第 36 卷 中 国 激 光 光学前沿——激光技术及应用
2009 年 6 月 CHINESE JOURNAL OF LASERS 专 刊

文章编号： 0258-7025(2009)Supplement 1-0213-04

1+2 维超高斯型非局域空间光孤子

曾春香[1] 王形华[2]* 谢良星[2] 谢应茂[2]

([1] 赣南师范学院科技学院，江西 赣州 341000；[2] 赣南师范学院物理与电子信息学院，江西 赣州 341000)

摘要 利用变分法研究了 1+2 维超高斯型光束在强非局域非线性介质中的传输特性，得到了 1+2 维超高斯型光束各参量的近似演化方程、一个临界功率及光束各参量的近似演化规律。一般情形下，1+2 维超高斯型光束在强非局域非线性介质中传输时，其束宽按正弦和余弦规律作周期性振荡变化，当初始功率等于临界功率时，其束宽则保持不变，可以得到稳定的 1+2 维超高斯型非局域空间光孤子。另外，经过分析得到临界功率随光束阶次的增大而增大，与相位因子的阶次无关；光孤子的相移快慢与光束阶次、相位因子的阶次、初始功率都有关，但随着光束阶次的升高其主要依赖于光束阶次和初始功率，相位因子的阶次的影响可以忽略。

关键词 非线性光学；非局域空间光孤子；变分法；超高斯型光束；强非局域介质

中图分类号 O437；TN012 **文献标识码** A **doi：** 10.3788/CJL200936s1.0213

1+2-Dimensional Super Gaussian Nonlocal Spatial Soliton

Zeng Chunxiang[1] Wang Xinghua[2] Xie Liangxing[2] Xie Yingmao[2]

([1] *School of Science and Technique*, *Gannan Normal University*, *Ganzhou*, *Jiangxi* 341000, *China*
[2] *School of Physics and Electronic Information*, *Gannan Normal University*, *Ganzhou*, *Jiangxi* 341000, *China*)

Abstract The propagation properties of the 1+2-dimensional super Gaussian shaped optical beam in strongly nonlocal nonlinear media are discussed by means of variational approach. A set of parameter evolution equations, a critical power and an approximate evolution law of the beam width are obtained. In the general case, the beam width of the 1+2-dimensional super Gaussian shaped optical beam in strongly nonlocal media takes periodical oscillating variation with sine and cosine shape. But the beam width remains constant and the spatial optical soliton is formed when the input power equals the critical power. The critical power increases with the order of optical beam, but is independent on the order of phase factor. The speed of phase shift of the spatial optical soliton is related with the order of optical beam, the order of phase factor and the initial power. As the order of optical beam gets higher, the order of optical beam and the initial power plays more important role, and the effect of the order of phase factor can be ignored.

Key words nonlinear optics; nonlocal spatial soliton; variational approach; super Gaussian optical beams; strongly nonlocal media

1 引 言

1997 年 Snyder 和 Mitchell[1] 提出了强非局域模型，在此模型下非局域非线性薛定谔方程(Nonlocal Nonlinear Schrödinger Equation，NNLSE)可以转化为一个线性方程来处理，可以得到空间孤子解，得到了 Shen 的高度评价[2]，由此也掀开了非局域空间光孤子研究的序幕。郭旗等[3]通过对强非局域非线性介质的响应函数作两次泰勒级数展开，每次都取到两阶，使 NNLSE 的非线性项保留到两项不为零项，对 Snyder 和 Mitchell 的模型进行了修正，提出了一种新的强非局域模型，并利用此模型研究傍轴高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性，得到了“大相移”的结果；利用变分法[4]通过对强非局域介质的响应函数作两次泰勒级数展开，每次都取到四阶，使 NNLSE 的非线性项保留到三项不为零项，探讨光束在强非局域介质中的传输特性[5~7]。张涛等[8]在实验上观察了空间光孤子在向列液晶中的传输，找到了不同束宽下形成非局域空

基金项目： 江西省教育厅科技项目(赣教技字[2007]297)资助课题。

作者简介： 曾春香(1965－)，女，实验师，主要从事物理学的教学和研究工作。

* **通信联系人。** E-mail：jxwxh@126.com

间光孤子的临界功率。文献[9]探讨了双曲正割型光束在强非局域介质中的传输特性。对于1+1维超高斯光束在强非局域介质中传输时的特性,有的学者进行了探讨,得到稳定的超高斯型空间光孤子[10]。对于1+2维情形,将具有怎样的传输特性,能否也类似地得到1+2维超高斯型空间光孤子,本文利用变分法对这些问题进行了探讨。

2 光束参量演化方程

在忽略传输损耗的情形下,1+2D NNLSE 可以写为[3,6]

$$\mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi+\rho\varphi\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x-x',y-y')\,|\varphi(x',y',z)|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=0,\tag{1}$$

式中$\varphi(x,y,z)$为傍轴光束的变化函数,$\mu=1/(2k)$,$\rho=kn_2/n_0$,n_0是非线性介质折射率的线性部分,n_2是折射率非线性部分的系数,k为对应于n_0的波数,z为光束传输方向坐标,x,y为横向方向坐标,$R(x,y)$为非局域介质实数响应函数,其满足归一化条件,即$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。由(1)式描述的物理系统的拉格朗日密度函数为[6]:

$$L=L_1+L_2,\tag{2}$$

$$L_1=\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\varphi^*\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\varphi\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\right)-\mu\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right),\tag{3}$$

$$L_2=\frac{1}{2}\rho|\varphi|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x-x',y-y')\,|\varphi(x',y',z)|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',\tag{4}$$

式中φ^*是φ的复数共轭函数,L_1为线性项,L_2为非线性项。假设超高斯型光束在强非局域介质中传输,还能保持超高斯型形式,即假设(1)式的试探解为超高斯型函数

$$\varphi(x,y,z)=A(z)\exp[\mathrm{i}\theta(z)]\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2+y^2}{a^2(z)}\right]^m+\mathrm{i}c(z)(x^2+y^2)^n\right\},\tag{5}$$

式中$A(z)$为复振幅大小,$\theta(z)$为复振幅相位,$a(z)$为束宽,$c(z)$为波前曲率系数,m为超高斯光束的阶数,n为相位因子的阶数[10];当$m=1$,$n=1$时,超高斯光束退化为普通形的高斯光束。初始时,$z=0$,复振幅大小、复振幅相位、束宽、波前曲率系数分别为A_0,θ_0,a_0,c_0。

由变分原理$\delta\iiint L\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$可得$\delta\int L_r\mathrm{d}z=0$,其中:

$$L_r=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}L\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{6}$$

将(5)式代入(3)式后得

$$L_1=-\left[\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}+(x^2+y^2)^n\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}+\frac{\mu m^2(x^2+y^2)^{2m-1}}{a^{4m}}+4\mu n^2c^2(x^2+y^2)^{2n-1}\right]A^2\exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^m\right].\tag{7}$$

将(5)式代入(4)式,并考虑到强非局域模型$a(z)/w_m\gg 1$(w_m是强非局域介质响应函数特征宽度),将$R(x-x',y-y')$在$x'=0$,$y'=0$处作泰勒级数展开取到二阶,并考虑到$R(x-x',y-y')$的轴对称性,含有x',y'的奇次项积分后其值为零,可得

$$L_2=\frac{\pi a^2}{4m}\rho A^2|\varphi|^2\left\{2\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)R(x,y)+\frac{1}{2}a^2\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\left[R^{(2,0)}(x,y)+R^{(0,2)}(x,y)\right]\right\},\tag{8}$$

式中$R^{(2,0)}(x,y)=\left.\frac{\partial^2R(x-x',y-y')}{\partial(x-x')^2}\right|_{x'=0,y'=0}$,$R^{(0,2)}(x,y)=\left.\frac{\partial^2R(x-x',y-y')}{\partial(y-y')^2}\right|_{x'=0,y'=0}$,$\Gamma$为伽马函数。

将(7)式,(8)式代入(6)式,再对$R(x,y)$在$x=0$,$y=0$处第二次作泰勒级数展开取到$R(x,y)$的二阶,$R^{(2,0)}(x,y)$,$R^{(0,2)}(x,y)$分别用$R^{(2,0)}(0,0)$,$R^{(0,2)}(0,0)$近似代替,并考虑到$R(x,y)$的轴对称性,含有x,y的奇次项积分后其值为零,且$R^{(2,0)}(0,0)=R^{(0,2)}(0,0)$,可得

$$L_\mathrm{r}=-A^2\frac{\pi a^2}{m}\frac{1}{\xi_1}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}-A^2\frac{\pi a^{2n+2}}{m}\frac{1}{k_1}\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}-\mu\pi mA^2-4n^2\mu c^2A^2\frac{\pi a^{4n}}{m}\frac{k_2}{k_1}+\frac{\pi^2a^4}{2m^2}\rho A^4\left(\frac{R_0}{\xi_1^2}-\frac{\gamma a^2}{\xi_1\xi_2}\right),\tag{9}$$

式中 $R_0=R(0,0)$，$\gamma=-R^{(2,0)}(0,0)=-R^{(0,2)}(0,0)>0$（因 R_0 是 R 的最大值），$\xi_1=1/\Gamma(1/m)$，$\xi_2=1/\Gamma(2/m)$，$k_1=1/\Gamma[(n+1)/m]$，$k_2=\Gamma(2n/m)/\Gamma[(n+1)/m]$。由变分原理可得 $\delta L_r/\delta p_i=0$，即

$$\frac{\delta L_r}{\delta p_i}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial L_r}{\partial(\partial p_i/\partial z)}\right]-\frac{\partial L_r}{\partial p_i},\tag{10}$$

式中 p_i 为光束参量 θ,c,A,a。将(9)式代入(10)式，并整理可得：

$$A=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{mP_0\xi_1}{\pi}},\tag{11}$$

$$\frac{da}{dz}-4n\mu ca^{2n-1}k_2=0,\tag{12}$$

$$\frac{dc}{dz}-\frac{\mu}{a^{2n+2}}\frac{m^2}{n}k_1+4n(2n-1)\mu c^2a^{2n-2}k_2+\frac{\rho\gamma k_1P_0}{2n\xi_2a^{2n-2}}=0,\tag{13}$$

$$\frac{d\theta}{dz}+\frac{\mu m^2(n+1)}{na^2}\xi_1-4n(n-1)\mu c^2a^{4n-2}\frac{k_2}{k_1}\xi_1-\rho R_0P_0+\frac{(2n-1)\rho\gamma\xi_1P_0}{2n\xi_2}a^2=0,\tag{14}$$

式中 $P_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x,y,z)|^2dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x,y,0)|^2dxdy$，为光束初始输入功率。(11)式～(14)式即为 1+2 维超高斯光束在具有轴对称强非局域非线性介质中传输时各参量的演化方程。

3 光束各参量的演化规律

引入束宽归一化参量 $h=a/a_0$，由(12)式，(13)式可得

$$\frac{d^2h}{dz^2}=\frac{4\mu^2}{a_0^4h^3}m^2k_1k_2-\frac{2\mu\rho P_0\gamma k_1k_2}{\xi_2}h.\tag{15}$$

令(15)式的右边等于零，可以得到一个临界功率[3,6]

$$P_{0c}=2\mu m^2\xi_2/(a_0^4\rho\gamma).\tag{16}$$

设光束从光腰处入射，有 $dh/dz|_{z=0}=0$，(15)式可以进一步变为

$$\left(\frac{dh}{dz}\right)^2=\frac{\lambda_2}{h^2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-h^2\right)(h^2-1),\tag{17}$$

式中 $\lambda_1=4\mu^2m^2k_1k_2/a_0^4$，$\lambda_2=2\mu\rho P_0\gamma k_1k_2/\xi_2$。求解(17)式可得

$$h^2=[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)],\tag{18}$$

或

$$a^2=a_0^2[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)],\tag{19}$$

式中 $\beta=\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{2\mu\rho P_0\gamma k_1k_2/\xi_2}$；$\lambda=\lambda_1/\lambda_2=P_{0c}/P_0$。将(19)式代入(11)式，(13)式，(14)式可得

$$A=\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{m\xi_1P_0}{\pi[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)]}},\tag{20}$$

$$\theta=-\frac{m(n+1)\xi_1}{2n\sqrt{k_1k_2}}\arctan[\sqrt{\lambda}\tan(\beta z)]+\frac{a_0^2(n-1)\xi_1(\lambda_1-\lambda_2)}{32n\mu k_1k_2\sqrt{\lambda_1}}+\{2\sqrt{\lambda_1}z+\arctan[\sqrt{\lambda}\tan(2\beta z)]\}+$$
$$\rho R_0P_0z+\frac{(2n-1)\rho\gamma\xi_1}{2n\xi_2}P_0a_0^2\left[\frac{(\lambda+1)z}{2}-\frac{(\lambda-1)\sin(2\beta z)}{4\beta}\right],\tag{21}$$

$$c=\frac{\beta(\lambda-1)\sin(2\beta z)}{8n\mu k_2a_0^{2n-2}[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)]^n}.\tag{22}$$

(19)式～(22)式即为 1+2 维超高斯型光束在强非局域非线性介质中传输时光束各参量的演化规律。

4 结果讨论与分析

4.1 1+2 维超高斯型空间光孤子

当光束初始功率等于临界功率，且光束从光腰处入射时，$P_0=P_{0c}$，$\lambda=1$；由(19)式～(22)式可知，$a=a_0$；$A=\sqrt{mP_{0c}\xi_1/\pi}/a_0$，$\theta=[-\mu m^2(n+1)\xi_1/(na_0^2)+P_{0c}\rho R_0+(2n-1)P_{0c}\rho\gamma\xi_1a_0^2/2n\xi_2]z$；$c=0$；光束在传输过程中，具有平面波波前，除产生一个相移外，光束束宽保持不变，得到 1+2 维超高斯型非局域空间光孤子。

4.2 1+2维高斯型空间光孤子

令 $m=1, n=1$，超高斯光束退化为普通高斯光束，此时 $\xi_1=\dfrac{1}{\Gamma(1)}=1, \xi_2=\dfrac{1}{\Gamma(2)}=1, k_1=\dfrac{1}{\Gamma(2)}=1$，$k_2=\dfrac{\Gamma(2)}{\Gamma(2)}=1$。(11)式～(14)式变为

$$A=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{P_0}{\pi}}, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}z}-4\mu ca=0, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}-\frac{\mu}{a^4}+4\mu c^2+\frac{\rho\gamma P_0}{2}=0, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}+\frac{2\mu}{a^2}-\rho R_0 P_0+\frac{\rho\gamma P_0}{2}a^2=0. \tag{26}$$

(19)式～(22)式变为

$$A=\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{P_0}{\pi[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)]}}, \tag{27}$$

$$\theta=-\arctan[\sqrt{\lambda}\tan(\beta z)]+\rho R_0 P_0 z+\frac{\rho\gamma}{2}P_0 a_0^2\left[\frac{(\lambda+1)z}{2}-\frac{(\lambda-1)\sin(2\beta z)}{4\beta}\right], \tag{28}$$

$$c=\frac{\beta(\lambda-1)\sin(2\beta z)}{8\mu[\cos^2(\beta z)+\lambda\sin^2(\beta z)]}, \tag{29}$$

当光束初始功率等于临界功率，且光束从光腰处入射时，$P_0=P_{0c}, \lambda=1$，有 $a=a_0, A=\sqrt{P_{0c}/\pi}/a_0$；$\theta=[-2\mu/a_0^2+P_{0c}\rho R_0+P_{0c}\rho\gamma a_0^2/2]z$；$c=0$。得到1+2维高斯型非局域空间光孤子，其结果与文献[3]得到的结果一致。

4.3 临界功率与光束阶次的关系

由(16)式可知 $P_{0c}=2\mu m^2/[a_0^4\rho\gamma\Gamma(2/m)]$，表明产生1+2维超高斯型非局域空间光孤子的临界功率随光束阶次 m 的增大而增大，与相位因子的阶次 n 无关。分析其原因，这是因为光束阶次 m 反应了光束边沿的锐度，m 增大表示光束边沿的锐度增大，光束更趋近于方形光束，传输时衍射明显，要形成空间光孤子所需要的非线性压缩也更大，从而导致临界功率增大。

4.4 光孤子相移与光束阶次的关系

孤子相位 $\theta=[-\mu m^2(n+1)\xi_1/(na_0^2)+P_{0c}\rho R_0+(2n-1)P_{0c}\rho\gamma\xi_1 a_0^2/2n\xi_2]z$，由此可知1+2维超高斯型非局域空间光孤子相移的改变快慢与光束阶次 m, n 都有关，但随着阶次的升高(如 $n\geqslant 4$ 时) $(n+1)/n\approx 1$，$(2n-1)/n\approx 2$，$\theta\approx[-\mu m^2\xi_1/a_0^2+P_{0c}\rho R_0+P_{0c}\rho\gamma\xi_1 a_0^2/\xi_2]z$，其主要依赖于 m 和初始功率 P_0，n 的影响可以忽略。

5 结 论

1+2维超高斯光束在强非局域非线性介质中传输时，其束宽远小于介质的响应函数的特征宽度，可以通过对介质响应函数作泰勒级数展开，近似取到二阶，使非局域非线性薛定谔方程中的非线性项保留到两项不为零项，利用变分法可以得到光束各参量的演化方程、演化规律以及临界功率。与高斯光束在强非局域非线性介质中传输相比，其临界功率更大，且随光束的阶次 m 的增大而增大。在一般情形下，1+2维超高斯型光束在强非局域非线性介质中传输时其束宽按正弦和余弦规律作周期性振荡变化；当初始功率等于临界功率，且在光腰处入射的条件下，其束宽在传输过程中则保持不变，可以得到一个1+2维的超高斯型非局域空间光孤子。

参 考 文 献

1 A. W. Snyder, D. J. Mitchell. Accessible solitons[J]. *Science*, 1997, **276**(5318): 1538～1541

2 Y. R. Shen. Solitons made simple[J]. *Science*, 1997, **276**(5318): 1520

3 Q. Guo, B. Luo, F. Yi *et al*.. Large phase shift of nonlocal optical spatial solitons[J]. *Phys. Rev. E*, 2004, **69**(1): 016602-1～016602-8

4 D. Anderson. Variational approach to nonliner pulse propagation in optical fibers[J]. *Phys. Rev. A*, 1983, **27**(6): 3135～3145

5 Q. Guo, B. Luo, S. Chi. Optical beams in sub-strongly non-local nonlinear media: A variational solution[J]. *Opt. Commun.*, 2006, **259**(1): 336～341

6 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Propagation properties the paraxial Gaussian beam in strongly nonlocal media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2005, **25**(6): 848～854
王形华，郭 旗，谢逸群. 傍轴高斯光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 光学学报，2005, **25**(6): 848～854

7 Wang Xinghua, Guo Qi, Xie Yiqun. Analysis of Gaussian beam parameters evolution law in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Laser*, 2005, **32**(8): 1059～1062
王形华，郭 旗，谢逸群. 强非局域介质中高斯光束参量演化规律的分析[J]. 中国激光，2005, **32**(8): 1059～1062

8 Zhang Tao, Hu Wei, Long Xuewen *et al*.. Experimental observation of strong nonlocal optical spatial solitons in nematic liquid crystals[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(1): 143～147
张 涛，胡 巍，龙学文 等. 向列相液晶中强非局域空间光孤子的实验观察[J]. 光学学报，2007, **27**(1): 143～147

9 Wang Xinghua, Guo Qi. Propagation properties of the hyperbolic secant shaped optical beam in strongly nonlocal media[J]. *Chinese J. Laser*, 2006, **33**(5): 645～649
王形华，郭 旗. 双曲正割型光束在强非局域介质中的传输特性[J]. 中国激光，2006, **33**(5): 645～649

10 Liu Jinlong, Chen Jinhua, Li Hai *et al*.. Family of super-Gaussian beams spatial optical solitons in strong nonlocal nonlinear media[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(7): 1261～1265
刘金龙，陈金华，李 海 等. 强非局域非线性介质中的超高斯空间孤光子族[J]. 光学学报，2007, **27**(7): 1261～1265