第 36 卷 第 11 期
2009 年 11 月
中 国 激 光
CHINESE JOURNAL OF LASERS
Vol. 36, No. 11
November, 2009

文章编号：0258-7025(2009)11-2914-06

激光的复宗量厄米-高斯相干模表示

但有全[1,2] 张 彬[1] 李金全[1]

([1] 四川大学电子信息学院，四川 成都 610064；[2] 中国民航飞行学院物理教研室，四川 广汉 618307)

摘要 利用部分相干光理论，以具有双正交性质的复宗量厄米-高斯(EHG)模为基底，推导出激光的 EHG 模相关系数(MCCs)和 M^2 因子公式，建立了激光的 EHG 相干模表示与对应的常规厄米-高斯(SHG)相干模表示之间的关系，并讨论了两种典型的应用例。研究结果表明，激光的 EHG 模相关系数可以通过 SHG 模相关系数得到；当同阶模式的权重因子相同时，由彼此互不相关的 EHG 模式叠加而成的光束比由彼此互不相关的 SHG 模式叠加而成光束的光束质量更好。

关键词 激光光学；复宗量厄米-高斯模；双正交基底；模相关系数；M^2 因子

中图分类号 TN241 **文献标识码** A **doi**：10.3788/CJL20093611.2914

Elegant Hermite-Gaussian Coherent-Mode Representation of Laser Light

Dan Youquan[1,2] Zhang Bin[1] Li Jinquan[1]

([1] *College of Electronics Information, Sichuan University, Chengdu, Sichuan* 610064, *China*
[2] *Department of Physics, Civil Aviation Flight University of China, Guanghan, Sichuan* 618307, *China*)

Abstract By using the theory of partially coherent light and the basis set of biorthogonal elegant Hermite-Gaussian (EHG) modes, the analytical expressions for the mode coherence coefficients (MCCs) and M^2-factor of laser light have been derived. The relation between the coherent-mode representation of laser beams in terms of EHG modes and that in terms of corresponding standard Hermite-Gaussian (SHG) modes has been built up. Furthermore, two typical application examples have been discussed. It can be shown that the MCCs in EHG coherent-mode representation can be obtained by use of the MCCs in SHG coherent-mode representation; for the case of the modes with the same orders having the same weight factors, the beam quality of the laser beams that are made up of a superposition of mutually uncorrelated EHG modes is better than that of mutually uncorrelated SHG modes.

Key words laser optics; elegant Hermite-Gaussian modes; biorthogonal basis set; mode coherence coefficients; M^2-factor

1 引 言

由于高增益、大口径以及激光控制参数的变化等因素，高功率激光器输出的激光通常具有复杂的多模结构，且模式间存在一定的相关性[1~4]。常规厄米-高斯(SHG)模[5]是稳定球面腔的本征模式，其等相面在近轴附近为球面，且 SHG 函数具有正交性，因此，人们广泛采用 SHG 模来研究激光的模相关、模结构以及相干模分解[6~10]。然而，SHG 光束通过一般的复元素近轴光学系统时，通常会变换成复宗量厄米-高斯(EHG)光束[5]。此外，Palma 等[11,12]的研究表明，SHG 光束在吸收或增益介质中传输时将变换为复宗量厄米-高斯光束，Laabs 等[13]则证实了三维的 SHG 模可转化为扭曲的复宗量厄米-高斯模。在这些情形中，由于厄米函数的宗量为复宗量，相应的光束等相面也变成了复杂的非球面，采用 SHG 模来分析显得比较复杂[14]。

由于厄米函数和高斯函数的宗量均为相同复数标度因子[5,15]的复宗量厄米-高斯模也是近轴波动

收稿日期：2008-10-12；**收到修改稿日期**：2008-11-26

基金项目：教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0784)和四川省青年科技基金(05ZQ026-013)资助项目。

作者简介：但有全(1964—)，男，博士研究生，副教授，主要从事光束的传输与控制等方面的研究。
E-mail：dandin12x@163.com

导师简介：张 彬(1969—)，女，教授，博士生导师，主要从事光物理和技术等方面的研究。E-mail：zhangbinff@sohu.com

方程以及复元素光腔[5,14]的本征模，其等相面为非球面。当阶数 $n>1$ 时，EHG 光束与 SHG 光束传输特性明显不同[15]，且 EHG 光束比同阶 SHG 光束的 M^2 因子小，光束质量更好[15]，因此，将激光表示为彼此相关或不相关的 EHG 模的叠加，研究其传输特性有时会更加方便。然而，EHG 函数在通常意义下不是正交的，而是与其伴随函数构成双正交关系[5]，但其伴随函数不能归一化，所以激光的这种 EHG 模表示在一般情况下是否存在以及模相关系数如何确定等问题是需要研究的。近来的研究表明，EHG 模与 SHG 模有着密切的联系，EHG 光束可视为有限个 SHG 模的相干叠加[9]。考虑到这种联系，本文从部分相干光理论出发，研究了激光的 EHG 相干模表示。进一步考虑到在许多实际应用中，如高功率激光器输出的多模激光束和激光核聚变中常要求的平顶光束等，可采用模式间相互独立的 SHG 光束叠加的方法来合成[16]；而 EHG 光束又可由多种方法获得[17]，多模激光束也可由模式间相互独立的 EHG 光束叠加而合成。因此，本文最后利用激光的 EHG 相干模表示对上述两类合成光束进行了分析与比较。

2　双正交的 EHG 模与正交的 SHG 模

假设部分相干的激光束沿 z 轴传播，在准单色场近似下，则可以将 $z=\mathrm{const}$ 平面处的瞬时光场以正交 SHG 模为基底展开为[1]

$$E(x,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e_n(z,t)u_n(x,z),\tag{1}$$

式中 $e_n(z,t)$ 为含时间的模系数，n 为模阶次，$u_n(x,z)$ 为归一化的第 n 阶 SHG 模，其表达式为[5]

$$u_n(x,z)=\left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2}\left[\frac{q_0}{q(z)}\right]^{1/2}\left[\frac{q_0}{q_0^*}\frac{q^*(z)}{q(z)}\right]^{n/2}\exp(-\mathrm{i}kz)\mathrm{H}_n\left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}kx^2}{2q(z)}\right],\tag{2}$$

式中 * 代表复共轭，w_0 为零阶 SHG 光束的束腰宽度，k 为波数，光束的复参数为

$$q_0=\mathrm{i}\,\frac{1}{2}kw_0^2,\quad q(z)=q_0+z\tag{3}$$

以及 $1/w^2(z)=(-k/2)\mathrm{Im}[1/q(z)]$，Im 表示复数取虚部运算。

考虑一种与(2)式表示的 SHG 模相对应的归一化的第 n 阶 EHG 模为[5,17]

$$\varphi_n(x,z)=\left(\frac{2}{\pi w_0^2}\right)^{1/4}\left[\frac{2^n n!}{(2n)!}\right]^{1/2}\left[\frac{q_0}{q(z)}\right]^{(n+1)/2}\exp(-\mathrm{i}kz)\mathrm{H}_n\left\{\left[\frac{\mathrm{i}k}{2q(z)}\right]^{1/2}x\right\}\cdot\exp\left[-\frac{\mathrm{i}kx^2}{2q(z)}\right].\tag{4}$$

比较由(2)式，(4)式表示的 SHG 模系和 EHG 模系不难看出，两种模系零阶模的束腰宽度 w_0 相同，并且两种模系中 $n=0,1$ 阶模完全相同，而高阶模($n>1$)则不相同。利用 SHG 模的正交关系

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_n^*(x,z)u_m(x,z)\mathrm{d}x=\delta_{mn}\tag{5}$$

以及 (2)～(4)式和文献[6]中的(8)式，经计算可得 SHG 和对应的 EHG 模之间的联系为[9]

$$\varphi_m(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{mn}u_n(x,z),\tag{6}$$

式中

$$\begin{cases}\gamma_{mn}=(-1)^{\frac{m-n}{2}}\dfrac{(m!)^{3/2}2^{n/2}}{\sqrt{(2m)!n!}[(m-n)/2]!}, & (0\leqslant n\leqslant m，且\ n\ 与\ m\ 奇偶性相同)\\ \gamma_{mn}=0, & (n>m，或\ n\ 与\ m\ 奇偶性不同)\end{cases}\tag{7}$$

(7)式表明，γ_{mn} 的第一下标大于第二下标(即 $n>m$)时，$\gamma_{mn}=0$，而(6)式是对第一下标 n 求和，因此，(6)式的求和中实际仅有有限项不为零。类似计算可以证明，由(2)式表达的任意阶 SHG 模，也可以表达为有限个 EHG 模之和，即

$$u_m(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{mn}\varphi_n(x,z),\tag{8}$$

式中

$$\begin{cases}\beta_{mn}=\dfrac{\sqrt{m!(2n)!}2^{-m/2}}{(n!)^{3/2}[(m-n)/2]!}, & (0\leqslant n\leqslant m，且\ n\ 与\ m\ 奇偶性相同)\\ \beta_{mn}=0, & (n>m，或\ n\ 与\ m\ 奇偶性不同)\end{cases}\tag{9}$$

(9)式表明 β_{mn} 的第一下标大于第二下标(即 $n>m$)时，$\beta_{mn}=0$。由此可见，$[\varphi_n(x,z)]$ 也是一组完备的模

系[5]，即凡能被 SHG 模展开的光束，也能被 EHG 模展开。因此，可将(1)式进一步表示为

$$E(x,z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{mn}e_n(z,t)\right]\varphi_m(x,z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(z,t)\varphi_n(x,z),\tag{10}$$

式中 $g_n(z,t)$ 为第 n 阶 EHG 模的系数。进一步利用厄米多项式的正交关系[5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}_n(\sqrt{c}x)\cdot\mathrm{H}_m(\sqrt{c}x)\exp(-cx^2)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{c}}2^n n!\delta_{mn},(\mathrm{Re}[c]>0)\tag{11}$$

并令伴随函数为

$$\Psi_n(x,z)=\frac{1}{b_n^*}\mathrm{H}_n\left[\sqrt{\frac{-\mathrm{i}k}{2q^*(z)}}x\right],\tag{12}$$

式中

$$b_n=(2\pi w_0^2)^{1/4}\frac{(2^n n!)^{3/2}}{\sqrt{(2n)!}}\exp(-\mathrm{i}kz)\left[\frac{q_0}{q(z)}\right]^{n/2},\tag{13}$$

于是，EHG 模与其伴随函数的双正交关系为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_n^*(x,z)\varphi_m(x,z)\mathrm{d}x=\delta_{mn}.\tag{14}$$

3 模相关系数

在准单色场近似下，部分相干光束可采用互强度[1,18]来描述，即

$$J(x_1,x_2,z)=\langle E(x_1,z,t)E^*(x_2,z,t)\rangle,\tag{15}$$

式中〈〉表示系综平均。

将部分相干光场视为各态历经的，则系综平均即为时间平均[18]，因而不含时间部分的因子与系综平均无关，于是，将(10)式代入(15) 式可得

$$J(x_1,x_2,z)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}D_{mn}(z)\varphi_m(x_1,z)\varphi_n^*(x_2,z),\tag{16}$$

式中

$$D_{mn}(z)=\langle g_m(z,t)g_n^*(z,t)\rangle\tag{17}$$

为以双正交的 EHG 模为基底的模相关系数。利用 (14)，(16)式可得

$$D_{mn}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_m^*(x_1,z)J(x_1,x_2,z)\Psi_n(x_2,z)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.\tag{18}$$

(18)式表明，与正交模系下的模相关系数表达式[1]明显不同，以 EHG 模为基底的模相关系数需要利用其伴随函数来计算。然而，不难证明，$D_{mn}(z)=D_{nm}^*(z)$ 以及 $|D_{mn}(z)|\leqslant[D_{mm}(z)]^{1/2}[D_{nn}(z)]^{1/2}$。因此，(18) 式表示的模相关系数矩阵$[D_{mn}(z)]$与正交模系下的模相关系数矩阵一样，仍是半正定的厄米矩阵。

将(1)和(8)式代入(15)式，考虑到 SHG 模系下的模相关系数[1]为 $C_{mn}(z)=\langle e_m(z,t)e_n^*(z,t)\rangle$，并与(16)式比较可得

$$D_{kl}(z)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}C_{mn}(z)\beta_{km}\beta_{ln}^*=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}C_{mn}(z)\beta_{km}(\beta^+)_{nl}.\tag{19}$$

(19)式表明，以 EHG 模为基底的模相关系数矩阵 $\boldsymbol{D}$ 与 SHG 模相关系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的关系为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\beta}^+,\tag{20}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}$ 为两种模之间的关系矩阵，其矩阵元 β_{mn} 由(9)式给出，$\boldsymbol{\beta}^+$ 矩阵是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置共轭矩阵。类似可得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\gamma}^+,\tag{21}$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 矩阵的矩阵元 γ_{mn} 由(7)式给出，$\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 均为一个实的上三角形矩阵，不难证明 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}^{-1}$。

(20)式和(21)式表明，根据光束的 SHG 模相关系数，可以导出光束的 EHG 模相关系数，反之亦然。在特定的物理条件下，已发展了数值计算，平均光强分布测量，M^2 因子测量等多种方法[1~3,7]，从理论和实验上确定激光的 SHG 模相关系数，因此，同样可以利用这些方法来确定激光的 EHG 模相关系数。

在(16)式中，令 $x_1 = x_2 = x$，可得到激光的光强公式为

$$I(x,z) = J(x,x,z) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} D_{mn}(z)\varphi_m(x,z)\varphi_n^*(x,z). \tag{22}$$

对(22)式两边积分，并利用(5)～(7)式、文献[19]中的(36)式以及厄米函数的性质可导出激光束的总功率为

$$W = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} W_{mn} D_{mn}(z), \tag{23}$$

式中

$$\begin{cases} W_{mn} = (-1)^{(m-n)/2} \dfrac{(m+n)!}{[(m+n)/2]!}\sqrt{\dfrac{m!n!}{(2m)!(2n)!}}, & (m\text{ 与 }n\text{ 的奇偶性相同}) \\ W_{mn} = 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{24}$$

4　激光的 M^2 因子公式

根据(22)式和(23)式可得 $z=0$ 面上的归一化光强分布为

$$I'(x) = I(x,0)/W = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} D'_{mn}\varphi_m(x,0)\varphi_n^*(x,0), \tag{25}$$

式中归一化的模相关系数即权重因子为

$$D'_{mn} = D_{mn}(0)/W. \tag{26}$$

令空间一阶矩和空间频率一阶矩为零(这可以通过简单坐标系变换得到)，则光强的二阶矩为

$$\sigma_x^2 = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} D'_{mn}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi_m(x)\varphi_n^*(x)\mathrm{d}x. \tag{27}$$

将(4)式代入(27)式，经计算得光强的二阶矩为

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{4mn-(m+n-1)^2}{m+n-1}\right]W_{mn}D'_{mn}. \tag{28}$$

类似计算得到空间频率域中的归一化光强公式为

$$I'(S_x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} D'_{mn}\widetilde{\varphi}_m(S_x)\widetilde{\varphi}_n^*(S_x), \tag{29}$$

式中 $\widetilde{\varphi}_m(S_x)$为第 m 阶 EHG 模的傅里叶变换 $\widetilde{\mathcal{F}}[\varphi_m(x)]$，即

$$\widetilde{\varphi}_m(S_x) = \widetilde{\mathcal{F}}[\varphi_m(x)] = (2\pi w_0^2)^{1/4}\left[\frac{2^m m!}{(2m)!}\right]^{1/2} w_0^m \mathrm{i}^m(-2\pi S_x)^m \exp(-\pi^2 w_0^2 S_x^2), \tag{30}$$

并利用公式[20]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x)^n\exp[-(x-y)^2]\mathrm{d}x = (2\mathrm{i})^{-n}\sqrt{\pi}\mathrm{H}_n(\mathrm{i}y) \tag{31}$$

可计算出空间频率域中的光强二阶矩 $\sigma_{S_x}^2$。进一步由 M^2因子定义[21]，可得

$$M_x^2 = 4\pi\sigma_x\sigma_{S_x} = \left\{\left[\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4mn-(m+n-1)^2}{m+n-1}W_{mn}D'_{mn}\right]\left[\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(m+n+1)W_{mn}D'_{mn}\right]\right\}^{1/2}. \tag{32}$$

分析(32)式可知，由于 m,n 的奇偶性相同项的 $W_{mn}\neq 0$，因此，一般来讲，M^2 因子不仅与各 EHG 模式的权重因子 D'_{mm} 有关，还与所有奇偶性相同的第 m,n 阶模式之间的模相关系数权重因子 D'_{mn} 均有关。

5　讨　　论

考虑由一组模式间不相关的 EHG 模叠加而成的部分相干光束，此时，$D'_{mn} = D'_{mm}\delta_{mn}$，将其代入(32) 式，并注意到(24) 式，给出 $W_{mm} = 1$，于是

$$M_{xE}^2 = \left\{\left[\sum_{m=0}^{+\infty}(2m+1)D'_{mm}\right]\left[\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(4m-1)}{(2m-1)}D'_{mm}\right]\right\}^{1/2}. \tag{33}$$

由于

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(4m-1)}{(2m-1)}D'_{mm}\leqslant\sum_{m=0}^{+\infty}3D'_{mm}=3,\text{则 }M_{xE}^2\leqslant\left\{3\left[\sum_{m=0}^{+\infty}(2m+1)D'_{mm}\right]\right\}^{1/2}.$$

(33)式表明，由两个以上互不相关的 EHG 模式叠加的光束，其 M^2 因子并不能由各模式的 M^2 因子得到，这与由互不相关的 SHG 模式叠加的光束有明显的不同。对只含一个 EHG 模的光束，即第 n 阶 EHG 光束，此时，$D'_{mm}=\delta_{mn}$，(33)式给出的结果与文献[22]一致。

另一方面，考虑由一组模式间不相关的 SHG 模叠加而成的部分相干光束，此时，相应的权重因子为

$$C'_{mn}=\frac{C_{mn}}{W}=C'_{mm}\delta_{mn}.\tag{34}$$

将(34)式代入(19)式，可得 $D'_{mn}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}C'_{kk}(z)\beta_{mk}\beta_{nk}^*$，再把此式代入(32)式，并利用(9)式可得

$$M_{xS}^2=\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)C'_{kk}(z),\tag{35}$$

这与 Siegman[21] 的结果一致。

对于分别由 EHG 模和 SHG 模非相干叠加而成的部分相干光束，若同阶数模式的权重因子相同，即 $D'_{mm}=C'_{mm}$，则当 $m>1$ 时，由(33)和(35)式可得

$$\frac{M_{xE}^2}{M_{xS}^2}=\left\{\frac{\sum_{m=0}^{+\infty}[(4m-1)/(2m-1)]D'_{mm}}{\sum_{m=0}^{+\infty}(2m+1)D'_{mm}}\right\}^{1/2}<1.\tag{36}$$

由此可见，当同阶数模式的权重因子相同时，由彼此互不相关的 EHG 模式叠加的部分相干光束，其 M^2 因子小于由彼此互不相关的 SHG 模式叠加的部分相干光束，即前者光束质量更好。当光束只有一个模式时，则(36)式给出的结果与文献[9,15]的结果是一致的。

6 结 论

考虑到 EHG 模与 SHG 模有着密切的联系，本文从部分相干光理论出发，以双正交的 EHG 模为基底，建立了相应的激光相干模表示，给出了 EHG 模相关系数以及由 EHG 模相干叠加而成激光束的 M^2 因子解析表达式。以彼此互不相关的 EHG 模式叠加的部分相干光束以及由彼此互不相关的 SHG 模式叠加的部分相干光束为例，给出了相应的 M^2 因子解析表达式。研究结果表明，由 EHG 模非相干叠加的光束与由 SHG 模非相干叠加的光束有明显不同的特征，前者的 M^2 因子不能由各模的 M^2 因子得到，当同阶数模式的权重因子相同时，由 EHG 模非相干叠加的光束比由 SHG 模非相干叠加的光束质量更好。

参 考 文 献

1 K.-M. Du, G. Herziger, P. Loosen *et al.*. Coherence and intensity moments of laser light[J]. *Opt. Quant. Electron.*, 1992, **24**(9): 1081～1093

2 K.-M. Du, G. Herziger, P. Loosen *et al.*. Measurement of the mode coherence coefficients[J]. *Opt. Quant. Electron.*, 1992, **24**(9): 1119～1127

3 K.-M. Du, G. Herziger, P. Loosen *et al.*. Computation of the statistical properties of laser light[J]. *Opt. Quant. Electron.*, 1992, **24**(9): 1095～1108

4 Cheng Cheng, Ma Xingchao, Xu Zhousu *et al.*. Measurement of temporal depending lasing modes of a high power transverse-flow CO_2 laser processor [J]. *Chinese. J. Lasers*, 2008, **35**(4): 549～554

程 成，马行超，许周速 等. 高功率横流 CO_2 激光横模随时间变化的测量[J]. 中国激光, 2008, **35**(4): 549～554

5 A. E. Siegman. Lasers [M]. California: University Science Books, 1986. 626～922

6 Zhang Bin, Lü Baida. Mode correlation and coherent-mode representation of multi-mode laser beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, **48**(1): 58～64

张 彬，吕百达. 多模激光的模相关和相干模表示[J]. 物理学报, 1999, **48**(1): 58～64

7 Zhang Bin, Wen Qiao, Chu Xiaoliang, Mode correlation and coherent-mode decomposition of laser beams[J]. *Chinese Phys.*, 2003, **12**(9): 981～985

8 Zeng Qinggang, Wen Qiao, Zhang Bin. The generalized M^2-factor and coherent-mode decomposition of truncated flat-topped beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2004, **53**(5): 1357～1361

曾庆刚，文 侨，张 彬. 截断平顶光束的广义 M^2 因子和相干模分解[J]. 物理学报, 2004, **53**(5): 1357～1361

9 Dan Youquan, Zhang Bin. Coherent-mode representation of the elegant Hermite-Gaussian beams[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(2): 712～716

但有全，张 彬. 复宗量厄米-高斯光束的相干模表示[J]. 物理

学报，2006，**55**(2)：712～716

10 Lu Wei, Liu Liren, Sun Jianfeng *et al.*. Phase-space product of beam from Gaussian Schell-model source by using coherent-mode representation[J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(3): 471～476
鲁　伟，刘立人，孙建锋 等. 相干模表示的部分相干高斯-谢尔光束的相位-空间积[J]. 光学学报，2007，**27**(3)：471～476

11 C. Palma, P. De Santis, G. Cincotti *et al.*. Propagation of partially coherent beams in absorbing media[J]. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**(5): 1123～1135

12 C. Palma, P. De Santis, G. Cincotti *et al.*. Propagation and coherence evolution of optical beams in gain media[J]. *J. Mod. Opt.*, 1996, **43**(1): 139～153

13 H. Laabs, C. Gao, H. Weber. Twisting of three-dimensional Hermite-Gaussian beams[J]. *J. Mod. Opt.*, 1999, **46**(1): 709～719

14 L. W. Casperson, D. G. Hall, A. A. Tovar. Sinusoidal-Gaussian beams in complex optical systems[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(12): 3341～3348

15 S. Saghafi, C. J. R. Sheppard, J. A. Piper. Characterising elegant and standard Hermite-Gaussian beam modes[J]. *Opt. Commun.*, 2001, **191**(3～6): 173～179

16 F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi *et al.*. Intensity-based modal analysis of partially coherent beams with Hermite-Gaussian modes[J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(13): 989～991

17 E. Zauderer. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams[J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986, **3**(4): 465～469

18 L. Mandel, E. Wolf. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 147～373

19 A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger *et al.*. Higher Transcendental Functions. Vol. II[M]. New York: McGraw-Hill, 1953. 195

20 I. S. Gradshtein, I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products[M]. New York: Academic, 1980. 338

21 A. E. Siegman. New developments in laser resonators[C]. *SPIE*, 1990, **1224**: 2～14

22 S. Saghafi, C. J. R. Sheppard. The beam propagation factor for higher order Gaussian beams[J]. *Opt. Commun.*, 1998, **153**(4～6): 207～210