

文章编号: 0258-7025(2009)11-2888-05

# 周期弯晶摆动场辐射的混沌振荡

邵明珠 罗诗裕 王红成

(东莞理工学院电子工程学院, 广东 东莞 523106)

**摘要** 周期弯曲晶体中做沟道运动的带电粒子,在沟道辐射的同时,还将产生摆动场辐射。引入正弦平方势,并考虑运动阻尼和非线性影响,在经典力学框架内和偶极近似下,把粒子的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的摆方程。利用梅利尼科夫(Melnikov)方法分析了异宿轨道的分叉与系统进入斯梅耳(Smale)马蹄意义下的混沌行为。结果表明,系统进入混沌的临界条件与它的具体参数有关,只需适当调节这些参数就可以原则上避免或控制混沌,从而进一步保证系统有效输出 X-激光或  $\gamma$ -激光。

**关键词** 激光器;晶体摆动场辐射;沟道辐射;混沌;  $\gamma$ -激光;Melnikov 方法

**中图分类号** TN241.0434.1;O482.3;O415.5;TN248.6 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20093611.2888

## Chaotic Oscillation of Undulator Radiation in a Periodically Bent Crystal

Shao Mingzhu Luo Shiyu Wang Hongcheng

(College Of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong 523106, China)

**Abstract** Besides a channeling radiation there is an undulator radiation in an periodic bent crystal. A sine-squared potential is introduced to describe the motion behaviours of the particle in the system, the particle motion equation is reduced to the pendulum equation with a damping and a force terms in the classical mechanics frame and the dipole approximation. The bifurcation and the chaotic behaviours of a separatrix orbit with the Smale horseshoe are analysed by Melnikov method. The critical condition of system through to a chaos is found. It shown that the critical condition of the system entered in a chaos is related to its parameters, provided regulating a parameters of the system, the chaos can be avoided or controlled in principle. Thus the effective export of X-laser or  $\gamma$ -laser can be assured furtherly.

**Key words** lasers; crystalline undulator radiation; channeling radiation; chaos;  $\gamma$ -laser; Melnikov method

### 1 引 言

获得短波长、大功率的自由电子激光器是自由电子激光的发展方向之一,传统的方法是把自由电子激光推向更短的波长,但在技术上遇到了严重挑战。20 世纪 70 年代,苏联科学家库马霍夫发现了沟道辐射<sup>[1]</sup>。当带电粒子沿着晶体某些方向(特别是低晶面指数方向)运动时,就象进入了一条通道一样很容易穿透到晶体内部,这个现象称为沟道效应。经典物理学证明<sup>[2]</sup>,在电磁场中运动的带电粒子,只

要它的加速度不为零,就要自发地向外辐射电磁波。在晶格场中运动的带电粒子也不例外,强大的晶格场(可高达 1000 T)可以使辐射能量达到很高。做沟道运动的带电粒子也将不断向外辐射能量,这种辐射就是所谓沟道辐射。带电粒子的沟道辐射是由于粒子横向运动引起的,对于 10 MeV 的正电子,辐射能量可达千电子伏量级。20 世纪 80 年代以来,人们就先后预言了可以把自发的沟道辐射改造为相干辐射,并提出了各种可能的方案。比如,有人提出

收稿日期: 2008-12-27; 收到修改稿日期: 2009-02-19

基金项目: 广东省自然科学基金(8151170003000010)资助课题。

作者简介: 邵明珠(1942—),女,教授,主要从事带电粒子与物质相互作用和沟道辐射等方面的研究。

E-mail: bgluoshy@dgut.edu.cn

如果能在晶体中产生一种稳定的驻波,则电子同驻波场相互作用,可望得到一种相干辐射;还有人提出将晶体弯曲,并通过沟道辐射在弯晶中的动力学衍射来获得相干光;也有人设想,利用沟道辐射与超晶格多层薄膜结构的动力学衍射来获得<sup>[3]</sup>。值得注意的是,20世纪90年代末,以科洛尔为代表的俄国彼得堡科学家们提出了用声学方法使沟道平面周期弯曲<sup>[4~8]</sup>,带电粒子在周期弯曲的晶体中运动时,除了产生自发的沟道辐射外,还将产生相干的摆动场辐射。自由电子激光的粒子束和光子束均在真空中运动,而晶体摆动场辐射和粒子束却运动在晶格场中。因此,不管是理论上、技术上还是实验上,晶体摆动场辐射面临的问题将比自由电子激光要复杂得多。科洛尔等在线性近似下,对沟道辐射和摆动场辐射进行了分析,明确指出利用周期弯曲晶体来获得短波长激光是完全可能的,也是完全可行的,并把注意力集中在实验的改进与技术的实现上。

由于技术和实验方法的限制,至今还未能实验室成功获得 X-激光或  $\gamma$ -激光,对这种新光源的认识,主要是在线性近似下获得的。由于非线性效应没有进一步考虑,由此而产生的分叉与混沌则可能影响系统的稳定性,从而构成至今还没有成功获得 X-激光或  $\gamma$ -激光的原因之一。本文在经典力学框架内进一步考虑运动阻尼和非线性的影响,把粒子的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程。利用梅利尼科夫(Melnikov)方法分析了异宿轨道的分叉与系统进入斯梅耳(Smale)马蹄意义下的混沌行为。结果表明,系统进入混沌的临界条件与它的具体参数有关,只需适当调节这些参数就可以原则上避免或控制混沌,从而进一步保证系统能够有效输出 X-激光或  $\gamma$ -激光。

## 2 粒子运动方程与晶体摆动场辐射

用声学方法将晶体周期弯曲,可望得到短波长的 X-激光或  $\gamma$ -激光。假设已经用声振动方法获得了这样的系统。整个实验装置由两部分组成,一部分是周期弯曲晶体,另一部分是高能粒子加速器。由于晶体的周期性,被沟道俘获的粒子在周期晶格场中运动将产生沟道辐射;由于晶体周期弯曲还将产生另外一种频率较低的辐射,因为这种辐射同自由电子激光摆动场辐射类似,即所谓晶体摆动场辐射。

设  $(x, z)$  平面是直沟道(未弯曲)情况下系统的横截面,相邻晶面间距为  $d$ ,粒子运动方向为  $z$ 。选择沟道中心为坐标原点,过原点作一平面与晶面

平行,这个平面称为沟道中心平面。在直角坐标系中, $x$ 轴垂直中心平面向上, $y$ 轴和 $z$ 轴位于中心平面内,且 $z$ 轴沿着束流方向, $y$ 轴与晶面平行(图中未画出)。严格说来,沟道粒子的运动问题是一个三维问题,考虑到晶体的平移对称性,坐标 $y$ 将不出现;如果粒子在 $x$ 方向的能量不是太大(即可以忽略晶格热振动和电子多重散射的影响),则粒子在 $z$ 方向的运动可以看作是守恒的,这时粒子的行为完全由 $x$ 方向的运动决定,从而将三维问题化为一维问题。

用声学方法将晶体表示为

$$x(z) = a \sin(2\pi z / \lambda_u) \quad (1)$$

弯曲(如图1所示)<sup>[4]</sup>,则晶面和沟道中心平面均按同样形式弯曲。其中 $a$ 是“振幅”, $\lambda_u$ 是周期变化的晶体摆动场“波长”。图中两组黑点表示晶体周期弯曲后相邻两个晶面呈周期变化的格点排列。注意到粒子沿 $z$ 方向运动时,在晶格场作用下将在 $x$ 方向做横向振动,在晶格场中做这种运动的带电粒子将不断向外辐射能量,这就是沟道辐射;同时,由于周期弯曲,粒子还将产生晶体摆动场辐射。

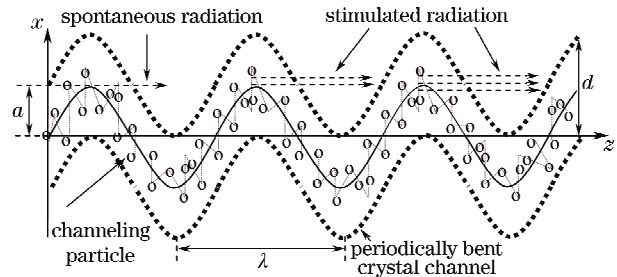


图1 周期弯曲晶体及晶体摆动场辐射与沟道辐射的示意图

Fig. 1 Periodically bent crystal and the crystalline undulator radiation and the channeling radiation schematically

在偶极近似下,粒子的横向运动可以用经典方法来描述。在弯晶沟道中运动的粒子,除了受到晶格场作用外,还要受到阻尼力和晶体弯曲产生的离心力作用。根据牛顿第二定律,粒子运动方程可表示为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\mu_0 \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dx} V(x) = p v \kappa(z), \quad (2)$$

其中 $V(x)$ 为粒子-晶体相互作用势, $p$ 为粒子动量, $v$ 为粒子速度,在超相对论情况下有 $v \approx c$ ;  $\mu_0$ 为阻尼系数,物理意义由文献[9]给出, $m = m_0 \gamma$ ,  $m_0$ 为粒子静止质量, $\gamma$ 为相对论因子。而

$$\kappa(z) = \kappa_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} z \quad (3)$$

是弯晶曲率,由(1)式的二阶导数近似给出,其中  $\kappa_0 = \Omega_n^2 a$ , 而  $z \approx ct$ 。

一般说来,相互作用势  $V(x)$  可以取不同形式(比如 Lindhard 势, Molierwe 势或正弦平方势等)。引入正弦平方势<sup>[10~15]</sup>

$$V(x) = K\beta \sin^2(\pi x/d), \quad (4)$$

其中  $\beta$  为势参数,而

$$K = \pi z_1 z_2 e^2 Nd^2, \quad (5)$$

式中  $d$  为晶面间距,  $Nd^2$  是晶体原子的面密度,  $z_1$  为入射粒子的原子序数,  $z_2$  为靶原子序数。令

$$\xi = 2\pi x/d, \delta = \frac{2\pi^2 K\beta}{md^2}, \tau = \delta^{1/2} t, \quad (6)$$

$$\mu = \mu_0/\delta^{1/2}, \omega = \Omega_n/\delta^{1/2}, f = \frac{2\pi p v \kappa_0}{m\delta d}, \quad (7)$$

可将运动方程(2)化为

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + 2\mu \frac{d\xi}{d\tau} + \sin \xi = f \cos \omega \tau, \quad (8)$$

可以看出,粒子在周期弯曲晶体中的运动可以等价描述为在直沟道中运动的粒子受到形如  $f \cos \omega \tau$  作用的受迫运动。方程(8)的等价系统为

$$\begin{cases} \xi' = \zeta \\ \zeta' = -\sin \xi + \epsilon(-2\mu\zeta + f \sin \omega \tau) \end{cases}, \quad (9)$$

其中  $\epsilon$  为小参数,表示伴随它的项为  $O(\epsilon)$  量级。方程(8)或(9)是一个典型的动力学系统,具有典型的全局分叉性质与混沌行为。

### 3 无扰动系统的相平面特征

对于无扰动系统有  $\epsilon = 0$ , 方程(9)化为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \zeta \\ \dot{\zeta} = -\sin \xi \end{cases}, \quad (10)$$

$\xi_s = 0$  和  $\xi_s = \pi$  分别是系统的平衡点和非平衡点。积分一次可得系统的 Hamiltonian 量

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos \xi), \quad (11)$$

根据  $h$  的大小,相平面上的轨道可分为 3 类。

1)  $h = 2$ 。 $h = 2$  的轨道是异宿(或分枝)轨道,它把相平面分为内外两个区域(如图 2 所示)。这两条轨道可表示为

$$\begin{cases} \xi = \pm 2 \arcsin(th\tau) \\ \zeta = \pm 2 \operatorname{sech}(\tau) \end{cases}, \quad (12)$$

其中  $\pm$  号分别表示上、下相平面的两条异宿轨道,粒子沿这条轨道运动的周期  $T^*$  为无穷。

2)  $0 < h < 2$ 。当  $0 < h < 2$  时,轨道是周期的,

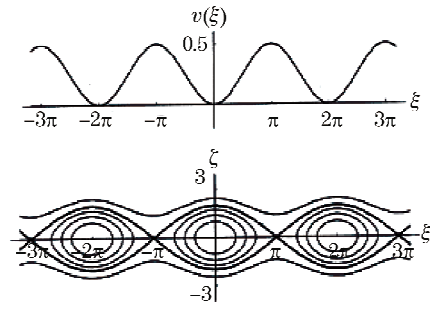


图 2  $Q = 0$  时系统的有效势和它的相平面特征  
从内到外  $h = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$

Fig. 2 Effective potential and the phase planar properties if  $Q = 0$ , where parameter  $h = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$  from inere to outer

描写的是粒子围绕平衡位置的周期运动,相应的解可表示为

$$\begin{cases} \xi = 2 \arcsin(ksn\tau) \\ \zeta = 2kcnc\tau \end{cases}, \quad (13)$$

其中  $k = h/2, k \in (0, 1)$ ,  $sn\tau$  和  $cnc\tau$  是 Jacobian 椭圆函数。粒子沿轨道(13)式的运动周期

$$T^o = 4K(\kappa), \quad (14)$$

$K(\kappa)$  是第一类椭圆积分。当  $h$  单调增加时,粒子的运动周期  $T^o$  从  $2\pi$  增加到无穷。

3)  $h > 2$ 。当  $h > 2$  时,轨道也是周期的,描写了粒子围绕不稳定平衡点的周期运动,且可表示为

$$\xi = \pm 2 \arcsin\left(\operatorname{sn} \frac{\tau}{\kappa}\right), \quad (15)$$

$$\zeta = \pm \frac{2}{\kappa} \operatorname{dn} \frac{\tau}{\kappa}, \quad (16)$$

式中  $\operatorname{dn}\tau$  为 Jacobian 椭圆函数。振动周期由

$$T^r = 2\kappa K(\kappa) \quad (17)$$

给出,当  $h$  单调减少时,周期  $T^r$  由零增加到无穷。图 2 给出了  $\epsilon = 0$  时系统的相平面特征。

### 4 异宿轨道的 Melnikov 函数与系统的混沌行为

#### 4.1 异宿轨道的 Melnikov 函数

对于两条异宿轨道(12)式,可构造 Melnikov 函数为

$$M_{\pm}^*(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_{\pm}^*(\tau) [-2\mu\zeta_{\pm}^*(\tau) + f \sin \omega(\tau + \tau_0)] d\tau = \pm \frac{2f\pi}{ch[(\pi/2)\omega]} [2\mu/\delta_{\pm} + \sin \omega\tau_0], \quad (18)$$

其中  $\zeta_{\pm}^*$  由(12)式给出,而

$$\delta_{\pm}^s = \pm \frac{\pi c_0}{4}, c_0 = f \left( ch \frac{\pi}{2} \omega \right)^{-1}, \quad (19)$$

在参数  $(f, \mu)$  平面上, 如果条件

$$\mu \leq |\delta_{\pm}^s|/2 \quad (20)$$

满足, 则对于充分小的  $\epsilon$ , 方程(9)的 Poincare 映射在两个不动点的稳定流形和不稳定流形将横向交截, 即 Poincare 映射具有 Smale 马蹄变换意义下的混沌行为<sup>[11]</sup>。

将(19)式代入(20)式, 可将 Smale 马蹄变换意义下混沌条件用系统参数表示为

$$\left| \frac{8\mu/\pi}{f} \right| < \sec[h(\pi\omega/2)]. \quad (21)$$

#### 4.2 混沌振荡的物理意义

将(6)式和(7)式代入(21)式, 不等式(21)可用系统的原始参数进一步表示为

$$\left| \frac{4\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{p\nu\kappa_0} \right| < \pi \sec \left\{ h \left[ \frac{d \sqrt{m/(2K\beta)} \Omega_u}{2} \right] \right\}, \quad (22)$$

由(22)式可以看出:

1) 如果晶体不弯曲 ( $\kappa_0 = 0$ , 对应于直沟道), 不等式左端为无穷, 条件(22)永远不满足, 系统不存在 Smale 马蹄变换意义下的混沌, 状态是稳定的。即对于直沟道, 即使是引入正弦平方势, 系统也不会出现混沌现象。

2) 系统周期弯曲幅值  $\kappa_0$  越小条件越不容易满足。当它达到

$$(p\nu\kappa_0)_c = \left| \frac{4\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{\pi \sec \left\{ h \left[ \frac{d \sqrt{m/(2K\beta)} \Omega_u}{2} \right] \right\}} \right| \quad (23)$$

时, 系统处于临界状态, 当  $p\nu\kappa_0 < (p\nu\kappa_0)_c$  时系统是稳定的, 当  $p\nu\kappa_0 > (p\nu\kappa_0)_c$  时, 条件(21)式满足, 系统存在 Smale 马蹄意义上的混沌。

3) 当系统阻尼系数 ( $2\mu_0$ ) 越小时, 条件越容易满足; 即仅当阻尼足够强时才可能抑制混沌的发生。其临界值可表示为

$$(2\mu_0)^c = \left| \frac{\pi p\nu\kappa_0 \sec \left\{ h \left[ \frac{d \sqrt{m/(2K\beta)} \Omega_u}{2} \right] \right\}}{2 \sqrt{2mK\beta}} \right|, \quad (24)$$

即当阻尼系数满足条件  $2\mu_0 > (2\mu_0)^c$  时, 系统是稳定的。

## 5 结 论

在经典力学框架内进一步考虑了运动阻尼和非线性的影响, 把粒子的运动方程化为具有阻尼项和受迫项的广义摆方程。利用 Melnikov 方法分析了

异宿轨道的分叉与系统进入 Smale 马蹄意义下的混沌行为。结果表明, 当条件  $\left| \frac{4\mu_0 \sqrt{2mK\beta}}{p\nu\kappa_0} \right| <$

$\pi \sec \left\{ h \left[ \frac{d \sqrt{m/(2K\beta)} \Omega_u}{2} \right] \right\}$  满足时, 系统是稳定的。

可以看出, 系统进入混沌的临界条件与它的具体参数有关, 只需适当调节这些参数就可以原则上避免或控制混沌, 从而可进一步保证系统能够有效地输出 X-激光或  $\gamma$  激光。

## 参 考 文 献

- 1 M. A. Kumakhov. On the theory of electromagnetic radiation of charged particles in a crystal[J]. *Phys. Lett. A*, 1976, **57**(1): 17~18
- 2 L. D. Landau. *The Classical Theory of Fields* [M]. Oxford Pergamon Press, 1975
- 3 Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Possibility of refoyming the electron axial channeling radiation as the  $\gamma$ -laser [J]. *High Energy Physics and Nuclear Physics*, 2005, **29**(2): 193~196  
罗诗裕, 邵明珠. 电子的轴沟道辐射作为  $\gamma$ -激光的可能性[J]. *高能物理与核物理*, 2005, **29**(2): 193~196
- 4 A. V. Korol, A. V. Solovyov, W. Greiner *et al.*. Photon emission in crystalline undulator[J]. *Nucl. Inst. and Methods in Physics Research B*, 2008, **266**(8): 1173~1176
- 5 H. Wiedemann. *Advance Radiation Sources and Application* [M]. Netherlands: Springer, 2006. 165~189
- 6 M. Tabrizi, A. V. Korol, A. V. Solovyov *et al.*. Feasibility of an electron-based crystalline undulator[J]. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, **98**: 164801~164806
- 7 A. V. Korol, A. V. Solovyov, W. Greiner. Channeling of positrons through periodically bent crystals; on feasibility of crystalline undulator and gamma-laser[J]. *Int J. Mod. Phys. E*, 2004, **13**(5): 867~916
- 8 H. Wiedemann. *Advance Radiation Sources and Application* [M]. Netherlands: Springer, 2006. 191~200
- 9 Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Dislocation model for strained superlattice and dechannelling effects of a Particles[J]. *Chin. J. Semiconductors*, 2003, **24**(5): 485~489  
罗诗裕, 邵明珠. 形变超晶格的位错模型与粒子的退道效应[J]. *半导体学报*, 2003, **24**(5): 485~489
- 10 Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine-squared potential and Kumakhov radiation for particles[J]. *Chin. Phys.*, 1984, **4**(3): 670~675
- 11 Shao Mingzhu, Luo Shiyu. The  $\tan^2 x$  potential and the eigenvalue and eigenfunction for planar channeling radiation [J]. *Acta Physica. Sinica.*, 2005, **54**(9): 4092~4096  
邵明珠, 罗诗裕. 正切平方势与平面沟道系统的本征值和本征函数[J]. *物理学报*, 2005, **54**(9): 4092~4096
- 12 Luo Shiyu, Shao Mingzhu. The sine-squared potential and the general properties of planar channeling radiation for positron [J]. *Acta Physica. Sinica.*, 2006, **55**(3): 1336~1340  
罗诗裕, 邵明珠. 正弦平方势与正电子面沟道辐射的一般特征[J]. *物理学报*, 2006, **55**(3): 1336~1340
- 13 Luo Shiyu, Shao Mingzhu. Sine-squared potential and chaotic behaviour of strained superlattice[J]. *Chin. J. Semiconductors*, 2005, **26**(2): 294~297  
罗诗裕, 邵明珠. 正弦平方势与形变超晶格系统的混沌行为[J]. *半导体学报*, 2005, **26**(2): 294~297
- 14 Zhang Mei, Shao Mingzhu, Luo Shiyu. The phase planar characteristics and stabilities of optical bistable cell by superlattice quantum well [J]. *Chin. J Luminescence*, 2007,

28(5): 679~682

张 梅, 邵明珠, 罗诗裕. 超晶格量子阱作为双稳态器件的相平面特征及其稳定性[J]. 发光学报, 2007, 28(5): 679~682

15 Luo Shiyu, Tan Yongming, Shao Mingzhu. Motion damping in channelling effects and the chaotic behaviour of a system[J]. *Acta*

*Physica. Sinica.*, 2004, 53(4): 1157~1161

罗诗裕, 谭永明, 邵明珠. 沟道效应的运动阻尼与系统走向混沌的临界特征[J]. 物理学报, 2004, 53(4): 1157~1161