

文章编号: 0258-7025(2009)Supplement 2-0103-05

抗混叠轮廓波变换系数分布模型初探

冯 鹏^{1,2} 魏 彪¹ 米德伶¹ 郑小林²

(¹ 重庆大学光电技术及系统教育部重点实验室, 重庆 400044)
(² 重庆大学生物医学工程博士后流动站, 重庆 400044)

摘要 针对抗混叠轮廓波变换(AACT)系数分布具有相关性的特点,借鉴小波系数模型的研究方法,从抗混叠轮廓波变换系数的层间相关性入手,分别利用条件概率分布、互信息量与互相关系数对其系数统计规律展开定性与定量的研究,并提出一种广义非高斯二元变量统计模型用以描述其系数分布。该模型充分考虑了父系数子带与子系数子带之间的差异,并改进了形状参数 ξ 的求解方法。对 ξ 以及一阶原点矩 $m_{1,1}$ 的初步统计实验表明, $\xi < 1$ 的概率为99.5%, $m_{1,1}$ 的偏差测度的平均值仅为2.77%,说明该模型能够较为准确地描述 AACT 系数的联合分布,为下一步深入研究其系数模型奠定了良好的基础。

关键词 图像处理;系数模型;联合分布;抗混叠轮廓波变换

中图分类号 TP751.1 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL200936s2.0103

Pilot Study of Coefficient Distribution Model of Anti-Aliasing Contourlet Transform

Feng Peng^{1,2} Wei Biao¹ Mi Deling¹ Zheng Xiaolin²

(¹ Key Laboratory of Opto-Electronics Technology and System, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China)
(² Postdoctoral Research Station of Biomedical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract Focused on the coefficients' interscale correlations of anti-aliasing contourlet transform (AACT), a hybrid research method which includes conditional probability, mutual information and mutual correlation and the generalized non-Gaussian bivariate distribution are proposed to model AACT coefficients. This model improves the solution method of shape parameter ξ . Experimental results of ξ and $m_{1,1}$ (moment of order 1) show that the probability of $\xi < 1$ is about 99.5% and the average value of error measurement of $m_{1,1}$ is about 2.77%, which means this model is a good candidate for joint distribution of AACT coefficients.

Key words image processing; model of coefficients distribution; anti-aliasing contourlet transform; joint-distribution

1 引 言

近年来,小波变换在诸多领域中取得了巨大的成功,很大程度上得益于对小波系数分布的准确建模^[1,2]。然而,小波本身存在的缺陷,即小波基不具备各向异性尺度关系,只具有有限的方向性,不是表示图像的最优基^[3],限制了其在图像处理领域的进一步应用和推广。鉴于此,国内外有关学者提出了脊波(ridgelet)变换^[4]、曲波(curvelet)变换^[5]、轮廓波(contourlet)变换^[6]等一系列的多尺度几何分析方法,借以解决小波基方向性缺失这一问题。其中

尤以轮廓波变换备受青睐。轮廓波变换是一种结合拉普拉斯塔型变换(Laplace pyramidal transform, LP 变换)^[7]和方向滤波器组(directional filter banks, DFB)^[8]而实现的低冗余度、多尺度多方向分解算法,它可以看作是曲波变换的一种离散形式。轮廓波基函数满足各向异性尺度关系,能够以接近最优的方式表示图像中的轮廓和边缘等高维奇异性。但是,轮廓波变换同样存在不足:基函数的正则性不够高,空域和频域的局部性尚不甚理想,存在明显的频谱混叠(aliasing)^[9~11]。抗混叠轮廓波变换

基金项目:重庆市自然科学基金(2009BB2188)资助课题。

作者简介:冯 鹏(1981—),男,博士,副教授,主要从事数字图像处理、多尺度几何分析等方面的研究。

E-mail: coe.fengpeng@gmail.com

(AACT)^[12]的出现,可以很好地解决频谱混叠的问题。AACT 是轮廓波变换的一种拓展,它通过构造满足尼奎斯特(Nyquist)抽样定律的低通滤波器及抗混叠塔式滤波器组,就可有效抑制频谱混叠,因而基函数方向选择性更强,能更有效地描述图像中的边缘和纹理特征,应在图像领域有更好的表现或作为。基于此,本文拟借鉴小波领域成熟的系数模型研究方法,将其推广至 AACT 域,以 AACT 系数联合统计分布为切入点,对 AACT 系数的统计规律展开初步研究,并给出相应的参数估计。

2 抗混叠轮廓波变换

抗混叠轮廓波变换由轮廓波变换衍生而来,其目的在于抑制轮廓波变换中所存在的频谱混叠。根据文献[11],轮廓波变换存在频谱混叠的原因就在于 LP 变换中两个低通滤波器不满足 Nyquist 采样定律,致使下采样所产生的混叠将直接带入各方向子带中,从而导致轮廓波基函数的正则性和方向性下降,进而降低了轮廓波对图像的稀疏表达。抗混叠轮廓波变换的分解如图 1 所示。

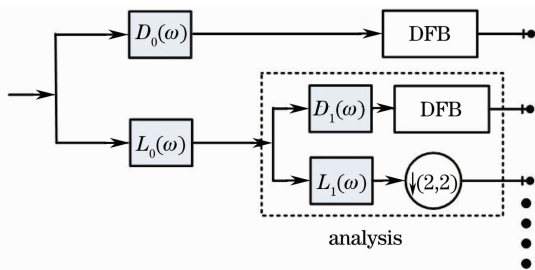


图 1 抗混叠轮廓波变换分解示意图

Fig. 1 Block diagram of AACT's decomposition

可见,为了抑制频谱混叠,AACT 利用了一种新的滤波器组结构,即抗混叠塔式滤波器组(APFB)来替代 LP 变换,以此实现对图像的多尺度分解。与 LP 变换不同的是,在 APFB 中使用了两个不同的滤波器组: $L_0(\omega)$, $D_0(\omega)$ 和 $L_1(\omega)$, $D_1(\omega)$, 并称由 $L_0(\omega)$ 和 $D_0(\omega)$ 组成的滤波器组为 FB1, 而由 $L_1(\omega)$ 和 $D_1(\omega)$ 组成的滤波器组则为 FB2。在 FB1 和 FB2 中,其相对应的滤波器都具有相同的表现形式,但其通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 各不相同。采用文献[12]中提到的 II 型 AACT 变换,其中 $\omega_{p,0/1} = 4\pi/21$, $\omega_{s,0/1} = 10\pi/21$ 。图 2 所示是对 Zoneplate 图像进行 3 层 AACT 分解的各子带系数分布图。

由于 AACT 从轮廓波变换衍生而来,因此图像

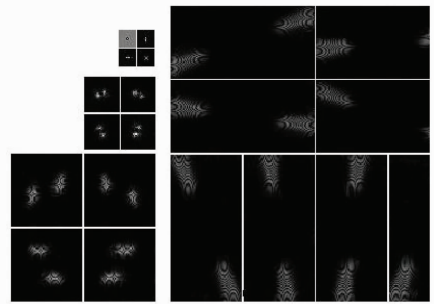


图 2 AACT 分解各子带(Zoneplate)

Fig. 2 Subbands of AACT (Zoneplate)

的 AACT 系数也具有类似轮廓波系数的分布特性^[13]:方向性和聚类性。即,沿同一方向分布的系数聚集在同一方向子带中,一个大系数(白色)周围大部分都是幅值较大的系数,且该系数对应下一子带中相应位置也很有可能是大系数。此表明,AACT 系数中具有一定的层内相关性和层间相关性,而如何有效地利用系数相关性也就成为本文解决问题的关键。

3 联合统计模型

3.1 AACT 系数关系定义

联合统计模型描述相邻子带系数之间的统计关系。为了更好地描述 AACT 系数之间的统计模型,首先定义如下几种系数关系^[13]:对于任一参考系数 X ,定义同一方向子带中与其相邻的 8 个系数为邻居(neighbours)系数 NX ,上一粗糙尺度下相同方向相同位置的系数为父(parent)系数 PX ,而同一尺度下不同方向相同位置的系数为表兄(cousins)系数 CX 。图 3 给出了 AACT 系数与其相邻系数之间的关系示意图。

3.2 系数相关性的定性描述

在小波变换系数分布模型的研究中,条件概率密度函数往往用于衡量小波系数与其相邻系数之间的相关性,因此,将其引入 AACT 域,并利用条件概率密度分布对 AACT 系数的相关性进行定性描述。图 4 画出了 Peppers 图像 AACT 分解相邻系数的条件概率分布 $P(X/PX)$, $P(X/NX)$ 和 $P(X/CX)$, 这里 X 表示方向子带 $y_{2,1}$ 的子带系数, NX 表示 $y_{2,1}$ 中在 X 周围的系数, PX 表示 X 的父系数(即 $y_{3,1}$ 中与 X 处于同一位置的系数), CX 表示 $y_{2,2} \sim y_{2,8}$ 中与 X 处于同一位置的系数。图中横坐标表示 X 的幅值,纵坐标表示 X 的相邻系数幅值,像素亮度表示条件概率,越白,对应的条件概率也就越大。

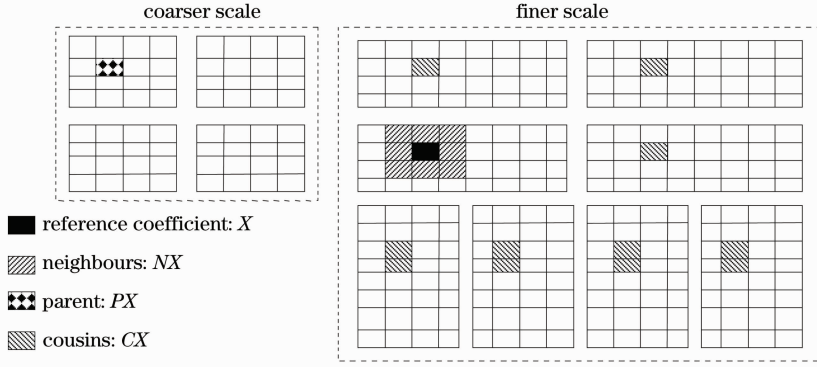


图 3 AACT 系数与其相邻系数关系示意图

Fig. 3 AACT coefficients relationship

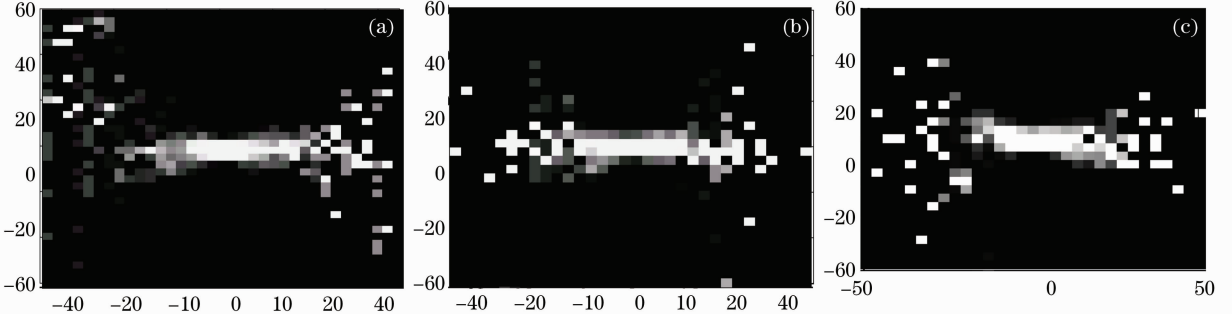


图 4 Peppers 图像子带条件概率分布。(a) $P(X/PX)$ ；(b) $P(X/NX)$ ；(c) $P(X/CX)$

Fig. 4 Condition distribution of one directional subband of Peppers. (a) $P(X/PX)$ ；(b) $P(X/NX)$ ；(c) $P(X/CX)$

从图 4 中可以看出,三种类型的相邻系数的条件概率分布均呈现不规则的领结(bow-tie)形状,这意味着 $P(X/PX) \neq P(X)$, $P(X/NX) \neq P(X)$ 和 $P(X/CX) \neq P(X)$, 否则条件概率应该是带状分布而非领结形。其他子带同样存在类似的分布,这说明 AACT 相邻系数之间存在一定的相关性,并非统计独立的。

3.3 系数相关性的定量描述

文献指出,互信息量和互相关系数可以很好地描述小波系数之间的统计依赖程度。对于两个随机信号 X 和 Y , 它们之间的联合分布概率密度为 $p(x, y)$, $p(x)$ 和 $p(y)$ 分别为 X 和 Y 的边缘分布概率密度,则互相关系数 $\rho(X, Y)$ 和互信息量 $I(X; Y)$ 分别定义为

$$\rho(X, Y) = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{[E(X^2) - E^2(X)][E(Y^2) - E^2(Y)]}}, \quad (1)$$

$$I(X; Y) = E_{X, Y} \left[\ln \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) \ln \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy, \quad (2)$$

(2)式中 $I(X; Y)$ 的值越大,表明随机变量 X 和 Y 的统计依赖程度越高,两者所包含的共同信息也就越多。当 X 和 Y 相互独立,即 $p(x, y) = p(x)p(y)$ 时,互信息量为零。表 1 列出了 5 幅标准图像 AACT 分解后的互信息量及互相关系数。从表中可以看出,5 幅图像都满足 $I(X; CX) < I(X; PX) < I(X; NX)$,这说明空间位置相邻的系数之间的互信

息量最大,子带内的系数相关程度最高,且跨尺度之间 AACT 系数仍然具有一定的相关性。而互相关系数与互信息量反映的信息一致, $|\rho(X; CX)| < |\rho(X; PX)| < |\rho(X; NX)|$, 空间位置相邻系数之间的相关性大于相邻尺度及相邻方向的相关性。换言之,AACT 系数与小波系数一样,都具有聚类性和持续性的特点。

表 1 标准测试图像的互信息量

Table 1 Mutual information of standard test images

Image	Mutual information			Mutual correlation		
	$ I(X, PX) $	$ I(X, NX) $	$ I(X, CX) $	$ \rho(X, PX) $	$ \rho(X, NX) $	$ \rho(X, CX) $
Barbara	0.0990	0.5193	0.0932	0.0926	0.4050	0.0846
Boat	0.1427	0.5824	0.1389	0.0914	0.4794	0.0860
Bridge	0.1697	0.6702	0.1352	0.4671	0.4068	0.0431
Cameraman	0.0976	0.3514	0.0623	0.1124	0.4133	0.0809
Couple	0.1637	0.4457	0.0956	0.1070	0.4368	0.1042

4 广义非高斯二元变量统计模型

由前述可知, AACT 系数分布具有聚类性和持续性, 且其系数的联合概率密度分布具有非高斯、高峰度和长拖尾等特点, 因此, 为了更好地刻画其层间相关性, 采用非高斯二元变量统计模型 (GNBD) 来对其进行逼近。假设有如下的 GNBD 模型

$$f(x, y) = K \cdot \exp(-a \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (3)$$

式中 x, y 分别表示子系数和父系数, 父系数 y 位于 x 的上一粗糙尺度相同方向相同空间位置上, K 和 a 决定概率密度分布函数的形状。式中 $a = \sqrt{3}/\sigma, K = 3/2\pi\sigma^2$ 。为了更准确地对 AACT 系数分布进行建模, 对该模型进行了一定的修正^[10,11], 修正后的广义非高斯二元变量统计模型 (GNBD) 为

$$f(x, y; \sigma_x, \sigma_y, \xi) = Q(\xi, \sigma_x, \sigma_y) \exp\left\{-\left\{\frac{x^2}{[\Theta(\xi)\sigma_x]^2} + \frac{y^2}{[\Theta(\xi)\sigma_y]^2}\right\}^\xi\right\}, \quad (4)$$

式中 $Q(\xi, \sigma_x, \sigma_y)$ 为归一化系数, 且满足

$$\iint_{x, y \in R} f(x, y; \sigma_x, \sigma_y, \xi) dx dy = 1. \quad (5)$$

$\Theta(\xi)$ 是随 ξ 变换的变量, 它使得 σ_x 和 σ_y 等于随机信号 X 和 Y 的均方差。令 $x = \Theta(\xi)r\sigma_1 \cos \theta, y = \Theta(\xi)r\sigma_2 \sin \theta$, 不难得出

$$\Theta(\xi) = \sqrt{2\Gamma(1/\xi)/\Gamma(2/\xi)}, Q(\xi, \sigma_x, \sigma_y) = \frac{\Gamma(2/\xi)\xi}{2\pi\sigma_x\sigma_y\Gamma^2(1/\xi)}, \quad (6)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 表示 gamma 函数, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{s-1} dt$ 。

GNBD 模型中, σ_x, σ_y 为随机变量 X 与 Y 的方差, 可以通过矩法或最大似然法进行估计, 因此关键问题是如何估计 ξ 。利用矩法估计 ξ 。首先计算 $|X||Y|$ 的一阶原点矩 $m_{1,1}$

$$m_{1,1} = \iint_{x, y \in R} |x||y| f(x, y; \sigma_x, \sigma_y, \xi) dx dy, \quad (7)$$

将 $x = \Theta(\xi)r\sigma_1 \cos \theta, y = \Theta(\xi)r\sigma_2 \sin \theta$, 令 $r^{2\xi} = t$, 代入(7)式, 并转化为极坐标, 有

$$m_{1,1} = \iint_{x, y \in R} |x||y| f(x, y; \sigma_x, \sigma_y, \xi) dx dy = 2Q(\xi, \sigma_x, \sigma_y)\Theta^4(\xi)\sigma_x^2\sigma_y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^{2\xi})r^3 dr, \quad (8)$$

所以

$$m_{1,1} = Q(\xi, \sigma_x, \sigma_y)\Theta^4(\xi)\sigma_x^2\sigma_y^2/\xi = 2\sigma_x\sigma_y/\pi. \quad (9)$$

(9)式说明 $|X||Y|$ 的一阶原点矩与 ξ 无关, 因此 ξ 无法通过 $m_{1,1}$ 进行估计, 但 $m_{1,1}$ 可以用来检验 GNBD 模型与变换系数联合概率密度的吻合程度。

同理可得到二阶原点矩 $m_{2,2}$

$$m_{2,2} = \sigma_x^2\sigma_y^2\Gamma(1/\xi)\Gamma(3/\xi)/[2\Gamma^2(2/\xi)], \quad (10)$$

令 $\Phi(\xi) = [2\Gamma^2(2/\xi)]/\Gamma(1/\xi)\Gamma(3/\xi)$, 则有 $\xi =$

$\Phi^{-1}(\sigma_x^2\sigma_y^2/m_{2,2})$ 。式中 Φ^{-1} 为 Φ 的反函数, 可采取双曲线拟合反函数 Φ^{-1} 而后查表的方法得到^[14]。同样 σ_x^2, σ_y^2 和 $m_{2,2}$ 的值由矩法估计。

5 实 验

为验证广义非高斯二元变量统计模型描述

AACT 系数的准确性, 选用 20 幅标准图像作为测试图像, 对其按上述方法进行系数分布建模。图 5 为 20 幅标准图像 AACT 变换系数的广义非高斯二元变量统计模型形状参数 ξ 的直方图, AACT 分解层数为 4 层, 每层分解的方向子带数分别为 [16, 16, 8, 8], 每个方向子带的 ξ 按照上述方法进行估计。由图 5 可以看出, 大部分的 ξ 值集中于 0.2~0.6 之间, ξ 的均值为 0.3727, ξ 大于 1 的概率为 0.5%, 这进一步验证了 AACT 变换系数联合分布的非高斯性。

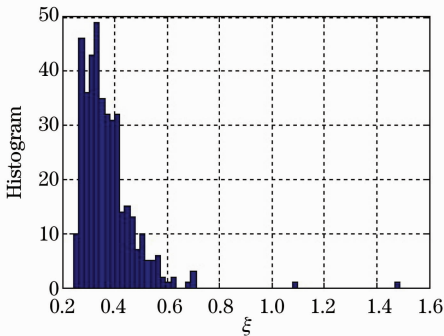


图 5 广义非高斯二元变量模型中 ξ 的直方图分布
Fig. 5 Histogram of ξ in generalized non-Gaussian bivariate model

而由(9)式可知, 一阶原点矩 $m_{1,1}$ 与 ξ 无关, 因此可以用 $m_{1,1}$ 检验广义非高斯二元变量统计模型与变换系数联合分布的吻合程度。定义偏差测度 ϵ 为: $\epsilon = | \hat{m}_{1,1} - m_{1,1} | / m_{1,1} \times 100\%$, 其中 $m_{1,1} = 2\sigma_x\sigma_y/\pi, \hat{m}_{1,1} = \sum_{i=1}^M |x_i y_i| / M$ 。若变换系数的实际联合分布与广义非高斯二元变量模型完全吻合, 则误差测度 $\epsilon = 0$ 。对图像库中的 20 幅图像分别进行 AACT 变换, 求出各子带 X 与 PX 的广义非高斯二元变量模型参数 σ_x, σ_y 及 $\hat{m}_{1,1}$, 再求出偏差测度, 其偏差测度的平均值为 2.77%, 这说明广义非高斯二元变量模型能较为准确地描述 AACT 系数的联合分布。

6 结 论

小波变换在诸多领域中的巨大成功, 很大程度上得益于对小波系数分布的准确建模。与小波系数的分布类似, 抗混叠轮廓波变换系数同样具有聚类特性和持续性, 以及非高斯、高峰度和长拖尾等特点。借鉴小波系数建模的成功经验, 从 AACT 系数的联合统计模型入手, 对 AACT 系数层间相关性进行了定性和定量的分析研究。在此基础上, 利用广义非高斯二元变量分布模型对其进行建模, 并给出

了其相应参数的矩法估计量。通过对形状参数 ξ 以及一阶原点矩 $m_{1,1}$ 的初步统计表明, 该模型能够较为准确地描述 AACT 系数的联合分布, 为下一步深入研究其系数模型奠定了良好的基础。

参 考 文 献

- 1 Yang Fusheng. The Practical Analysis of Wavelet Transform and Its Applications[M]. Beijing: Science Press, 1999
杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999
- 2 S. Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. Yang Lihua Transl., Beijing: China Machine Press, 2003
S. Mallat 著, 杨立华译. 信号处理的小波导引 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2003
- 3 Xiaobo Qu, Jinwen Yan, Guofu Xie *et al.*. A novel image fusion algorithm based on bandelet transform[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(10): 569~572
- 4 Hou Biao, Liu Fang, Jiao Licheng. Linear feature detection based on ridgelet[J]. *Science in China, Ser. E*, 2003, **33**(1): 65~73
侯彪, 刘芳, 焦李成. 基于脊波变换的直线特征检测[J]. 中国科学 E 辑, 2003, **33**(1): 65~73
- 5 E. J. Candès, D. L. Donoho. Continuous curvelet transform: I. resolution of the wavefront set[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2005, **19**(2): 162~197
- 6 M. N. Do, M. Vetterli. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, **14**(12): 2091~2106
- 7 P. J. Burt, E. H. Adelson. The laplacian pyramid as a compact image code[J]. *IEEE Trans. on Communication*, 1983, **31**(4): 532~540
- 8 R. H. Bamberg, M. J. T. Smith. A filter bank for the directional decomposition of images: theory and design[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, **40**(4): 882~893
- 9 Feng Peng, Wei Biao, Pan Yingjun *et al.*. Analysis of frequency aliasing of Contourlet transform based on Laplace pyramidal transform[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(11): 2090~2096
冯鹏, 魏彪, 潘英俊等. 基于拉普拉斯塔型变换的 Contourlet 变换频谱混叠特性分析[J]. 光学学报, 2008, **28**(11): 2090~2096
- 10 Lian Qiusheng, Kong Lingfu. The undecimated Contourlet transform and its application on image denoising[J]. *Chinese J. Scientific Instrument*, 2006, **27**(4): 331~335
练秋生, 孔令富. 非抽样轮廓波变换构造及其在图像去噪中的应用[J]. 仪器仪表学报, 2006, **27**(4): 331~335
- 11 T. T. Nguyen, S. Oraintara. The multiresolution direction filterbanks: theory, design, and applications[J]. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005, **53**(10): 3895~3905
- 12 Y. Lu, M. N. Do. A new contourlet transform with sharp frequency localization [C]. *IEEE International Conference on Image Processing*, 2006, **2**: 1629~1632
- 13 D. D. Y. Po, M. N. Do. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform[J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, **15**(6): 1610~1620
- 14 Wang Taiyue, Li Zhiming. A fast parameter estimation of generalized Gaussian distribution [J]. *Chinese J. Engineering Geophysics*, 2006, **3**(3): 172~176
汪太月, 李志明. 一种广义高斯分布的参数快速估计法[J]. 工程地球物理学报, 2006, **3**(3): 172~176