文章编号：0258-7025(2009)09-2337-04

部分相干光光束并合的光束传输变换特性

李宾中[1] 吕百达[2]
([1] 川北医学院基础学院物理教研室，四川 南充 637007；[2] 四川大学物理科学与技术学院，四川 成都 610064)

摘要 运用维格纳(Wigner)分布函数(WDF)研究了高斯-谢尔模型(GSM)描述的部分相干光-光束并合的光束传输特性。推导出了并合光束的光束传输因子(M^2 因子)、峭度因子(K 因子)以及光强分布的解析表达式。研究表明，并合光束的 M^2 因子、K 因子、光强分布和束宽依赖于总的空间相干度 α，间距 x_d，束腰宽度 w_0 和 GSM 子光束数目 N，如果子光束具有较大的 α 值，并合光束在远场更能达到较高的峰值光强和较窄的束宽。

关键词 相干光学；高斯-谢尔模型；Wigner 分布函数；光束传输因子(M^2 因子)；峭度因子(K 因子)

中图分类号 O435 **文献标识码** A **doi**：10.3788/CJL20093609.2337

Beam Combination Characteristics of Partially Coherent Beams

Li Binzhong[1] Lü Baida[2]
([1] *Physics Department, North Sichuan Medical College, Nanchong, Sichuan 637007, China*
[2] *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China*)

Abstract The beam combination characteristics of partially coherent beams, which are aligned along one dimension, are studied by use of Wigner distribution function. The formulae of intensity profiles, beam propagation factor (M^2) and kurtosis parameter (K) are derived. The analysis shows that the intensity profiles, beam width, beam propagation factor (M^2) and kurtosis parameter (K) are dependent on the spatial coherent length, propagation distance, separation and numbers of the beamlets.

Key words coherence optics; Gaussian Schell-model; Wigner distribution function; beam propagation factor (M^2); kurtosis parameter (K)

1 引 言

近年来对部分相干光，尤其是用高斯-谢尔模型(GSM)来描述光束的部分相干性的研究吸引了人们的注意[1~10]。GSM 不仅能相对容易地作理论分析，而且也能在实验中实现[11,12]。

本文主要讨论部分相干光的并合光束传输特性。利用 GSM 来描述光束的部分相干性，对光束质量进行了深入研究，推出了 M^2 因子的解析式，并对并合光束的峭度因子(K 因子)的变化特性和光强分布传输特性进行了研究。

2 物理模型

采用高斯-谢尔模型描述部分相干光，为简单计而又不失一般性，考虑一维光束，其交叉谱密度在 $z=0$ 平面为[13~16]

$$W_0(x_1,x_2,z=0)=\langle E(x_1)E^*(x_2)\rangle=\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{w_0^2}\right)\exp\left[-\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sigma_0^2}\right],\qquad(1)$$

式中〈〉表示系综平均，* 表示复共轭，w_0，σ_0 分别是 GSM 光束的束腰宽度和相关长度。将 N 束间距为 x_d 的 GSM 子光束在 $z=0$ 平面沿 x 轴排列。为确定起见，令 N 为奇数，但对 N 为偶数的情况也适用。第 n 束 GSM 子光束的交叉谱密度可写为

$$W_n(x_1,x_2,0)=\exp\left[-\frac{(x_1-nx_d)^2+(x_2-nx_d)^2}{w_0^2}\right]\times\exp\left[-\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sigma_0^2}\right],n\in\left(-\frac{N-1}{2},\frac{N-1}{2}\right),\qquad(2)$$

收稿日期：2008-10-03；收到修改稿日期：2008-11-30
基金项目：四川省青年科技基金重点科研项目(04ZQ026-030)和四川省教育厅重点科研课题(2003A065)资助课题。
作者简介：李宾中(1965—)，男，博士，教授，主要从事光学、激光传输等方面的研究。E-mail：li_binzhong@163.com

则并合光束的交叉谱密度函数为

$$W(x_1,x_2)=\langle\Big[\sum_m E(x_1-mx_{\rm d})\Big]\Big[\sum_n E(x_2-nx_{\rm d})\Big]^*\rangle=$$

$$\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\left\{\exp\left[-\frac{(x_1-mx_{\rm d})^2+(x_2-nx_{\rm d})^2}{w_0^2}\right]\exp\left\{-\frac{[(x_1-mx_d)-(x_2-nx_d)]^2}{2\sigma_0^2}\right\}\right\},\tag{3}$$

调用数学积分公式[17]

$$\int_0^\infty t^\nu\exp(-pt)\mathrm{d}t=\Gamma(\nu+1)p^{-\nu-1},\quad \mathrm{Re}(p)>0,\tag{4}$$

式中 Γ 为伽马函数。可求得并合光束在 $z=0$ 平面上的 Wigner 分布函数(WDF)[18]为

$$h_0(x,u,0)=\frac{k}{2\pi}\int\Gamma(x+s/2,x-s/2,0)\exp(-\mathrm{i}kus)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{\beta kw_0}{\sqrt{2\pi}}\sum_m\sum_n\exp\left\{-\frac{\beta^2k^2w_0^2u^2}{2}-\frac{[2x-(m+n)x_{\rm d}]^2}{2w_0^2}+\mathrm{i}k(m-n)x_{\rm d}u\right\},\tag{5}$$

式中

$$\beta=1/\sqrt{1+1/\alpha^2}\tag{6}$$

和

$$\alpha=\sigma_0/w_0\tag{7}$$

是空间总相干度。

WDF 的传输规律为[18,19]

$$h(x,u)=h_0(Dx-Bu,Au-Cx),\tag{8}$$

式中 A, B, C, D 是传输变换矩阵元。

经繁冗的数学运算,可得并合光束在 z 平面上的 WDF

$$h(x,u,z)=$$

$$\frac{kw_0\beta}{\sqrt{2\pi}}\sum_m\sum_n\exp\left[-u^2\left(\frac{2B^2}{w_0^2}+\frac{A^2k^2w_0^2\beta^2}{2}\right)+ux\left(\frac{4BD}{w_0^2}+ACk^2w_0^2\beta^2\right)-x^2\left(\frac{2D^2}{w_0^2}+\frac{C^2k^2w_0^2\beta^2}{2}\right)-\right.$$

$$\left.u\frac{2B(m+n)x_{\rm d}}{w_0^2}+x\frac{2D(m+n)x_{\rm d}}{w_0^2}-\frac{(m+n)^2x_{\rm d}^2}{2w_0^2}+\mathrm{i}kx_{\rm d}(m-n)(Au-Cx)\right].\tag{9}$$

3 并合光束的特征参数

3.1 光束传输因子(M^2 因子)

光束的 $m+n$ 阶强度矩定义为[20]

$$\langle x^mu^n\rangle=\iint x^mu^nh(x,u,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\Big/\iint h(x,u,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}u,\tag{10}$$

光束的 M^2 因子为

$$M_x^2=2k\sqrt{\langle x^2\rangle\langle u^2\rangle-\langle xu\rangle^2},\tag{11}$$

式中 $\langle x^2\rangle$,$\langle u^2\rangle$ 分别是空间域和空间频率域中的二阶矩,$\langle xu\rangle$ 为混合矩。联立(9)~(11)式,可得并合光束的 M^2 因子

$$M^2=\Big[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{m'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n'=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}p_{mn}t_{mn}p_{m'n'}f_{m'n'}\Big]^{1/2}\Big/\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}p_{mn},\tag{12}$$

式中

$$p_{ij}=\exp[-(i-j)^2x_{\rm d}'^2/2\beta^2],t_{ij}=1+(i+j)^2x_{\rm d}'^2,f_{ij}=[1-(i-j)^2x_{\rm d}'^2/\beta^2]/\beta^2,$$
$$(i=m,j=n\ or\ i=m',j=n',\text{除非特别指明})\tag{13}$$

以及 $x'_{\rm d}=x_{\rm d}/w_0$ 是归一化间距。

从上面的推导,可得出并合光束的束宽

$$W(z)=2\sqrt{\langle x^2\rangle}=2\sqrt{\Big[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}r_{mn}\Big]\Big/\Big[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}p_{mn}\Big]},\tag{14}$$

式中

$$r_{mn}=p_{mn}\left(\frac{B^2 f_{mn}}{k^2 w_0^2}+\frac{A^2 w_0^2 t_{mn}}{4}\right). \tag{15}$$

3.2　峭度因子 K

通常，峭度因子 K 表示光强分布的平整度，其定义为[20,21]

$$K=\frac{\langle x^4\rangle}{\langle x^2\rangle^2}, \tag{16}$$

式中 $\langle x^4\rangle$ 是光束的四阶矩。联立(10)式和(16)式，并经繁冗的数学运算，可以得到 K 参数的传输方程

$$K=\left[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}p_{mn}\right]\left[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}s_{mn}\right]\Big/\left[\sum_{m=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}r_{mn}\right]^2, \tag{17}$$

式中

$$\begin{aligned}s_{mn}=&\frac{p_{mn}}{16k^4 w_0^4}\{24A^2B^2k^2w_0^4 f_{mn}t_{mn}+16B^4\{[3-(m-n)^2x_{\mathrm{d}}'^2/\beta^2]^2-6\}/\beta^4+\\&A^4k^4w_0^8\{[3+(m-n)^2x_{\mathrm{d}}'^2/\beta^2]^2-6\}\},\end{aligned} \tag{18}$$

对自由空间传输情形，$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$z$ 是传输距离。对 $N=2$，方程(17) 变为

$$\begin{aligned}K=&(1+g_1)\{16x_{\mathrm{d}}^4z^4-32\alpha^2x_{\mathrm{d}}^2(3w_0^2-2x_d^2)z^4+8\alpha^6z^2\{3k^2w_0^6[(1+g_1)w_0^2+(g_1-2)x_{\mathrm{d}}^2]+\\&4[3w_0^4(1+g_1)-9x_{\mathrm{d}}^2w_0^2+2x_{\mathrm{d}}^4]z^2\}-24\alpha^4z^2\{k^2w_0^6x_{\mathrm{d}}^2-2[(1+g_1)w_0^4-6x_{\mathrm{d}}^2w_0^2+2x_{\mathrm{d}}^4]z^2\}+\\&\alpha^8\{k^4w_0^8[3w_0^4(1+g_1)+(6x_{\mathrm{d}}^2w_0^2+x_{\mathrm{d}}^4)g_1]+24k^2w_0^6[(1+g_1)w_0^2+(g_1-1)x_{\mathrm{d}}^2]z^2+\\&16[3w_0^4(1+g_1)-6x_{\mathrm{d}}^2w_0^2+x_{\mathrm{d}}^4)z^4\}\}/g_2,\end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$g_2=\{-4x_{\mathrm{d}}^2z^2+4\alpha^2[(1+g_1)w_0^2-2x_{\mathrm{d}}^2]z^2+\alpha^4[k^2w_0^4(w_0^2+g_1w_0^2+g_1x_{\mathrm{d}}^2)+4(w_0^2-x_{\mathrm{d}}^2+g_1w_0^2)z^2]\}^2, \tag{20}$$

由(19)式可看出，并合光束的 K 参数依赖于总的空间相干度、间距、束腰宽度、子光束数目和传输距离 z。

4　并合光束的光强传输公式

由方程(9)可推得并合光束的光强传输公式

$$\begin{aligned}I(x,z)=&\int W(x,u,z)\mathrm{d}u=\frac{k\alpha w_0^2}{\sqrt{g_3}}\times\\&\sum_m\sum_n\exp\left\{-\frac{2\alpha^2k^2w_0^2x^2}{g_3}+\frac{2k\{\mathrm{i}2B(m-n)+\alpha^2[\mathrm{i}2B(m-n)+Ak(m+n)w_0^2]\}x_{\mathrm{d}}x}{g_3}-\right.\\&\left.\frac{Ak\{(m-n)[\mathrm{i}4B(m+n)+Ak(m-n)w_0^2]+2\alpha^2[\mathrm{i}2B(m^2-n^2)+Ak(m^2+n^2)w_0^2]x_{\mathrm{d}}^2\}}{2g_3}\right\},\end{aligned} \tag{21}$$

式中

$$g_3=4B^2+\alpha^2(4B^2+A^2k^2w_0^4). \tag{22}$$

对自由空间传输的情况，方程(21)简化为

$$\begin{aligned}I(x,z)=&\frac{k\alpha w_0^2}{\sqrt{g_{3s}}}\sum_m\sum_n\exp\left\{-\frac{2\alpha^2k^2w_0^2x^2}{g_{3s}}+\frac{2k\{\mathrm{i}2z(m-n)+\alpha^2[\mathrm{i}2z(m-n)+k(m+n)w_0^2]\}x_{\mathrm{d}}x}{g_{3s}}-\right.\\&\left.\frac{k\{(m-n)[\mathrm{i}4z(m+n)+k(m-n)w_0^2]+2\alpha^2[\mathrm{i}2z(m^2-n^2)+k(m^2+n^2)w_0^2]x_{\mathrm{d}}^2\}}{2g_{3s}}\right\},\end{aligned} \tag{23}$$

式中

$$g_{3s}=4z^2+\alpha^2(4z^2+k^2w_0^4). \tag{24}$$

由(23)式表明，并合光束的光强分布依赖于总的空间相干度、间距、束腰宽度、子光束数目和传输距离。

5 结　论

对部分相干光并合的光束传输变换特性的研究表明，并合光束的 M^2，K 参数，光强分布和束宽依赖于总的空间相干度 α，间距 x_d，束腰宽度 w_0 和 GSM 子光束数目 N。当选用 M^2 因子和桶中功率(PIB)来表征光束质量时，子光束具有较大 α 值的并合光束的光束质量比子光束具有较小 α 值的并合光束的光束质量要好。它同时也意味着，如果子光束具有较大的 α 值，并合光束在远场更能达到较高的峰值光强和较窄的束宽。

参 考 文 献

1 F. Gori, M. Santarsiero, G. Piquero *et al*.. Partially polarized Gaussian Schell-model beams[J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2001, **3**: 1～9

2 Jixiong Pu, Huihua Zhang, Shojiro Nemoto. Spectral shifts and spectral switches of partially coherent light passing through an aperture[J]. *Opt. Commun.*, 1999, **162**(1-3): 57～63

3 H. Gross. Numerical propagation of partially coherent laser beams through optical systems[J]. *Optics & Laser Technology*, 1997, **29**(5): 257～260

4 C. Palma, G. Cincotti. Spatial behavior of the wolf effect in free propagation for Gaussian Schell-model beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(8): 1885～1889

5 Avshalom Gamliel. Mode analysis of spectral changes in light propagation from sources of any state of coherence[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1990, **7**(9): 1591～1597

6 Shimon Lavi, Ron Prochaska, Eliezer Keren. Generalized beam parameters and transformation laws for partially coherent light [J]. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(17): 3696～3703

7 Pan Pingping, Dan Youquan, Zhang Bin. Propagation of partially coherent flat-topped beams in gradient-index media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(7): 1252～1256
潘平平，但有全，张　彬. 部分相干平顶光束在梯度折射率介质中的传输特性[J]. 光学学报, 2008, **28**(7): 1252～1256

8 Shu Jianhua, Chen Ziyang, Pu Jixiong. Changes in the degree of polarization of partially coherent lights diffracted by multiple circular apertures[J]. *Chinese. J. Lasers*, 2008, **35**(6): 849～854
舒建华，陈子阳，蒲继雄. 部分相干光经多个圆孔衍射后的偏振度变化[J]. 中国激光, 2008, **35**(6): 849～854

9 Xiao Qinggang, Xiao Yao, Zeng Yangsu. Study of grating diffractive field's degree of polarization and angular coherence of partially polarized and coherent beams[J]. *Acta Optica Sinica*, 2008, **28**(5): 822～827
肖擎纲，肖　尧，曾阳素. 部分偏振部分相干光光栅衍射场的偏振特性和角相关研究[J]. 光学学报, 2008, **28**(5): 822～827

10 Lianzhou Rao, Jixiong Pu. Generation of partially coherent vortex bottle beams[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2007, **5**(7): 379～382

11 F. Gori, M. Santarsiero, A. Sona. The change of width for a partially coherent beam on paraxial propagation [J]. *Opt. Commun.*, 1991, **82**(3-4): 197～203

12 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. 5^{th} Edition, London: Pergamon Press, 1975. 499～505

13 L. Mandel, E. Wolf. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 147～154

14 A. Starikov, E. Wolf. Coherent-mode representation of Gaussian Schell-model sources and their radiation fields[J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(7): 923～928

15 Ari T. Friberg, Ronald J. Sudol. Propagation parameters of Gaussian Schell-model beams[J]. *Opt. Commun.*, 1982, **41**(6): 383～387

16 Li Binzhong, Lü Baida. Beam combination characteristics of general astigmatic Gaussian beams [J]. *Chinese. J. Lasers*, 2002, A**29**(4): 321～326
李宾中，吕百达. 复杂像散高斯光束的并合光束特性[J]. 中国激光, 2002, A**29**(4): 321～326

17 A. Erdelyi. Tables of Integral Transform [M]. New York: McGRAW-HILL, 1954

18 M. J. Bastianns. The Wigner distribution function of partially coherent light[J]. *J. Mod. Opt.*, 1981, **28**(9): 1215～1224

19 M. J. Bastianns. Application of the Wigner distribution function to partially coherent light[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986, **3**(8): 1227～1238

20 S. A. Amarande. Beam propagation factor and the kurtosis parameter of flattened Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **129**(5-6): 311～317

21 G. Piquero, P. M. Mejias, R. Martinez-Herrero. Sharpness changes of Gaussian beams induced by spherically aberrated lenses[J]. *Opt. Commun.*, 1994, **107**(3-4): 179～183