恰定或者超定方程。令

$$S_j = \sum_{i=1}^M (I_{ij}^t - I_{ij}^e)^2 = \sum_{i=1}^M (a'_j + b'_j \cos \delta_i + c'_j \sin \delta_i - I_{ij}^e)^2, \quad (9)$$

式中 I_{ij}^e 表示各帧相移子干涉图中各点的实际光强, 根据最小二乘原理, 要使 S_j 最小, 必须满足

$$\frac{\partial S_j}{\partial a_j} = 0, \frac{\partial S_j}{\partial b_j} = 0, \frac{\partial S_j}{\partial c_j} = 0, \quad (10)$$

则有

$$\begin{bmatrix} a'_j \\ b'_j \\ c'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \cos^2 \delta_i & \sum_{i=1}^M \cos \delta_i \sin \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \sin \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin^2 \delta_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M I_{ij}^e \\ \sum_{i=1}^M I_{ij}^e \cos \delta_i \\ \sum_{i=1}^M I_{ij}^e \sin \delta_i \end{bmatrix}, \quad (11)$$

如果各帧相移子干涉图的相移量 δ_i 是已知的, 可由(11)式解得相位分布

$$\varphi_j = \tan^{-1}(-c'_j/b'_j). \quad (12)$$

3) 将第二步计算所得的相位分布 φ_j 作为已知量, 一帧帧地迭代得到相移量 δ_i , 这是第二步的逆过程^[9,10]。因此, 可计算得到 a''_j, b''_j, c''_j , 则相移量可表示为

$$\delta_i = \tan^{-1}(-c''_j/b''_j). \quad (13)$$

由(13)式得到的相移量又可作为已知的相移量, 代入到第二步中, 由此迭代运算即可进行下去。第一次迭代时, 需要估计各帧相移子干涉图的初始相移量, 并以此作为已知量来计算相位分布。

4) 收敛判断

每顺序完成前两步迭代运算, 都会得到一组新的相移量, 每次检查一下迭代结果是否满足了收敛准则。经过 k 次迭代运算之后, 如果满足

$$|(\delta_i^k - \delta_i^{k-1}) - (\delta_i^{k-1} - \delta_i^{k-2})| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, M \quad (14)$$

则第 k 次迭代后得到的相位分布和相移量即分别为最终求得的相位分布和相移量。其中 ε 是预先设定的收敛阈值, 可根据实际要求的精度来设定, 本文取 10^{-4} 。若不满足(14)式, 则继续进行迭代, 直到收敛极限得到满足。

5) Zernike 多项式拟合

由上面的推导可以得到包含载频的剪切相位差 φ , 用 Zernike 多项式拟合相位差 φ , 去掉其中的倾斜项, 即可去掉载频, 得到待测剪切相位差 $\Delta W(x, y)$ 。于是, 根据 2.1 阐述的原理, 由(3)式可以重建得到待测波前 $W(x, y)$ 。

3 模拟和实验

3.1 模拟研究

令空域干涉图强度分布为

$$I(x, y) = 150 \exp(-0.35r) + 150 \exp(-0.7r) \times \cos[2\pi(f_x x + f_y y) + \Delta W(x, y)], \quad (15)$$

式中 $\Delta W(x, y)$ 为剪切相位差, 由待测波前 $W(x, y)$ 经过(2)式得到。 $W(x, y)$ 为

$$W(x, y) = 7.94x - 7.15r^2 + 0.68r^4 + 8.22x^2 + 0.2(x^2 r^2) - 4.61(xr^2). \quad (16)$$

(15), (16)式中, 有

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

分辨率为 $P = 256 \text{ pixel} \times 256 \text{ pixel}$, 剪切比 $s = 1/1.4$, 载频 f_x 和 f_y 均为 14。由(15)式所得的原始干涉图如图 2(a)所示, 模拟结果如图 2 所示。

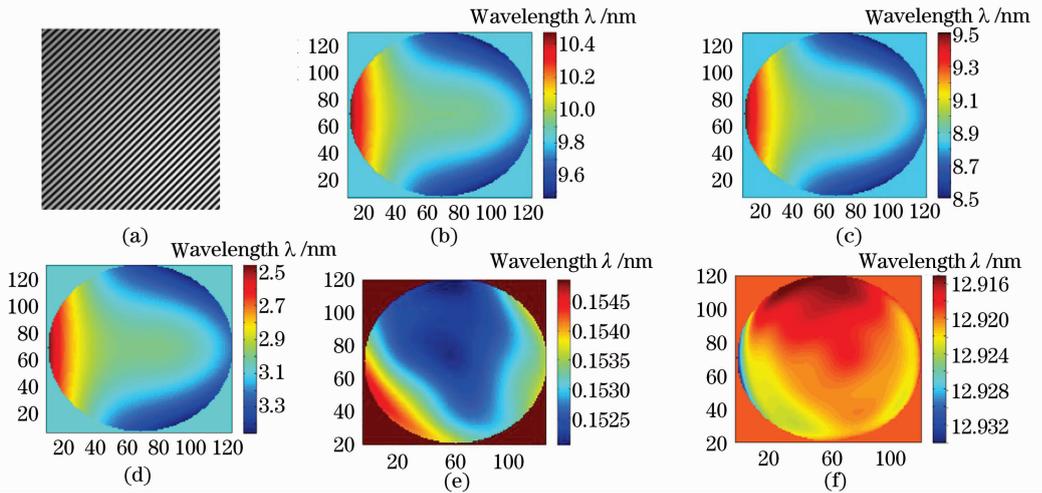


图 2 CRSI 图波前重建的模拟结果。(a)原始干涉图;(b)理论待测波前;(c)本技术重建波前;(d)FFT 重建波前;(e)本技术计算误差;(f)FFT 计算误差

Fig. 2 Simulation results of wave-front reconstruction from CRSI figure. (a) original CRSI figure; (b) theoretical wave-front under test; (c) reconstructed wave-front by our technique; (d) reconstructed wave-front by the FFT technique; (e) reconstruction error of our technique; (f) reconstruction error of the FFT technique

由图 2 中 (b), (c), (d) 可以看出, 该技术和 FFT 重建出的波前形状都与理论波前基本一致, 但精度不同。定量的比较结果如表 1 所示。

表 1 CRSI 图波前重建的模拟结果和误差

Table 1 Simulation results and errors of wave-front reconstruction from CRSI figure

Parameter	Theory	Proposed technique	FFT technique	Error of proposed technique	Error of FFT technique
PV / λ	1.0056	1.0001	0.9889	0.0155	0.0189
RMS / λ	0.154	0.1541	0.1526	0.0032	0.0040

由表 1 可以看出本技术计算得到相位分布峰谷

值(PV)小于 $\lambda/50$, 均方根误差(RMS)小于 $\lambda/300$, PV 值和 RMS 值的误差分别为 0.55% 和 0.065%, 可以认为模拟计算结果与理论值几乎完全吻合。因此, 基于最小二乘的 CRSI 波前重建技术的正确性和高精度在模拟计算中得到了验证, 并且该技术的重建精度高于 FFT 技术。

3.2 实验研究

按图 1 所示设置了实际测试光路, 其中 E 为实际待测元件。待测波前经过开普勒望远镜系统形成的扩大波前和缩小波前在分束镜 BS 表面干涉, 形成干涉条纹。将该实际的 CRSI 条纹图采集下来, 用

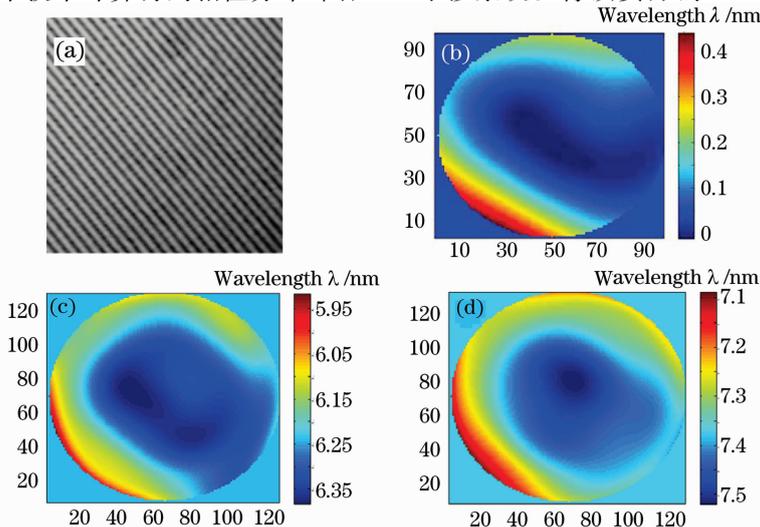


图 3 实验结果比较。(a)实际拍摄的 CRSI 图;(b)ZYGO 测量的结果;(c)本技术的测量结果;(d)FFT 技术的测量结果
Fig. 3 Comparison of experimental results. (a) actual shooting CRSI figure; (b) measured result of ZYGO; (c) measured result of our technique; (d) measured result of the FFT technique

本文基于最小二乘的 CRSI 波前重建技术进行处理,并将得到的结果与 FFT 技术以及 ZYGO 干涉仪测得的数据进行比较,实验结果如图 3。

由图 3 可以看出,该算法重建的面型与 ZYGO 测得的面型基本一致,且本文采用技术重建的面型与 ZYGO 测得的面型的相似程度高于传统 FFT 技术。

表 2 实验结果比较

Table 2 Comparison of experimental results

Parameter	Theory	Proposed	FFT
		technique	technique
PV / λ	0.4508	0.4650	0.4309
RMS / λ	0.0873	0.0810	0.0765

由表 2 可以看出,该技术的重建精度 PV 小于 $\lambda/20$, RMS 小于 $\lambda/100$ 。实验结果是在扣除了系统误差的情况下得到的。由于本技术提取相位时需用到干涉图上每一点的光强进行最小二乘迭代运算,因而对干涉图的随机噪声和干扰信息比较敏感^[11,12]。应用此技术时尽量选用随机噪声和干扰信息比较少的干涉图,并且在用该技术前先对其进行滤波之类的预处理,使其优越性充分发挥出来。

4 结 论

采用基于最小二乘的 CRSI 波前重建技术,结合时间相移技术高精度的优点和傅里叶变换法的优点,解决了基于 FFT 的传统 CRSI 波前重建技术中存在的频谱移中和精度不高的问题。模拟计算表明,该技术的面型重建精度 PV 小于 $\lambda/50$, RMS 小于 $\lambda/300$,高于 FFT 技术的重建精度,并且得到了实验的验证。该技术只需要单幅 CRSI 条纹图即可重建出待测波前,处理速度快,可以用于实时波前检测。由于实际拍摄的干涉图难免有随机噪声,通过将实际拍摄的 CRSI 干涉图进行滤波预处理,再用该技术进行处理,可以在一定程度上增大该技术的适用性,更好地发挥出它的优越性。

致谢 感谢成都精密光学工程研究中心徐建程博士

在研究过程中的交流。

参 考 文 献

- Jiangang Wang, Qing Xiao, Shaoqun Zeng. Dispersion measurements of water with spectral interferometry[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2009, **6**(7): 486~488
- Lü Xiaoxu, Zhong Liyun, Zhang Yimo. Holographic reconstructing algorithm and its error analysis about phase-shifting phase measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(9): 1367~1371
吕晓旭, 钟丽云, 张以谟. 相移相位测量的全息再现算法及测量误差分析补偿[J]. *光学学报*, 2006, **26**(9): 1367~1371
- Dahai Li, Peng Wang, Xiaoshun Li *et al.*. Algorithm for near-field reconstruction based on radial-shearing interferometry[J]. *Opt. Lett.*, 2005, **30**(5): 1~3
- Dong Liu, Yongying Yang, Junmiao Weng *et al.*. Measurement of transient near-infrared laser pulse wavefront with high precision by radial shearing interferometer[J]. *Opt. Commun.*, 2007, **275**(5): 173~178
- Li Dahai, Chen Huaixin, Chen Zhenpei. Utilizing LCTV's phase modulation characteristics to compensate distorted wavefront[J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(7): 614~618
李大海, 陈怀新, 陈祯培. 利用液晶电视的相位调制特性补偿畸变波前[J]. *中国激光*, 2003, **30**(7): 614~618
- Deng Zewei, Ma Xiuhua, Shi Xiangchun. Wavefront sensing technology of high repetition rate heat capacity master oscillator power amplifier system[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(7): 1055~1058
邓泽微, 马秀华, 施翔春. 用于高重复频率热容主振荡功率放大器激光系统的波前检测技术[J]. *中国激光*, 2008, **35**(7): 1055~1058
- Li Dahai, Chen Huaixin, Chen Zhenpei. Simple algorithms of wavefront reconstruction for cyclic radial shearing interferometer [J]. *Opt. Eng.*, 2002, **41**(8): 1893~1898
- Li Dahai, Zhao Xiaofeng, Chen Huaixin *et al.*. Algorithm study of wavefront reconstruction based on the cyclic radial shear interferometer[J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, **14**(2): 223~227
李大海, 赵晓凤, 陈怀新等. 基于循环式径向剪切干涉法的波前重建算法研究[J]. *强激光与粒子束*, 2002, **14**(2): 223~227
- Zhaoyang Wang, Bongtae Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms[J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(14): 1671~1673
- Zhaoyang Wang, Bongtae Han. Advanced iterative algorithm for randomly phase-shifted interferograms with intra- and inter-frame intensity variations [J]. *Optic Laser Eng.*, 2007, **45**(2): 274~280
- Xu Jiancheng, Xu Qiao, Chen Jianping. Spatial-carrier phase-shifting algorithm based on least-squares iteration[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(4): 592~596
徐建程, 许 乔, 陈建平. 基于最小二乘迭代的空载波相移算法[J]. *中国激光*, 2008, **35**(4): 592~596
- Jiancheng Xu, Qiao Xu, Liqun Chai. Iterative algorithm for phase extraction from interferograms with random and spatially nonuniform phase shifts [J]. *Appl. Opt.*, 2008, **47**(3): 480~485