

文章编号: 0258-7025(2009)02-0374-05

# 分数傅里叶变换面上厄米-拉盖尔-高斯 光束的变换特性

陈森会 张廷蓉 冯小芳

(四川师范大学物理与电子工程学院, 四川 成都 610068)

**摘要** 为了研究厄米-拉盖尔-高斯(HLG)光束在分数傅里叶变换(FRFT)面上的变换特性,利用柯林斯(Collins)公式,导出了其通过分数傅里叶变换系统后,在分数傅里叶变换面上的光强分布解析式。并利用此解析式作数值计算,研究了其在分数傅里叶变换面上的光强分布特性。研究表明,厄米-拉盖尔-高斯光束在分数傅里叶变换面上的光强分布受参量  $\alpha$ , 模指数  $m, n$  和分数傅里叶变换阶数  $p$  的影响。光强分布随  $p$  和  $\alpha$  周期性变化,周期分别为  $2, 2\pi$ 。此外,厄米-拉盖尔-高斯光束通过分数傅里叶变换系统后,光束形状保持不变。

**关键词** 物理光学;分数傅里叶变换;厄米-拉盖尔-高斯光束;Collins 公式

**中图分类号** O438.2 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20093602.0374

## Transformation Properties of Hermite-Laguerre-Gaussian Beam in Fractional Fourier Transform Plane

Chen Senhui Zhang Tingrong Feng Xiaofang

(College of Physics and Electronics Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610068, China)

**Abstract** In order to study the transformation properties of a Hermite-Laguerre-Gaussian (HLG) beam through a fractional Fourier transform (FRFT) system in detail, the analytical expressions for the intensity distribution of HLG beam on the FRFT plane are derived from Collins formula. By using the derived expressions, numerical calculation examples have been presented to illustrate its propagation properties. It is shown that apart from the mode indices  $m, n$ , the intensity distribution on the FRFT plane depends on the fractional order  $p$  and parameter  $\alpha$ , the variation with fractional order  $p$  and  $\alpha$  is periodic, with the periods of 2 and  $2\pi$  respectively. Furthermore, the beam shape of HLG beam maintains invariable in FRFT plane.

**Key words** physical optics; fractional Fourier transform; Hermite-Laguerre-Gaussian beam; Collins formula

### 1 引言

光束通过各类光学系统的传输变换及其光束质量是较受关注的光学研究领域<sup>[1~14]</sup>。引入一个  $\alpha$  参数使厄米光束和拉盖尔光束统一起来,这类更广泛的光束被称为广义高斯光束或厄米-拉盖尔-高斯(HLG)光束。HLG 光束除了具有厄米光束和拉盖尔光束的特性之外,它还具有一些新特性,因而有重要理论和实际应用价值<sup>[7]</sup>。文献[8]讨论了 HLG

光束在自由空间的传输特性,文献[10]讨论了矢量非傍轴 HLG 光束的桶中功率与束腰宽度和波长之比  $w_0/\lambda$ ,  $\alpha$  参量,模指数以及所取桶的尺寸之间的关系;文献[11]研究了附加的角参量和束腰宽度对远场 HLG 光束矢量结构和能量模式的影响;文献[12]讨论了矢量非傍轴 HLG 光束的远场特性及光束质量:桶中功率,  $\beta$  参量,均取决于模指数,  $\alpha$  参量,束腰宽度和波长之比  $w_0/\lambda$  以及所取桶的尺寸。

收稿日期:2008-01-23;收到修改稿日期:2008-05-10

基金项目:四川省教育厅重点项目(2004A088)基金资助。

作者简介:陈森会(1984-),女,四川人,硕士研究生,主要从事光束传输与变换方面的研究。

E-mail: chensenhui\_71@yahoo.com.cn

导师简介:张廷蓉(1962-),女,四川人,教授,硕士生导师,主要从事光束传输与变换方面的研究

。E-mail: trz\_sc@163.com

本文研究了 HLG 光束通过分数傅里叶 (FRFT) 系统的传输特性。利用柯林斯 (Collins) 公式导出 HLG 光束通过 FRFT 系统后在 FRFT 面上的光强分布解析式, 并通过数值计算, 研究了光强分布随 FRFT 阶数  $p$ 、参量  $\alpha$  和模指数  $m, n$  的变化规律。

## 2 分数傅里叶变换

$z = 0$  处, HLG 光束的场分布为<sup>[7,8]</sup>

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | \alpha) =$$

$$\sum_{k=0}^{m+n} i^k (\cos \alpha)^{m-k} (\sin \alpha)^{n-k} P_k^{(m-k, n-k)}(-\cos 2\alpha) \times \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2] H_{m+n-k}(\sqrt{2}x/w_0) H_k(\sqrt{2}y/w_0), \quad (1)$$

式中  $P_k^{(\mu, \nu)}(t) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} (1-t)^{-\mu} (1+t)^{-\nu} \times$

$$\frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^{k+\mu} (1+t)^{k+\nu}] \quad (2)$$

为雅可比多项式。 $m, n$  为 HLG 光束的模指数,  $w_0$  为相应高斯光束的束腰半径,  $\alpha$  为一参量,  $H_m(\cdot)$  为厄米特多项式。(1)式表明, HLG 光束的光场分布随  $\alpha$  参量呈最小周期为  $2\pi$  的变化。因此, 只需考虑  $\alpha$  在  $0 \sim 2\pi$  范围内的变化即可。然而,  $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  时,  $\sin \alpha$  或  $\cos \alpha$  等于 0, (1)式对  $\alpha$  求和遇到困难, 利用文献[8]中(4), (5)和(9)式得

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | 0) = (-i)^n H_{m,n}(\sqrt{2}x/w_0, \sqrt{2}y/w_0), \quad (3)$$

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | \pi/2) = (-i)^m H_{n,m}(\sqrt{2}x/w_0, -\sqrt{2}y/w_0), \quad (4)$$

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | \pi) = (-i)^n H_{m,n}(-\sqrt{2}x/w_0, -\sqrt{2}y/w_0), \quad (5)$$

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | 3\pi/2) = (-i)^m H_{n,m}(-\sqrt{2}x/w_0, \sqrt{2}y/w_0), \quad (6)$$

式中,  $H_{m,n}(\mu, \nu) = \exp(-\mu^2 - \nu^2) H_m(\sqrt{2}\mu) H_n(\sqrt{2}\nu)$ , ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ )。显然, (3)~(6)式所表示的光束为厄米-高斯(HG)光束, 另外, 当  $\alpha = \pi/4$  时

$$\psi_{m,n}(x/w_0, y/w_0 | \pi/4) = \begin{cases} (-1)^n 2^m n! L_{n, m-n}(x/w_0, y/w_0) & (m \geq n) \\ (-1)^m 2^n m! L_{m, n-m}(x/w_0, y/w_0) & (m \leq n) \end{cases} \quad (7)$$

为拉盖尔-高斯(LG)光束。式中,  $L_{m, \pm n}(\mu, \nu) = \exp(-\mu^2 - \nu^2) (\mu \pm i\nu)^n L_m^{\pm n}(2\mu^2 + 2\nu^2)$ ,  $L_m^{\pm n}(\cdot)$  为拉盖尔多项式。这样, 由(1)、(3)~(7)式可以得到  $\alpha$  取任意值时的 HLG 光束。

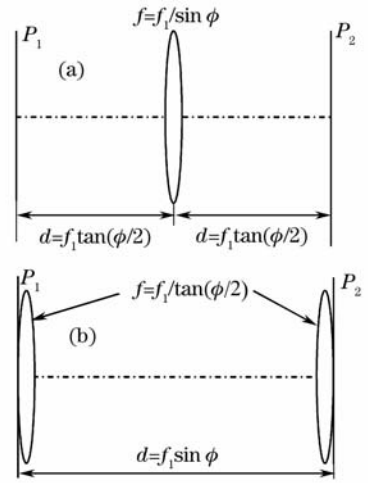


图 1 实现分数傅里叶变换的系统

(a) Lohmann I 型系统; (b) Lohmann II 型系统

Fig. 1 Optical system for performing fractional Fourier transform. (a) Lohmann I system; (b)

Lohmann II system

一个函数的  $p$  阶 FRFT 可以利用光束通过自由空间和球面薄透镜的传输来实现。通常采用 Lohmann I 型和 Lohmann II 型装置, 如图 1 所示。图中  $f_1$  为常数,  $\phi = p\pi/2$ ,  $f$  为透镜焦距,  $P_1, P_2$  分别为输入、输出面。 $d$  表示距离, 通过改变  $f, d$ , 可实现不同阶数  $p$  的 FRFT。Lohmann II 型 FRFT 系统传输矩阵为

$$\mathbf{R}(M) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & f_1 \sin \phi \\ -\sin \phi / f_1 & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

由柯林斯公式<sup>[14]</sup>

$$\xi_2(x_2, y_2) = \frac{e^{-ikz}}{i\lambda B} \iint \xi_1(x_1, y_1) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x_1^2 + y_1^2) + D(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]\right\} dx_1 dy_1. \quad (9)$$

忽略(9)式中的相位因子  $e^{-ikz}$ , 将(1)式代入(9)式, 得  $P_2$  面上的光场分布为

$$\psi_{m,n}(x_2, y_2 | \alpha) = \frac{1}{i\lambda B} \iint \sum_{k=0}^{m+n} i^k (\cos \alpha)^{n-k} \times (\sin \alpha)^{m-k} P_k^{(m-k, n-k)}(-2\cos 2\alpha) \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{w_0^2}\right) \times H_{m+n-k}\left(\frac{\sqrt{2}x_1}{w_0}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y_1}{w_0}\right) \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x_1^2 + y_1^2) + D(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]\right\} dx_1 dy_1, \quad (10)$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \exp[-(x-y)^2/2\mu] dx = (2\pi\mu)^{1/2} (1-2\mu)^{m/2} H_m(y/\sqrt{1-2\mu}). \quad (11)$$

对(10)式进行积分,并将(8)式代入,得

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(x_2, y_2 | \alpha) = & \frac{k\omega_0^2}{k\omega_0^2 \cos\phi + i2f_1 \sin\phi} \times \\ & \left( \frac{ik\omega_0^2 \cos\phi + 2f_1 \sin\phi}{ik\omega_0^2 \cos\phi - 2f_1 \sin\phi} \right)^{\frac{m+n}{2}} \times \\ & \exp\left[ -\frac{\omega_0^2 k^2 \sin\phi - i2kf_1 \cos\phi}{2f_1(2f_1 \sin\phi - ik\omega_0^2 \cos\phi)} (x_2^2 + y_2^2) \right] \times \\ & \sum_{k=0}^{m+n} i^k (\cos\alpha)^{m-k} (\sin\alpha)^{n-k} P_k^{(m-k, n-k)} \times \\ & (-2\cos 2\alpha) H_{m+n-k}(x_2/\omega_1) H_k(y_2/\omega_1), \quad (12) \end{aligned}$$

其中,  $\omega_1 = \sqrt{k^2 \omega_0^4 \cos^2\phi + 4f_1^2 \sin^2\phi} / \sqrt{2k\omega_0}$ . (13)

由(12)式可以看出, HLG 光束经过 FRFT 系统后,在 FRFT 面上的光场分布仍为 HLG 光束。它具有在传输中保持结构稳定的特性。此时的光场分布除随  $\alpha$  参量呈周期性变化外,还随阶数  $p$  周期性变化。当  $\alpha = 2k\pi, 2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi, 2k\pi + 3\pi/2$  时,光束变为 HG 光束,当  $\alpha = 2k\pi + \pi/4$  时,光束变为 LG 光束。

### 3 $p$ 阶分数傅里叶变换面上 HLG 光束的变化特性

利用  $I = \psi\psi^*$  得 FRFT 面上的光强分布为

$$\begin{aligned} I_{m,n}(x_2, y_2 | \alpha) = & \frac{\omega_0^2}{2\omega_1^2} \exp[-(x_2^2 + y_2^2)/\omega_1^2] \times \\ & \left| \sum_{k=0}^{m+n} i^k (\cos\alpha)^{m-k} (\sin\alpha)^{n-k} \times P_k^{(m-k, n-k)} \times \right. \\ & \left. (-2\cos 2\alpha) H_{m+n-k}(x_2/\omega_1) H_k(y_2/\omega_1) \right|^2. \quad (14) \end{aligned}$$

同理,将(3)~(6)式代入(9)式,并利用(11)式积分,可得,  $\alpha = 2k\pi, 2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi, 2k\pi + 3\pi/2$  时, HLG 光束在 FRFT 面上的光强分布为

$$I_{m,n}(x_2, y_2 | 0) = \exp[-(x_2^2 + y_2^2)/\omega_1^2] \times |H_m(x_2/\omega_1) H_n(y_2/\omega_1)|^2 \times \omega_0^2/2\omega_1^2, \quad (15)$$

$$I_{m,n}(x_2, y_2 | \pi/2) = \exp[-(x_2^2 + y_2^2)/\omega_1^2] \times |H_n(x_2/\omega_1) H_m(-y_2/\omega_1)|^2 \times \omega_0^2/2\omega_1^2, \quad (16)$$

$$I_{m,n}(x_2, y_2 | \pi) = \exp[-(x_2^2 + y_2^2)/\omega_1^2] \times |H_m(-x_2/\omega_1) H_n(-y_2/\omega_1)|^2 \times \omega_0^2/2\omega_1^2, \quad (17)$$

$$I_{m,n}(x_2, y_2 | 3\pi/2) = \exp[-(x_2^2 + y_2^2)/\omega_1^2] \times |H_n(-x_2/\omega_1) H_m(y_2/\omega_1)|^2 \times \omega_0^2/2\omega_1^2. \quad (18)$$

#### 3.1 光强随参量 $\alpha$ 的变换

利用(14)~(18)式进行数值计算,可得到 FRFT 面上不同的  $\alpha$  参量对应的 HLG 光束的光强分布,如图 2 所示。计算所用光束参量为  $m = 3, n = 1, \lambda = 632.8 \text{ nm}, f_1 = 1/\lambda, \omega_0 = 5 \text{ mm}, p = 1, 3$ 。

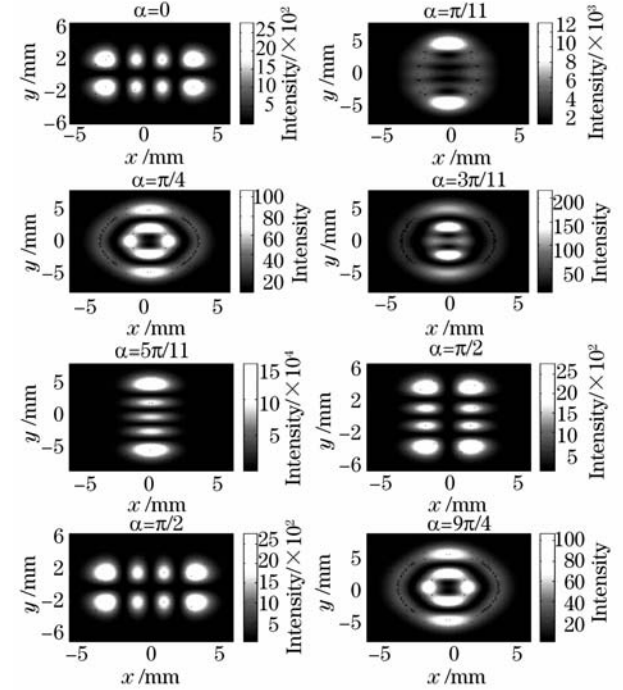


图 2 分数傅里叶变换面上光强分布随  $\alpha$  的变化

Fig. 2 Variation of the intensity on the FRFT plane with parameter  $\alpha$

图 2 中,  $\alpha = \pi/4$  和  $9\pi/4$  时对应的光强分布完全相同。可知,光强图样随  $\alpha$  参量呈周期变化,变化周期  $T = 2\pi$ ,与理论分析一致。当  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  时, HLG 光束在 FRFT 面上的光强分布和对称性与  $\alpha$  参量有关,不同的  $\alpha$  参量对应的光束的光强分布差异很大。且当  $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  时,对应的光强分布为厄米-高斯分布;当  $\alpha = \pi/4$  时,对应的光强分布为拉盖尔-高斯分布。

#### 3.2 光强随分数傅里叶变换阶数 $p$ 的变换

利用(15)~(18)式进行数值计算,可得到不同阶 FRFT 面上 HLG 光束的光强分布,图 3 是 HLG 光束在 FRFT 面上  $p = 0, 0.4, 0.75, 1, 1.4, 2$  时的等光强线分布。计算用光束参量为:  $m = 2, n = 2, \omega_0 = 5 \text{ mm}, f_1 = 1/\lambda, \lambda = 632.8 \text{ nm}, \alpha = 2\pi/11$ 。 HLG 光束通过不同阶数的 FRFT 系统时,光束形

状保持不变。但从图中可以看出,FRFT 阶数  $p$  对二维 HLG 光束的光斑大小影响很大,且随  $p$  呈周期性变换,周期为 2。在  $\alpha, m, n$  确定后,当  $p = 2k + 1$  时,光斑达到极小值;  $p = 2k$  时,光斑达到极大值。因而可以根据需要,选择合适的  $p$  值,从而得到需要的光斑大小。

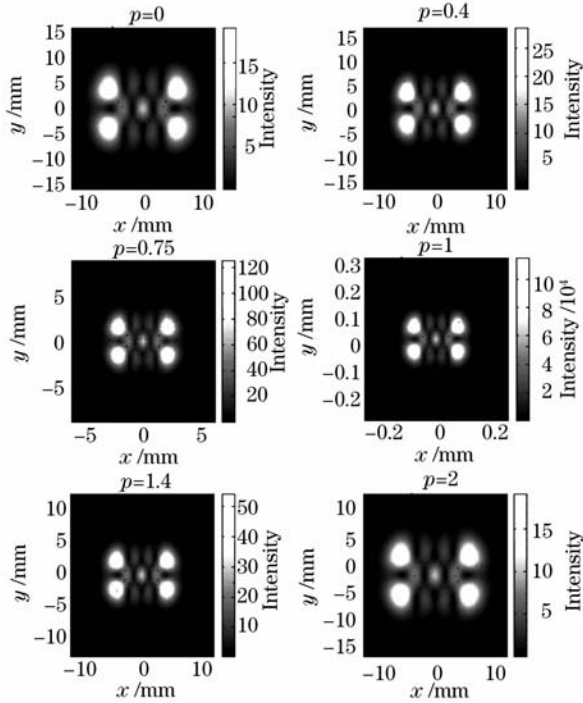


图 3 分数傅里叶变换面上光强分布随  $\alpha$  的变化

Fig. 3 Variation of the intensity on the FRFT plane with fractional transform order  $p$

### 3.3 光强随模指数 $m, n$ 的变换

图 4 表示 FRFT 面上等光强线分布随模指数  $m, n$  的变化。计算所用光束参量为  $\omega_0 = 5 \text{ mm}$ ,  $f_1 = 1/\lambda$ ,  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ,  $\alpha = 2\pi/11$ ,  $p = 1.3$ 。从图中

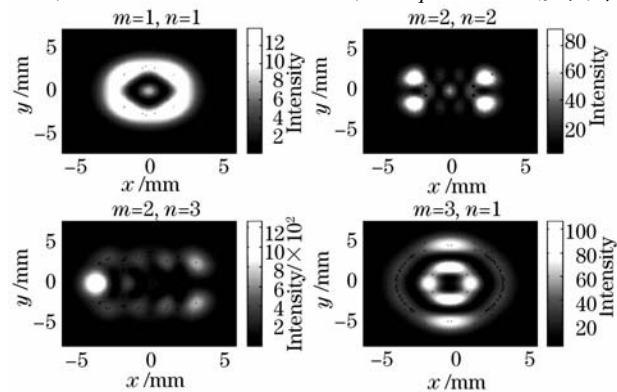


图 4 分数傅里叶变换面上等光强分布曲线随模指数  $m, n$  的变化

Fig. 4 Variation of the intensity contour on the FRFT plane with the mode indices  $m, n$

可以看出,当  $\alpha, p$  确定时,不同的模指数  $m, n$  所对应的光束光强分布也不同。

## 4 结 论

利用 Collins 积分公式,导出了 HLG 光束在 FRFT 面上的光强分布解析式,并通过数值计算研究了 FRFT 面上 HLG 光束的变换特性。当  $\alpha = 2k\pi, 2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \pi, 2k\pi + 3\pi/2$  时,对应的光强分布为厄米-高斯分布;当  $\alpha = 2k\pi + \pi/4$  时,对应的光强分布为拉盖尔-高斯分布;HLG 光束通过 FRFT 系统后,形状保持不变;HLG 光束在 FRFT 面上的光强分布明显受到参量  $\alpha, p, m, n$  的影响,且随参量  $\alpha, p$  周期性变化,周期分别为  $2\pi, 2$ 。由于 HLG 光束是一类较为普遍的光束,而 FRFT 系统是一类特殊的光学系统,因此,选择合适的参量  $\alpha, p, m, n$ , 就可以得到需要的光强分布。所得结果对光束整形、光束在 FRFT 面上的研究有应用价值,对光信息传输具有一定的参考价值。

## 参 考 文 献

- Pan Liuzhan, Ding Chaoliang, Peng Yufeng. On-axis spectral switches of Gaussian Schell-model beams focused by an astigmatic aperture Lens[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(6): 1116~1121  
潘留占,丁超亮,彭玉峰. 被光阑像散透镜聚焦高斯-谢尔模型光束轴上的光谱开关[J]. *光学学报*, 2007, **27**(6): 1116~1121
- Pan Liuzhan. Far-field behavior of partially polarized Gaussian Schell-model beams diffracted through an aperture[J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(8): 1250~1255  
潘留占. 被光阑衍射部分偏振高斯-谢尔模型光束的远场特性[J]. *光学学报*, 2006, **26**(8): 1250~1255
- Wu Ping, Lü Baida, Chen Tianlu. Fractional Fourier transform of beams in the use of Wigner distribution function method[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(2): 658~663  
吴平,吕百达,陈天禄. 光束分数傅里叶变换的 Wigner 分布函数分析方法[J]. *物理学报*, 2005, **54**(2): 658~663
- Chen Tianlu, Wu Ping. Fractional Fourier transforms for Cosh-Gaussian beams[J]. *Chinese J. Lasers*, 2005, **32**(7): 908~912.  
陈天禄, 吴平. 双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶变换特性研究[J]. *中国激光*, 2005, **32**(7): 908~912
- Qu Weijuan, Yan Aimin, Liu Liren *et al.*. Fractional Talbot effect of 2D skewed periodic array[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(3): 356~360  
曲伟娟, 闫爱民, 刘立人 等. 二维斜周期阵列的分数泰伯效应[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3): 356~360
- Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng *et al.*. Complex optical field retrieved from intensity distributions on several fractional Fourier transform planes[J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(12): 1621~1625  
曾发, 谭峭峰, 魏晓峰 等. 基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(12): 1621~1625
- E. G. Abramochkn, V. G. Volostnikov. Generalized Gaussian beams [J]. *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.*, 2004, **6**(5): 157~161

- 8 Zheng Zhen, Liu Yongxing, Lü Baida. Propagation properties of Hermite-Laguerre-Gaussian beams [J]. *Laser Technology*, 2005, **29**(6): 641~644  
郑 振, 刘永欣, 吕百达. 厄米-拉盖尔-高斯光束的传输特性[J]. *激光技术*, 2005, **29**(6): 641~644
- 9 Kailiang Duan, Baida Lü. Propagation of Hermite-Laguerre-Gaussian beams through a paraxial optical ABCD system with rectangular hard-edged aperture [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **250**: 1~9
- 10 Kang Xiaoping; He Zhong; Lü Baida. The beam quality of vectorial nonparaxial Hermite-Laguerre-Gaussian beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(9): 4569~4574  
康小平, 何 仲, 吕百达. 矢量非傍轴厄米-拉盖尔-高斯光束的光束质量[J]. *物理学报*. 2006, **55**(9): 4569~4574
- 11 Guoquan Zhou, Jun Zheng . Vectorial structure of Hermite - Laguerre - Gaussian beam in the far field[J]. *Optic & Laser Technology*, 2008, **40**: 858~863
- 12 Xiaoping Kang, Zhong He, Baida Lu. Far-field properties and beam quality of vectorial Hermite - Laguerre - Gaussian beams beyond the paraxial approximation[J]. *Optic & Laser Technology*, 2007, **39**: 1046~1053
- 13 Wang Beizhan, Zhao Zhiguo, Lü Baida *et al.*. Vectorial Hermite - Laguerre - Gaussian beams beyond the paraxial approximation[J]. *Chinese Physics*, 2007, **16**(1): 143~147
- 14 Lü Baida . *Laser Optics - Laser Beam Propagation and Beam Quality Control* [M]. Second Edition, Chengdu: Sichuan University Press, 1992. 53~54  
吕百达. *激光光学-激光束的传输变换和光束质量控制*[M]. 第二版, 成都: 四川大学出版社, 1992. 53~54