

文章编号: 0258-7025(2009)03-0625-05

# 基于提升小波的光纤陀螺分形噪声滤除方法

党淑雯 田蔚风 钱 峰

(上海交通大学电子信息与电气工程学院仪器系导航与控制研究所, 上海 200240)

**摘要** 光纤陀螺(FOG)随机噪声中包含了白噪声和具有长程相关性、自相似性及  $1/f^\alpha$  类型谱密度特点的一种非平稳随机噪声—— $1/f^\alpha$  类分形噪声。采用传统的方法很难去除该类噪声。由于小波分析的多分辨率分析特性,使之成为研究分形噪声的有力工具。提出一种新的基于提升小波的自适应阈值选取滤波方法对光纤陀螺的输出信号进行阈值滤波,进而提高光纤陀螺的精度,算法包括提升小波分解、滤波参数估计及自适应软阈值滤波。对多组实测数据进行仿真实验,将传统小波固定阈值滤波方法与新方法进行比较,实验结果验证了新方法的有效性。

**关键词** 光纤光学; 提升小波; 分形噪声; 光纤陀螺; 最大似然估计; 软阈值滤波

**中图分类号** TP391; V241.5<sup>+</sup>58 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20093603.0625

## De-Noising Fractional Noise in Fiber Optic Gyroscopes Based on Lifting Wavelet

Dang Shuwen Tian Weifeng Qian Feng

(Department of Instrumentation Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract** The output of fiber optic gyroscopes (FOG) involves Gaussian white noise and fractional noise which is difficult to eliminate by traditional methods because of the non-stationary, long-term correlation, self-similarity characteristics. On account of the characteristics of the wavelet multi-resolution analysis, wavelet analysis has become a powerful tool to study fractal noises. This paper introduces an effective technique for the de-noising of FOG corrupted by non-stationary noises. The proposed method is based on a second generation wavelet transform and level-dependent threshold estimator. The whole algorithm consists of the de-composition based on lifting wavelet, parameter estimation, and level-dependent soft threshold de-noising. The de-noising method based on traditional universal thresholding wavelet is also investigated to provide a comparison with the new method. Experimental results prove that the proposed method based on level-dependent lifting wavelet outperforms the traditional wavelet de-noising method.

**Key words** fiber optics; lifting wavelet; fractional noise; fiber optic gyroscope; maximum likelihood estimation; soft-thresholding de-noising

### 1 引 言

光纤陀螺(FOG)<sup>[1]</sup>是典型的全固态结构陀螺,具有启动快、可靠性高、抗冲击振动能力强、动态范围宽、寿命长、重量轻、成本低等优点<sup>[2, 3]</sup>。光纤陀螺输出随随机噪声的滤除是决定惯性系统精度的重要因素之一。为降低光纤陀螺噪声,目前主要研究重

点围绕在改善材料、工艺及构成,或者在后期数据处理阶段等环节提高光纤陀螺的精度<sup>[4~7]</sup>。FOG 输出中的主要噪声成分是高斯白噪声和分形噪声。而后者主要是由于光路波动导致偏置的不稳定引起的。瑞利后向散射带来的相位误差、法拉第效应引起的误差、偏振器不理想引起的误差都是产生分形

收稿日期: 2008-09-17; 收到修改稿日期: 2008-12-26

基金项目: 航天科技创新项目基金资助课题。

作者简介: 党淑雯(1980—),女,博士研究生,主要从事惯性导航技术和非线性滤波技术等方面的研究。

E-mail: guoguo17606@hotmail.com

导师简介: 田蔚风(1958—),女,教授,博士生导师,主要从事导航定位系统中信息处理和智能控制以及新型惯性仪器及组合导航系统等方面的研究。E-mail: wftian@sjtu.edu.cn

噪声的主要原因<sup>[8]</sup>。对于中高精度光纤陀螺,分形噪声对输出信号的影响远高于白噪声。目前,有关分形噪声的来源虽已确定,但由于分形噪声产生机制较为复杂,故较难将其滤除,这也极大程度地限制了光纤陀螺的广泛应用。所以,光纤陀螺的分形噪声滤除仍然需要进一步的探讨研究。

小波滤噪起源于 Donoho 等<sup>[9,10]</sup>提出的小波软、硬阈值滤波方法。基于分形噪声在小波域的特点。用小波方法来滤除分形噪声的方法在文献<sup>[11]</sup>中得以分析应用。

Daubechies 等<sup>[12,13]</sup>提出的基于提升格式的小波变换方法相较传统滤波器具有更为显著的优点,例如变换速度更快、结构简单、完全的在位计算、不需占用辅助存储器空间,逆变换只需将运算取反即可。故该方法在信号滤波领域也有着极大的发展潜力。

本文介绍了基于提升格式的小波变换,探讨了自适应提升小波滤除光纤陀螺分形噪声的方法。进行了仿真实验,并将自适应提升小波滤波方法与传统固定阈值小波滤波方法进行实验比较。

## 2 基于提升格式的小波变换

第二代小波变换,是一种新的数字分析和信号处理方法。传统小波的构造是通过函数的平移和伸缩并结合 Fourier 变换技术来实现的。提升格式与传统方法的主要区别就是它完全不依赖于 Fourier 变换,在时空域完成了对双正交小波滤波器的构造。与传统的小波变换相比,其计算速度更快、方法更简单、结果更准确,对存储空间的要求较低。而且,适合于自适应、非线性、非奇异采样和整数到整数的变换。

一个规范的提升方法由 3 个步骤组成:分解(Split)、预测(Predict)和修正(Update)。设信号  $x[n]$ ,将  $x[n]$ 分解成偶数采样点  $x_e[n]=x[2n]$ 和奇数采样点  $x_o[n]=x[2n+1]$ 。其中 e 为偶数点下标,o 为奇数点下标,这种分解称为懒惰小波变换(lazy wavelet transform)。由于信号  $x[n]$ 的各采样点之间存在一定的相关性,因此可以通过偶数采样点估计奇数采样点,即  $x_o=P(x_e)$ ,这就是提升方法中的预测。如果信号之间的相关性很大,那么预测效果会很好,用  $x_e$ 粗略地表示  $x[n]$ 不会丢失很多信息,这意味着可以忽略一部分信息,如  $x_o$ ,以达到简练表达的目的。为了完全重建信号  $x[n]$ ,只能忽略包含在  $x_o$ 中的关于  $x_e$ 的那部分信息,而保留二者的差值部分  $d$ ,即  $d=x_o-P(x_e)$ 。但是,在这样

一种新的表示形式中,可能会丢失信号的某些特征,而这些特征又是人们所期望的有用信息,如信号的均值。为了恢复这些特征,在提升方法中又引入了修正操作  $U$ 。即用新得到的  $d$ 来修正  $x_e$ ,修正结果用  $c$ 表示,即  $c=x_e+U(d)$ 。提升小波的前向变换和逆向变换原理图分别见图 1。提升方法的前向变换为

$$d[n]=x_o[n]-P(x_e[n]) \quad (1)$$

$$c[n]=x_e[n]+U(d[n]) \quad (2)$$

其中, $P$ 为预测算子, $U$ 为修正算子; $d,c$ 在小波的多分辨分析中被称为小波系数和尺度系数。

逆向变换的公式为

$$x_e[n]=c[n]-U(d[n]) \quad (3)$$

$$x_o[n]=d[n]+P(x_e[n]) \quad (4)$$

$$x[n]=\text{Merge}(x_e[n],x_o[n]) \quad (5)$$

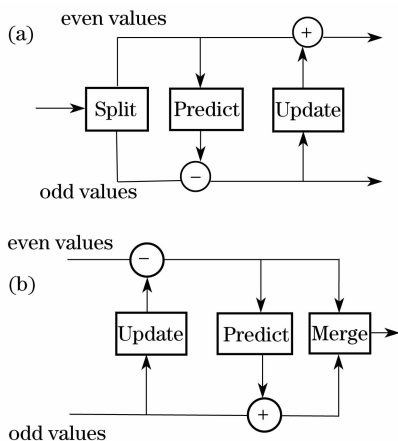


图 1 提升小波的前向(a)和逆向(b)变换  
Fig.1 Lifting scheme forward (a) and inverse (b) wavelet transform

## 3 自适应提升小波的噪声滤除方法

### 3.1 分形噪声在小波域的特性

分数布朗运动(fractional Brownian motion, FBM)是 Mandelbrot 等<sup>[14]</sup>在普通布朗运动的基础上加以推广而得到的,是目前研究具有统计自相似性的分形信号最常用的数学模型之一。

分形噪声是具有统计自相似性的随机过程。自相似随机过程  $x(t)$ 的功率具有幂函数的形式

$$\text{PSD}(\omega)=\sigma_x^2/|\omega|^\gamma, \quad (6)$$

其中  $\gamma=2H+1$ , $\gamma$ 为功率参数, $H$ 为分形的维数。

当考虑了分形噪声及其他白噪声时,(6)式可演化为

$$\text{PSD}(\omega)=\sigma_x^2/|\omega|^\gamma+\sigma_w^2, \quad (7)$$

其中  $\sigma_w$ 代表白噪声的噪声强度,而  $\sigma_x$ 和  $\gamma$ 代表分形

噪声的参数。因此,需要对如下参数进行估计

$$\Theta = (\gamma, \sigma_x^2, \sigma_w^2). \quad (8)$$

分形噪声在小波变换域具有比较特殊的性质,分形噪声在小波变换域当满足一定的条件时( $0 < \gamma < 2R$ ,  $R$  是小波基的消失矩),某一尺度下分形噪声的小波变换系数是平稳的随机序列且均值为零,方差满足指数关系;当小波基的消失矩较大时,分形噪声的小波变换系数近似白噪声序列。也正是基于上述分形噪声在小波域所具备的特性,Wornell 等<sup>[11]</sup>提出一种基于小波域的  $1/f^\gamma$  信号模型。对噪声信号  $z(t) = x(t) + w(t)$ ,其中  $x(t)$  为分形噪声, $w(t)$  为白噪声,经过小波变换得

$$r_n^m = x_n^m + w_n^m \quad (9)$$

其中, $\beta = 2^\gamma$ ,  $m, n \in R$ ,  $m$  为小波变换尺度,  $n$  为样本点序号,  $x_n^m$  为分形噪声的小波变换,  $w_n^m$  为白噪声的小波变换。同时,它们也满足方差等式

$$\text{var}[r_n^m] = \sigma_m^2 = \sigma^2 \beta^m + \sigma_w^2. \quad (10)$$

采用文献[8]中所提出的极大似然估计(MLS)方法。该方法最大的特点在于其鲁棒性及可得到较为理想的信噪比。

### 3.2 分形噪声参数估计

光纤陀螺输出信号经过高通滤波器处理后,得到的噪声信号  $r(t)$ ,其中混有分形噪声信号  $x(t)$  及白噪声信号  $w(t)$ 。经小波域变换后为  $r = \{r_n^m, (m, n \in R)\}$ ,  $x = \{x_n^m, (m, n \in R)\}$ ,  $m = \{1, 2, \dots, M\}$ ,其中  $M$  为尺度序号的集合,  $N(m) = \{1, 2, \dots, N_0 2^{m-1}\}$ ,  $N(m)$  为尺度  $m$  下的样本总数。令待估参数  $\Theta = \{\beta, \sigma^2, \sigma_w^2\}$ ,则由极大似然准则<sup>[8]</sup>可以得到

$$L(\Theta) = \ln p_r(r; \Theta) = \frac{1}{2} N(m) [\hat{\sigma}_m^2 / \sigma_m^2 + \ln(2\pi\sigma_m^2)], \quad m \in M \quad (11)$$

其中,  $\hat{\sigma}_m^2$  由  $M$  个方差样本得出

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{N(m)} (r_n^m)^2, \quad n \in N(m) \quad (12)$$

噪声参数  $\gamma, \sigma_x^2, \sigma_w^2$  有以下关系

$$\begin{aligned} m \in M T_m &= 0, \\ m \in M 2^{-m} T_m &= 0, \\ m \in M m 2^{-m} T_m &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$T_m = \frac{N(m)}{\sigma_m^2} [1 - \hat{\sigma}_m^2 / \sigma_m^2], \quad (14)$$

一般情况下,(13)式较难求解,采用了文献[11, 15, 16]提出的一种反复迭代的极大似然估计方法。

### 3.3 自适应提升小波分形噪声滤除方法

在小波滤波过程中,小波基和阈值的选取很大程度上影响了最终去噪的结果<sup>[13, 14]</sup>。小波固定阈值滤波方法在该领域得到广泛应用<sup>[17]</sup>,其阈值选取公式为

$$\text{thr} = \sqrt{2 \ln(N)}, \quad (15)$$

可见阈值的大小取决于样本长度  $N$ 。在实际应用中,传统固定的阈值可能会把有用的高频特征信号当作噪声消除,这里采用了一种 Stein 无偏估计(SURE)自适应阈值选取方法<sup>[18]</sup>。这是一种基于 Stein 无偏似然估计原理的方法,可以选择一个接近最优的阈值,对于光纤陀螺信号这种包含在很强噪声里的微弱信号采用这种方法会得到更好的效果。基于自适应提升小波变换的信号去噪方法也分为三步:首先对信号进行提升小波变换,每一次变换将信号分解为新的近似尺度系数  $\lambda_n^j$  和小波系数  $d_n^j$ ;然后对变换后的小波系数进行阈值收缩;最后对收缩后的小波系数和尺度系数进行合成,形成去噪后的信号。利用公式(15)的阈值选取方法于分解后的小波系数,即将含噪信号分解为  $j$  层,第一层的小波系数为  $\gamma^j$

$$\text{scale} = \text{median}(|\gamma^j|) / 0.6745, \quad (16)$$

$$\gamma_n^j = \gamma^j / \text{scale}. \quad (17)$$

小波软、硬阈值的选取方法分别为

$$\tilde{\gamma}_n^j = \begin{cases} \text{sign}(\gamma_n^j(k)) (|\gamma_n^j(k) - \text{thr}|) & \text{if } |\gamma_n^j(k)| > \text{thr}, \\ 0 & \text{if } |\gamma_n^j(k)| \leq \text{thr}. \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{\gamma}_n^j = \begin{cases} \gamma_n^j(k) & \text{if } |\gamma_n^j(k)| > \text{thr}, \\ 0 & \text{if } |\gamma_n^j(k)| \leq \text{thr}. \end{cases} \quad (19)$$

## 4 仿真结果

为进一步验证自适应提升小波阈值滤波算法的优越性及有效性,分别将该方法与传统固定软阈值小波滤波方法相比较,对同一组实测陀螺信号进行滤波处理。对型号为 KVH E. Core2000 的光纤陀螺在常温下测得多组漂移输出,采样频率为 10 Hz,输出单位为 ( $^\circ$ )/s。这里只截取其中的一段数据点作为仿真研究对象。在仿真实验中,综合考虑了精度和计算量,选用了 daubechies4 正交小波基进行提升格式的转换,选取最大分解尺度为 5。

光纤陀螺的原始含噪输出信号见图 2(a)。给出了 DB4 提升小波分解后的细节信号  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  ( $1 \sim 5$  层尺度系数为  $d_1^1, d_1^2, d_1^3, d_1^4, d_1^5$ ) 以

及逼近信号  $a_5$  (第 5 层小波系数  $a_i^5$ )。图 2(b) 给出了同样采用了 daubechies4 为正交小波基, 分解尺度为 5 层的自适应阈值提升小波滤波后的 FOG 信号, 其中细节信号为  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  以及逼近信号为

$a_5$ 。光纤陀螺滤波前后的结果见图 3, 其中(a)表示原始含噪 FOG 信号;(b)表示采用传统固定软阈值小波滤波后的信号;(c)表示用自适应提升小波滤波后的信号。原始 FOG 信号以及经两种不同滤波方法处理后的 FOG 信号的标准差分别为  $2.9430 \times 10^{-4}$ ,  $2.0010 \times 10^{-4}$  和  $1.3010 \times 10^{-4}$ 。通过对比实验结果可看到, 采用基于提升小波的自适应阈值选取滤波的方法, 可以更为有效地抑制光纤陀螺信号中的分形噪声, 提高信噪比, 与传统固定软阈值小波滤波方法相比更具有优越性及有效性。

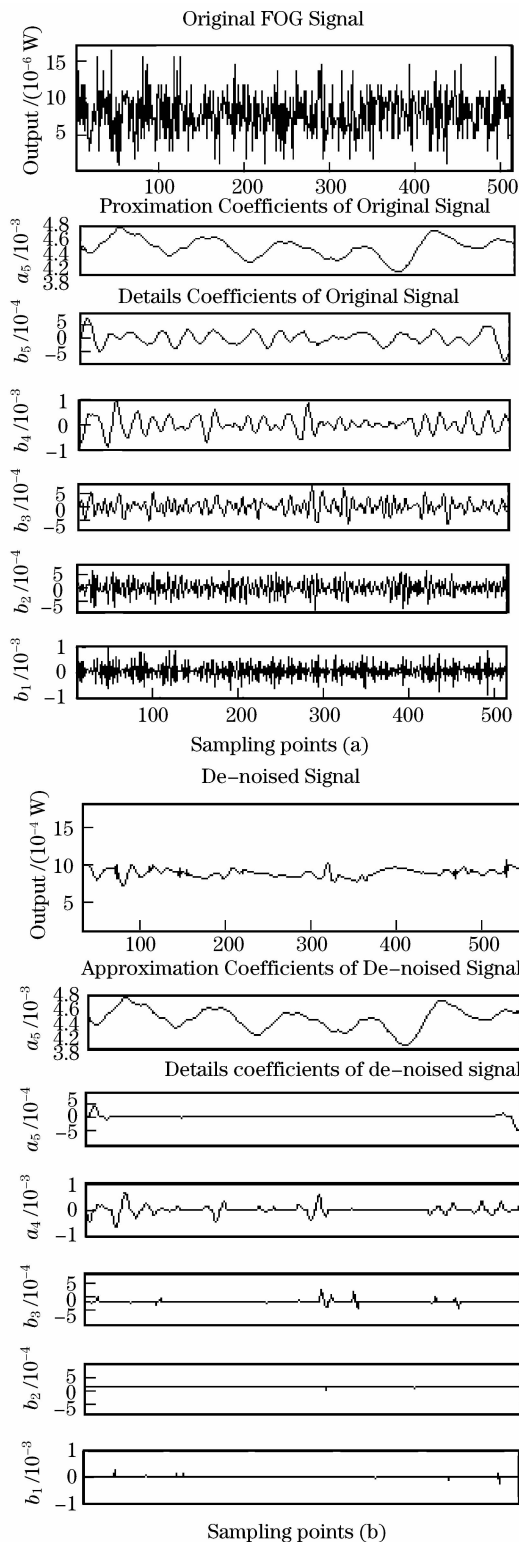


图 2 含噪声(a)和滤波后(b)的 FOG 信号小波分解系数  
Fig. 2 Wavelet coefficients of original(a) and de-noised (b) of FOG signal at different scales

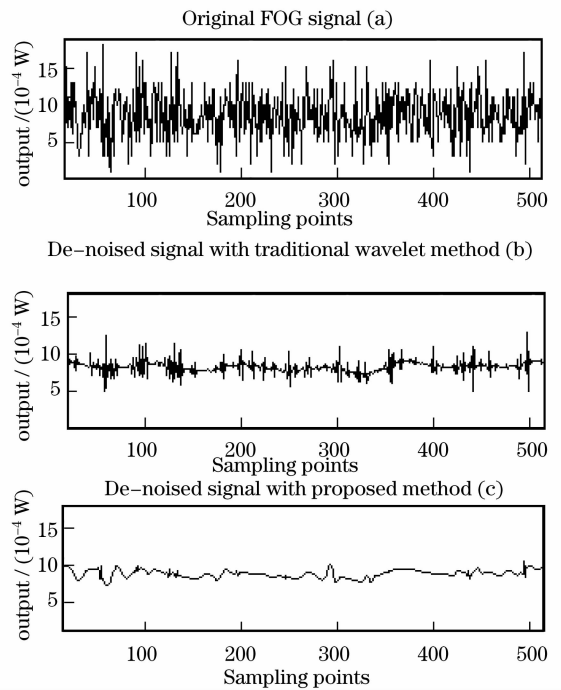


图 3 传统全局阈值小波滤波方法与自适应提升小波滤波方法结果比较。(a)原始 FOG 信号;(b)全局阈值小波滤波结果;(c)自适应提升小波滤波方法  
Fig. 3 Performance of the proposed method and traditional wavelet method, (a) Original FOG signals; (b) De-noised signals with traditional wavelet method; (c) De-noised signals with proposed method

## 5 结 论

提出采用基于提升格式的小波变换对中高精度光纤陀螺的输出信号进行分析, 并采用自适应阈值选取滤波方法有效地滤除了分形噪声, 提高了光纤陀螺的精度。在光纤陀螺的具体应用中, 载体的振动和外界环境的干扰相对有用信号可看作是高频随机干扰, 采用本文提出的方法同样对这些干扰有一定的抑制作用, 进而可提高系统的精度。

## 参 考 文 献

- 1 V. Vali, R. W. Shorthill. Fiber ring interferometer[J]. *Appl. Opt.*, 1976, **1**(15): 1099~1100
- 2 R. Usui, A. Ohno. Recent progress of fiber optic gyroscopes and applications at JAE [C]. *Optical Fiber Sensors Conference Technical Digest. USA; OFS*, 2002, 11~14
- 3 A. Cordova, R. Patterson, J. Rahn. Progress in navigation grade IFOG performance[C]. *SPIE*, 1996, **2837**: 207~217
- 4 Zhang Xulin, Ma Huilian, Ding Chun *et al.*. Optical Kerr effect in phase modulation spectroscopy resonator fiber optic gyro[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(6): 814~818  
张旭琳, 马慧莲, 丁纯等. 谐振式光纤陀螺调谐检测技术中的光克尔效应[J]. *中国激光*, 2006, **33**(6): 814~818
- 5 Mi Jian, Zhang Chunxi, Li Zheng *et al.*. Effect of polarization interference on fiber optic gyro performance[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(8): 1140~1144  
米剑, 张春熹, 李铮等. 偏光干涉对光纤陀螺性能的影响[J]. *光学学报*, 2006, **26**(8): 1140~1144
- 6 Yu Xiujuan, Liao Yanbiao, Zhang Min *et al.*. Kerr effect in an optical passive ring-resonator gyro using a hollow-core photonic band-gap fiber[J]. *Chinese J. Lasers*, 2008, **35**(3): 430~435  
于秀娟, 廖延彪, 张敏等. 谐振式空心光子带隙光纤陀螺中的光克尔效应[J]. *中国激光*, 2008, **35**(3): 430~435
- 7 Jian Mi, Chunxi Zhang, Zheng Li *et al.*. Bias phase and light power dependence of the random walk coefficient of fiber optic gyroscope[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(7): 379~381
- 8 C. X. Shi, H. Kajioka. Configuration to double I-FOG output power: Experimental investigation of noise performance and temperature effect [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 1996, **8**(7): 924~926
- 9 D. Donoho, I. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, **81**: 424~455
- 10 S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*[M]. San Diego: Academic Press, 1998
- 11 G. W. Wornell, A. V. Oppenheim. Estimation of fractal from noisy measurements using wavelet [J]. *IEEE Trans Signal Processing*, 1992, **40**(3): 611~623
- 12 I. Daubechies, W Sweldens. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. *J Fourier Anal Appl.*, 1998, **4**(3): 245~267
- 13 W. Sweldens. The Lifting scheme: A construction of second generation wavelets [J]. *Journal of Appl. and Comput Harmonic Analysis*, 1996, **3**(2): 186~200
- 14 B. Mandelbrot, J. W. V. Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications [J]. *SIAM Rev.*, 1968, **10**(10): 422~437
- 15 N. M. Laird. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm[J]. *Royal Stat Soc Ser B*, 1977, **39**: 1~38
- 16 G. W. Wornell. *Signal Processing with Fractals: A Wavelet Based Approach*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995. 59~94
- 17 D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans. on IT*, 1995, **IT-41**(3): 612~627
- 18 I. M. Johnstone, B. W. Silverman. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise[J]. *J. Roy Statist. Soc.*, 1997, **B59**(2): 319~351