

文章编号: 0258-7025(2008)Supplement2-0305-06

二次泽尼克多项式拟合在检测大曲率零件面形中的应用

刘贱平¹ 梁丽萍¹ 刘光灿²

(¹ 国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; ² 长沙学院电子与通信工程系, 湖南 长沙 410003)

摘要 研究了一种在平面干涉仪上检测大曲率球面光学零件面形的方法,将在平面干涉仪上得到的干涉条纹通过图像预处理、快速傅里叶变换(FFT)提取相位、解包裹、泽尼克(Zernike)多项式拟合等处理得到被检球面相对标准平面的面形,与指定的标准球面相减后,再一次 Zernike 多项式拟合得到被检球面相对于指定标准球面的面形,计算出被检球面的面形误差峰谷(PV)值、均方根(RMS)值及工程上常用的光圈 N 与局部光圈 ΔN ,并模拟出用球面干涉仪或球面样板检测时的干涉条纹,克服了接触检测的缺点,为高精度、大曲率半径光学零件表面面形的检测提供了一种适用的方法。

关键词 光学测量; 面形检测; Zernike 多项式; 条纹模拟

中图分类号 O436 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL200835s2.0305

Testing Big Curvature Surface of Optical Element with Zernike Polynomial Fitting Twice

Liu Jianping¹ Liang Liping¹ Liu Guangcan²

¹ College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China
² Department of Electronics and Communication Engineering, Changsha University, Changsha, Hunan 410003, China

Abstract A kind of test method of optical surface with big curvature on the plane interferometer is mainly studied, the measured surface error relative to the standard plane appointed has been obtained by some pivotal techniques such as interference fringe processing, fast Fourier transform (FFT) phase distilling, phase unwrapping and Zernike polynomial fitting, then it subtracts the standard spherical surface appointed, so the measured surface error relative to the standard sphere appointed has been obtained by reusing Zernike polynomial. On the basis, PV, RMS, N , ΔN of the measured surface error are calculated, the interference fringe formed by the measured surface relative to the standard sphere is successfully simulated. The method overcomes the disadvantages of contact test, and provides a suitable method particularly to optical surface with high precision and big curvature radius.

Key words optical measurement; testing of surface; Zernike polynomial; fringe simulation

1 引言

光学零件的质量直接影响光电产品的性能,而光学零件的面形为光学零件的主要质量指标之一,干涉仪由于检测精度高在面形检测中常采用,而对于曲率半径 $|R| > 2m$ 的光学零件,由于零件要位于接近于其曲率半径的位置,显然用球面干涉仪检测不太合适。目前,对于这种大曲率半径球面光学零

件,主要采用样板进行检测,这种方法简单但精度低,对于那些表面光洁度要求较高的零件,由于样板与零件接触可能会对被测面造成一定的损伤,因此用样板检测高精度的光学表面面形存在一定的缺点。通过二次泽尼克(Zernike)多项式拟合,在平面干涉仪上实现大曲率球面光学零件的无损检测。

基金项目: 湖南省自然科学基金(07JJ5081)资助课题。

作者简介: 刘贱平(1974—),男,硕士,讲师,主要从事光电检测方面的研究。E-mail: l_jianp@sina.com

2 干涉图处理及信息提取

干涉条纹经 CCD 及图像采集卡后转换成离散的数字信号存贮在计算机中,需经过一系列的数学处理得出被测面的面形信息。

$$i(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_0(x \cos \theta + y \sin \theta) + \phi_0(x, y)] = a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_x x + 2\pi f_y y + \phi_0(x, y)], \quad (1)$$

式中 $a(x, y)$ 为背景光强, $b(x, y)$ 为干涉条纹的调制度, $\phi_0(x, y)$ 为被测波面的相位, f_0 为由参考波面偏转而引入空间载频频率, f_x, f_y 为 f_0 在 X 和 Y 方向的分量, 扫描方向 θ 为条纹与 x 轴的夹角。

干涉场(或干涉图)经探测器转换后得到离散采样点上灰度值。假设探测器响应是线性的, 则灰度值 $g(x, y)$ 与光强 $i(x, y)$ 成正比

$$g(x, y) = ki(x, y)D(x, y) = kD(x, y)\{a(x, y) + b(x, y) \cos[2\pi f_0(x \cos \theta + y \sin \theta) + \phi_0(x, y)]\}, \quad (2)$$

式中 $D(x, y)$ 为干涉图瞳函数, k 为光电转换的比例系数, 它是一个常数。

将(2)式改写成复数表达式

$$g(x, y) = D(x, y)\{ka(x, y) + c(x, y) \exp[j2\pi f_0(x \cos \theta + y \sin \theta)] + c^*(x, y) \exp[-j2\pi f_0(x \cos \theta + y \sin \theta)]\} = D(x, y)\{ka(x, y) + c(x, y) \exp(j2\pi f_x x + i2\pi f_y y) + c^*(x, y) \exp(-j2\pi f_y y - i2\pi f_x x)\}, \quad (3)$$

式中

$$c(x, y) = \frac{1}{2}kb(x, y) \exp[j\phi_0(x, y)]. \quad (4)$$

在干涉图的瞳函数 $D(x, y)$ 区域内对(3)式中空间变量作二维快速傅里叶变换(2-DFFT)有^[1~3]

$$G(f_1, f_2) = A(f_1, f_2) + C(f_1 - f_x, f_2 - f_y) + C^*(f_1 + f_x, f_2 + f_y), \quad (5)$$

式中大写字母表示频域中的值, $A(f_1, f_2)$ 为干涉图背景光强的频谱即零级谱分布函数, $C(f_1 - f_x, f_2 - f_y)$ 为正一级谱的分布函数, $C^*(f_1 + f_x, f_2 + f_y)$ 为负一级谱的函数分布。采用一个中心频率为 (f_x, f_y) , 频带宽度适当的滤波器, 就可将正一级频谱, 即 $C(f_1 - f_x, f_2 - f_y)$ 或负一级频谱分离出来。然后在频域上将 $C(f_1 - f_x, f_2 - f_y)$ 从 (f_x, f_y) 平移到原点得到 $C(f_1, f_2)$, 这样就去掉不需要的背景光强 $ka(x, y)$, 再对其进行二维快速傅里叶逆变换:

$$\mathcal{F}^{-1}[C(f_1, f_2)] = c(x, y) = \frac{1}{2}kb(x, y) \exp[j\phi_0(x, y)], \quad (6)$$

得到(5)式中的 $c(x, y)$, 从表达式可求出带有波面信息的相位分布函数 $\phi_0(x, y)$

$$\phi_0(x, y) = \arctan \frac{\text{Im } c(x, y)}{\text{Re } c(x, y)}, \quad (7)$$

式中 $\text{Re } c(x, y)$ 、 $\text{Im } c(x, y)$ 分别为 $c(x, y)$ 的实部和虚部, 完成运算的同时就去掉了调制度 $kb(x, y)$ 的

2.1 快速傅里叶变换提取相位

根据光的干涉原理, 两路光干涉后形成的干涉场光强分布为

影响。

如果选定参考波前为平面波, 可求出被测波面的波差函数

$$W(x, y) = (\lambda/2\pi)\phi_0(x, y). \quad (8)$$

2.2 相位解包裹

从(7)式可看出获得波面相位数据的方法为 FFT 算法经过反正切函数所求得的, 这些波面数据为被压包后的波面数据, 反正切函数把整个波面归一化在 $[-\pi, \pi]$ 区间内, 如图 1(b)所示。因此 FFT 算法获得的相位只是相位主值图, 也就是通常说的包

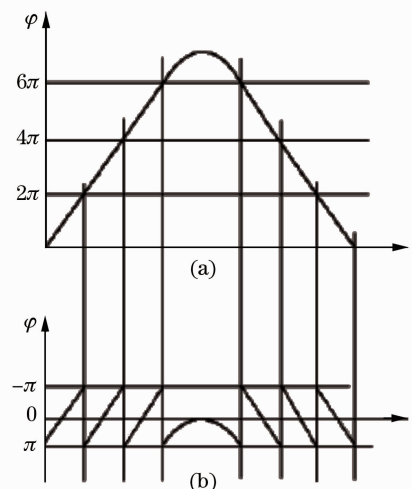


图 1 解包裹原理图

Fig. 1 Principle of phase unwrapping

裹的相位图。由于没有得到连续的相位图,仍不能直接应用相位分析和波面拟合,因此需要将获得的相位主值转换成连续光滑的相位分布^[4],如图 1(a)。

假定 $\Phi_{i,j}$ 为二维($M \times N$)离散点上的去包裹相位, $\Psi_{i,j}$ 为对应的包裹相位,则有

$$\Psi_{i,j} = \Phi_{i,j} + 2\pi k, \quad (9)$$

式中 k 为整数, $-\pi \leq \Psi_{ij} \leq \pi, i = 0, 1, \dots, M-1; j = 0, 1, \dots, N-1$ 。

定义包裹算子 W

$$W\{\Phi_{i,j}\} = \Psi_{i,j}, \quad (10)$$

定义 $\Delta_{i,j}^x = W\{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}\},$ (11)
 $i = 0, 1, \dots, M-2; j = 0, 1, \dots, N-1$

$$\Delta_{i,j}^y = W\{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j}\}, \quad (12)$$

$i = 0, 1, \dots, M-1; j = 0, 1, \dots, N-2$

式中 $\Delta_{i,j}^x$ 表示包裹相位在 x 方向上相邻元素的差分, $\Delta_{i,j}^y$ 表示包裹相位在 y 方向上相邻元素的差分。那么使

$$S = \sum_{i=0}^{M-2} \sum_{j=0}^{N-1} (\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^x)^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-2} (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j} - \Delta_{i,j}^y)^2, \quad (13)$$

最小的 $\Phi_{i,j}$ 就是所求的去包裹相位值。

最小二乘方程组的法方程为

$$\begin{aligned} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j}) + \\ (\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j}) = \rho_{i,j}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\rho_{i,j} = (\Delta_{i,j}^x - \Delta_{i-1,j}^x) + (\Delta_{i,j}^y - \Delta_{i,j-1}^y),$ (15)

显而易见,(15)式实际上为 $M \times N$ 方形网格上的离散泊松方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x,y) = \rho(x,y), \quad (16)$$

(15)式对所有矩形网格点 $i = 0, 1, \dots, M-1; j = 0, 1, \dots, N-1$ 都是有效的,并且被用于计算 ρ_{ij} 的相位差仅在网格区域内是非零的。因此,可以直接得出离散泊松方程的 Neumann 边界条件:

$$\Delta_{-1,j}^x = 0, \quad \Delta_{M-1,j}^x = 0, \quad (17)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\Delta_{i,N-1}^y = 0, \quad \Delta_{i,0}^y = 0. \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1$$

由二维空间多个像素点可以得到多个方程,构成线性方程组,解该方程组即可。

2.3 二次 Zernike 多项式拟合

对采样得到的干涉条纹的离散数据点的数学处理就是要把这些代表被测表面信息的离散点拟合成一个与实际干涉波面尽可能一致的波面函数 $W(x,y)$ 。实践表明光学测量中用 Zernike 多项式拟合波面精度最高^[5]。

被测波面用 n 项 Zernike 多项式表示为

$$W(x,y) = q_1 Z_1(x,y) + q_2 Z_2(x,y) + q_3 Z_3(x,y) + \dots + q_n Z_n(x,y). \quad (19)$$

将测得的 m 个数据点代入(19)式,解这个方程组,得出各项系数,就得到了被测波面用 Zernike 多项式表达的波面函数。

$$\left. \begin{aligned} q_1 Z_1(x_1, y_1) + q_2 Z_2(x_1, y_1) + \dots + q_n Z_n(x_1, y_1) &= W(x_1, y_1), \\ q_1 Z_1(x_2, y_2) + q_2 Z_2(x_2, y_2) + \dots + q_n Z_n(x_2, y_2) &= W(x_2, y_2), \\ q_1 Z_1(x_3, y_3) + q_2 Z_2(x_3, y_3) + \dots + q_n Z_n(x_3, y_3) &= W(x_3, y_3), \\ &\dots\dots\dots \\ q_1 Z_1(x_m, y_m) + q_2 Z_2(x_m, y_m) + \dots + q_n Z_n(x_m, y_m) &= W(x_m, y_m). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

求解 Zernike 多项式拟合系数的方法很多^[6,7],有 Gram-Schmidt 正交化法、Householder 变化法、最小二乘法还有协方差法。在实际应用中,特别是处理的数据量较大的情况下,通过最小二乘法直接构造的正则方程组往往造成计算错误使拟合失败。本系统程序设计中采用协方差法求解 Zernike 多项式拟合系数,这种算法在求解 Zernike 多项式系数的时候不需要经过正交化过程,而且是用 Zernike 多项式的协方差矩阵的线性变化来直接求解,因此很适合编程。

用 Zernike 多项式进行波面拟合时,阶数的选

择很重要。理论上来说, Zernike 多项式阶数越高,波面拟合精度也越高,但实际上,并不是拟合波面时多项式阶数选择的越高越好。对于泽尼克项数而言,项数过少,高阶像差表现不出来,则不足以表述高精度面形;项数过多,则会附加太多的累积处理误差^[8]。究竟需要多少项泽尼克函数的线性组合才能准确地描述被检波前,这取决于被检波前的平滑度和所要求的测量准确度。文献[8]通过模拟实验分析比较了 Zernike 多项式对不同波面的拟合情况,指出 Zernike 多项式对球面的拟合能力最强,只用前四项就能完全拟合一个球面,而且项数增加误差

会更大些;但 Zernike 多项式在拟合高斯曲面、带像差的二次曲面、peaks 曲面时,随着项数增加,拟合误差显著减小,在本系统中考虑到被检零件并不是简单的球面,而是接近球面的各种非球面面形,同时参考 Zygo 干涉仪的处理方法,选用了 7 阶 36 项进行拟合^[7,9]。

第一次 Zernike 多项式拟合出来的是被测面相对参考平面的波面函数 w_{sc} ,要计算被测面相对指定标准球面的误差,还需减去指定标准球面 w_{bc} ,即

$$w = w_{sc} - w_{bc}, \quad (21)$$

w_{sc} 的单位是相位,将其转换为波长, w_{bc} 也相应地转换为波长。

在与标准球面比较后,再一次利用 Zernike 多项式进行波面拟合,得到了被测面相对指定标准球面的面形,波面函数可以表示为

$$W_{SB} = \sum_{i=4}^N q_i z_i(x_j, y_j), \quad (22)$$

2.4 面形误差计算

Zernike 多项式与初级相差有着一定的对应关系,它的拟合结果包含着反映被测面面形的有关信息。其中各项的物理意义为^[6]

常数项:反映了两相干平面波有一定的间隔,它是由零级条纹的任意性选择引起的。

$\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$ 项:也称倾斜项,它的系数反映了两相干波存在着一定的夹角。这两种形式的波差是人为原因引起的,可令其系数为零去除它们对干涉波面的相位贡献。

$2\rho^2 - 1$ 项:对应初级像差-像场弯曲。它反映了被测表面整体上的凹凸,代表了被测表面的非平(球)面度部分。

$\rho^2 \cos(2\theta), \rho^2 \sin(2\theta)$ 项:二者合起来对应着初级像差-像散。当被测面表面不具有较好的球面形式时,它的系数明显增大;也代表了被测面的平面度误差。

Zernike 的每一项都代表了不同形式的波差,将这些高次项的波差称为局部误差。由(22)式可得

1) 被测面误差峰谷值:

$$\Delta_{PV} = \max W_{SB} - \min(W_{SB}). \quad (23)$$

2) 被测面误差均方根值:

$$\Delta_{rms} = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [W_{SB}(x_j, y_j) - \bar{W}_{SB}]^2 \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

3) 被测面的球面误差:

$$\Delta_s = \sum_{i=4}^6 q_i z_i(x_j, y_j). \quad (25)$$

4) 被测面的球面局部误差:

$$\Delta_{s, local} = \sum_{i=7}^N q_i z_i(x_j, y_j). \quad (26)$$

Δ_s 与 $\Delta_{s, local}$ 可转换为工程上常用的光圈 N 和局部光圈 ΔN ,由(25)式、(26)式计算出的单位为波长,而一个波长光程差能产生两条条纹,因此二者之间存在倍数关系,即

$$N = 2\Delta_s, \quad \Delta N = 2\Delta_{s, local}. \quad (27)$$

2.5 干涉条纹模拟

通过计算可得出被测面的面形偏差峰值(PV)值、均方根(RMS)值以及常用的光圈 N 和局部光圈 ΔN ,但在实际检测中,用样板或球面干涉仪都能看到标准球面与被测面形成的干涉条纹,为了达到与球面干涉仪相同的效果,可以通过第二次波面拟合得到的多项式模拟出被测面(拟合得到的)与标准球面的干涉条纹。根据干涉理论,条纹图为干涉场的光强分布,因此由(28)式可模拟出用球面干涉仪检测时的条纹图^[8]:

$$S_F = 1 - \cos^2(\omega'_{sb}/2). \quad (28)$$

式中 S_F 为模拟条纹, ω'_{sb} 为去除了第一项,第二、三项附加了倾斜量的所有 Zernike 多项式。

3 实验结果

由于没有更高一级仪器对光学表面面形进行检定,可通过对被测表面进行多次测量,根据误差分析理论,采用标准误差来分析系统的测量精度^[10]。

$$\sigma = \sqrt{\sum_{n=1}^n \delta_n^2 / (n-1)}, \quad (29)$$

式中 σ 表示单次测量的标准误差, n 为测量次数, δ_n 为测量值和算术平均值之差。

实验装置为非索平面干涉仪,被测零件标准球面半径为 $R = -8.15$ m,口径 $D = 7.46$ mm,重复测量 10 次,测量结果如表 1 所示,图 2~图 9 为第一次实验的处理过程及结果,从图 8 可看出模拟条纹图直

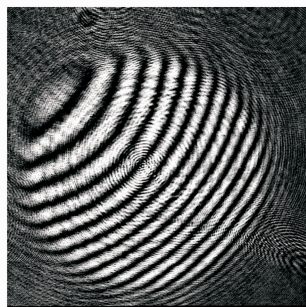


图 2 原始干涉图

Fig. 2 Original interference map

观地表示了被测面相对于标准球面形成的干涉图。

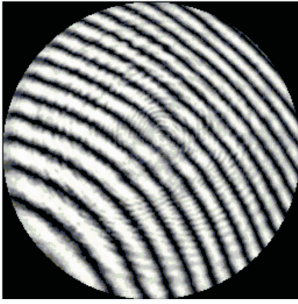


图 3 预处理干涉图

Fig. 3 Processed interference map

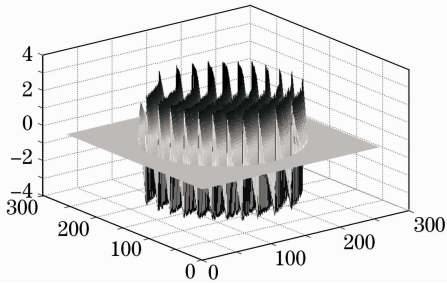


图 4 包裹相位图

Fig. 4 Phase wrapping map

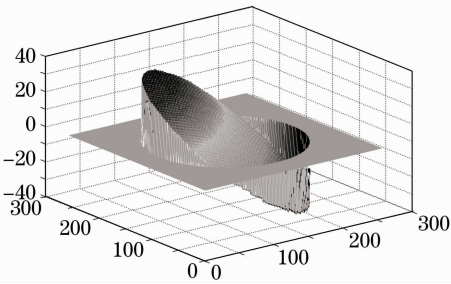


图 5 解包裹图

Fig. 5 Phase unwrapping map

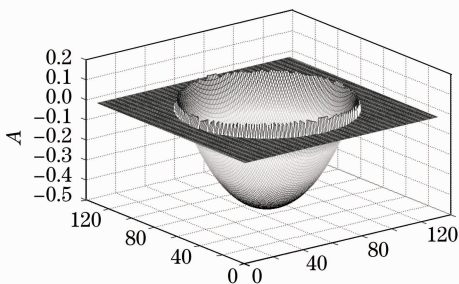


图 6 第一次拟合面形

Fig. 6 The first fitted surface

从表 1 中实验结果可以看出,测得的零件表面的 PV 值的最大误差为 $\lambda/55$, RMS 的最大误差为 $\lambda/220$,两者的标准误差分别为 $\lambda/200$ 和 $\lambda/625$ 。本组实验光学表面面形 PV 测量的不确定度为 $\lambda/200$, 均方根 RMS 测量的不确定度为 $\lambda/625$ 。

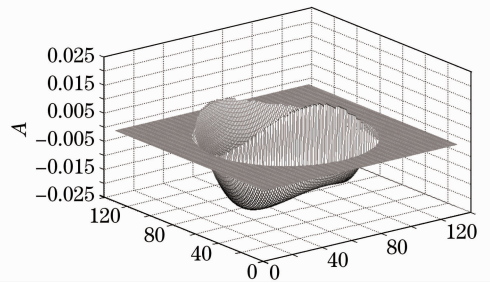


图 7 第二次拟合面形

Fig. 7 The second fitted surface

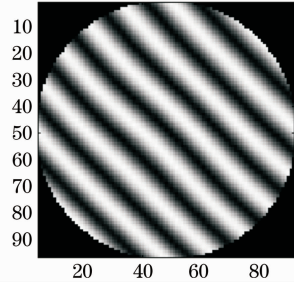


图 8 模拟条纹图

Fig. 8 Simulated fringe map

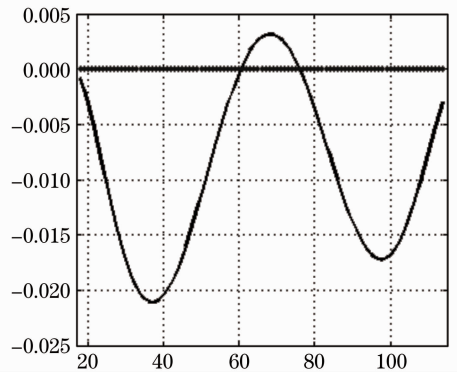


图 9 面形截面图

Fig. 9 Surface section map

表 1 实验数据

Table 1 Data of experiment

	PV (λ)	RMS(λ)	N	ΔN
1	0.0679	0.0176	0.1038	0.1355
2	0.0654	0.0144	0.0676	0.1890
3	0.0644	0.0144	0.0636	0.1821
4	0.0644	0.0164	0.1138	0.1406
5	0.0679	0.0163	0.1066	0.1438
6	0.0625	0.0142	0.0622	0.1770
7	0.0664	0.0168	0.1186	0.1395
8	0.0698	0.0178	0.1196	0.1409
9	0.0526	0.0133	0.0630	0.1582
10	0.0592	0.0142	0.0587	0.1691
\overline{PV}	$= 0.0641$	$PV_{pv} = 0.072$	$PV_{\sigma} = 0.0050$	
\overline{RMS}	$= 0.0155$	$RMS_{pv} = 0.0045$	$RMS_{\sigma} = 0.0016$	

4 结 论

通过二次 Zernike 多项式拟合在平面干涉仪上实现了大曲率球面光学零件的面形检测, 得出了被测面误差的 PV 值、RMS 值以及国内工程上常用的光圈和局部光圈, 精度较高, 还根据面形误差模拟出被测面与标准球面发生干涉时的干涉条纹, 形象而直观, 达到了用球面干涉仪检测的效果, 特别是对于表面光洁度及面形要求较高的零件, 该方法更具有优越性, 因此, 该方法的研究具有较高的工程应用价值。

参 考 文 献

- 1 Chen Jinjun. The Research of Interferometry Test with the Way of FFT[D]. Nanjing: Nanjing Institute of Technology, 2004
陈进军. FFT 法进行干涉测试的研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2004
- 2 M. Takeda. Spatial carrier heterodyne techniques for precision interferometry and profilometry: an overview[C]. *Proc. SPIE*, 1989, **1121**: 73~88
- 3 Zhang Jie, Cheng Mingyi. A new out-inserting algorithm about interference fringe during Fourier transformation[J]. *The Optical Instruments*, 1998, **11**(1): 20~26
张 婕, 陈明仪. 傅立叶变换中干涉条纹的外插新算法[J]. 光学仪器, 1998, **11**(1): 20~26
- 4 Nie Liang. The Research of the Key about Phase-Shifting Interferometry with Fiber Point Diffraction[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2006
聂 亮. 光纤点衍射移相干涉关键技术研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2006
- 5 Liu Yueai. A simple method of Zernike polynomial fitting in fringe analysis[J]. *Acta Optica Sinica*, 1985, **5**(4): 368~373
刘月爱. 条纹分析中一种简单的 Zernike 多项式拟合方法[J]. 光学学报, 1985, **5**(4): 368~373
- 6 Tan Zhongqi. The Research of Wavelength-Tuned Phase-Shifting Interferometry[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2003
谭中奇. 波长调谐相移干涉测量技术的研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2003
- 7 Yan Jingzhou, Lei Fan, Zhou Bifang *et al.*. Algorithms for wavefront fitting using Zernike polynomial [J]. *Optics and Precision Engineering*, 1999, **7**(5): 119~128
鄢静舟, 雷 凡, 周必方 等. 用 Zernike 多项式进行波面拟合的几种算法[J]. 光学精密工程, 1999, **7**(5): 119~128
- 8 Liang Liping. Testing Big Curvature Surface of Optical Element on Plane Interferometer with Spatial Carrier Heterodyne Interferometry[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2007
梁丽萍. 利用空间载频外差干涉术在平面干涉仪上实现大曲率光学零件的检测[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2007
- 9 Mo Weidong. The Research of Test System of Optical Flat Glass Surface [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 1990
莫卫东. 光学平面玻璃表面检测系统研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 1990
- 10 J. Schwider, R. Burow, K.-E. Elssner, J. Grzanna *et al.*. Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources[J]. *Appl. Opt.*, 1983, **22**(21): 3421~3432