

文章编号: 0258-7025(2008)09-1419-04

激光多普勒测速参数估计的 Cramer-Rao 下限

王纪强 张春熹 马宗峰 欧攀 张晓青

(北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100083)

摘要 针对固体运动目标高速度、高加速度的特点,研究了高斯白噪声背景下激光多普勒测速回波信号参数估计问题。通过计算参数矢量的费希尔(Fisher)信息矩阵,分析了实回波信号的多普勒频率和频率变化率估计方差的克拉末-雷奥(Cramer-Rao)下限(CRLB),推导了采样点数较大时回波信号参数方差估计的 CRLB 计算公式,讨论了各参数的最大似然估计(MLE)。指出回波信号参数估计方差的 CRLB 与采样点数、信噪比及初相有关,采样点数较大时,实信号参数估计方差的 CRLB 为对应复信号的 2 倍。在不同的采样点数和信噪比下仿真表明,提高回波信号的信噪比和增加采样点数可以减小各参数估计方差的 CRLB,结果与理论分析吻合。

关键词 激光技术;激光多普勒测速;Cramer-Rao 下限;参数估计;最大似然估计

中图分类号 TB 96 **文献标识码** A **doi**: 10.3788/CJL20083509.1419

Cramer-Rao Lower Bounds of Parameter Estimation from Laser Doppler Velocimetry

Wang Jiqiang Zhang Chunxi Ma Zongfeng Ou Pan Zhang Xiaoqing

(School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100083, China)

Abstract Aiming at the high-speed and high-acceleration features of solid moving targets, the parameter estimation of laser Doppler velocimetry echo signal under white Gaussian noise were investigated. By computing the Fisher information matrix of parameter vectors, Cramer-Rao low bounds (CRLBs) of the real echo signal Doppler frequency and frequency rate were analyzed, formulas of the CRLBs were derived when the length of sample data was large, and the maximum likelihood estimator (MLE) was discussed. The CRLBs of the variance of estimated parameter of the real echo signal are affected by the length of sample data, signal to noise ratio (SNR), and the initial phase. When the length of sample data is large, the CRLBs of the variance of estimated parameter are twice of the corresponding complex signal. The simulations under conditions of different lengths of sample data and different SNR indicate that increasing the length of sample data and SNR can minish CRLBs of the variance of estimated parameter, and the results fit well with theoretical analysis.

Key words laser technique; laser Doppler velocimetry; Cramer-Rao low bounds; parameter estimation; maximum likelihood estimation

1 引言

激光多普勒风速仪(Laser Doppler Anemometer, LDA)也称为激光多普勒测速仪(Laser Doppler Velocimeter, LDV),其原理是建立在光学多普勒效应和差频检测基础上^[1],它可以用来测量液体、气体的流动速度或固体目标的运动速度,在科学和工业技术中有非常广泛的应用。

对于带噪声的激光多普勒信号^[2],无论采用何

种方法,估计得到的多普勒频率都具有一定的方差。为了对激光多普勒测速的准确度进行判断,常使用数理统计中的克拉末-雷奥(Cramer-Rao)下限(CRLB)。CRLB 与具体的估计算法无关,它给出的是对给定测量数据而言最有效的无偏估计的方差。近年来,有关学者对流速测量场合的 CRLB 做了一定研究^[3~5]。常见气体、液体的流动速度在毫秒量级或更长时间尺度上可以认为保持不变^[1],因此在

收稿日期:2007-11-16;收到修改稿日期:2008-01-14

作者简介:王纪强(1980—),男,山东人,博士研究生,主要从事激光雷达方面的研究。E-mail:wjq_14_ren@163.com

导师简介:张春熹(1965—),男,湖南人,教授,博士生导师,主要从事光纤传感器技术、数字信号处理技术、微弱信号检测与处理技术、光纤陀螺及其导航系统方面的研究。E-mail:zchunxi@hotmail.com

研究其激光多普勒测速参数的 CRLB 时,可以不考虑加速度的影响。但对于固体运动目标,特别是对飞机、导弹和战车等军用目标,不但具有较高的速度,还具有较高的加速度。加速度的存在造成多普勒回波的频谱展宽,从而引起测速误差^[6],因此必须进行加速度补偿。加速度补偿算法的关键是准确估计出加速度的值,可以采用频谱细化算法提取待补偿时域信号,再通过加速度模板进行匹配,得到运动目标的加速度值^[7]。为了对加速度补偿算法的性能进行评判,在研究固体运动目标参数估计的 CRLB 时,就需要引入加速度分量,而在以前的研究中均未考虑这一点。同时,在很多实际应用中,往往只能直接根据回波信号的离散观测值进行参数估计。本文即针对这一情况,对实回波信号的 CRLB 进行研究。

2 参数估计的 CRLB

在固体目标测速应用中,激光多普勒回波信号是由许多通过固体表面的粒子产生的散射光叠加而成的^[8]。受固体表面特性和激光传输介质的影响,所产生的多普勒信号强度、相位都是随机的,但频率是相同的。回波电信号经过等间隔均匀采样,其离散信号序列 $x(n)$ 由 N 个样本组成,

$$x(n) = s(n) + w(n) = A \cos(\varphi_0 + \omega_D n \Delta + r_D n^2 \Delta^2) + w(n \Delta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

式中 $s(n)$ 为目标回波信号, A 为回波信号振幅, φ_0 为多普勒回波信号的初始相位,是在区间 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布的随机变量, Δ 为采样时间间隔, ω_D 和 r_D 分别为多普勒频率(频移)和多普勒频率变化率,分别与运动目标的速度和加速度呈线性关系, $w(n)$ 为零均值高斯白噪声序列,方差为 σ^2 ,则信噪比为 $\text{SNR}_0 = A^2 / (2\sigma^2)$ 。

一般 A, φ_0, ω_D 和 r_D 均为未知参数,本文只关心 ω_D 和 r_D 。令 α 为参数矢量

$$\alpha = [\omega_D \quad A \quad r_D \quad \varphi_0]^T, \quad (2)$$

对于给定的 α , 观测信号的概率密度函数(Probability Density Function, PDF)可表示为

$$f(X/\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - s_n)^2\right], \quad (3)$$

要计算各待估参数的 CRLB,首先应当计算相应的费希尔(Fisher)信息矩阵 \mathbf{J} 。相应的 CRLB 可表示为

$$\alpha_{\text{IL}} \geq (\mathbf{J}^{-1})_{ii}, \quad (4)$$

式中 $(\mathbf{J}^{-1})_{ii}$ 为 Fisher 信息矩阵的逆阵 \mathbf{J}^{-1} 中第 i 个对角元素。由 Cramer-Rao 约束定理,任何无偏估计的方差不小于信息矩阵的逆矩阵之对角元素的值。

实际测量中,系统的采样速率往往大大高于待测的多普勒频率,对以上各式进行一定近似计算后得到

$$\mathbf{J} \approx \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} A^2 O \Delta^2 & 0 & A^2 Q \Delta^3 & A^2 M \Delta \\ 0 & N & 0 & 0 \\ A^2 Q \Delta^3 & 0 & A^2 P \Delta^4 & A^2 O \Delta^2 \\ A^2 M \Delta & 0 & A^2 O \Delta^2 & A^2 N \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中 $M = \sum_{n=0}^{N-1} n, O = \sum_{n=0}^{N-1} n^2, Q = \sum_{n=0}^{N-1} n^3, P = \sum_{n=0}^{N-1} n^4$ 。

求 \mathbf{J} 的逆矩阵,得到当 N 较大时, ω_D 的估计方差下限为

$$\omega_{\text{DL}} \geq \begin{cases} \frac{192}{N^3 \Delta^2 \text{SNR}_0} & \varphi_0 \text{ is unknown} \\ \frac{48}{N^3 \Delta^2 \text{SNR}_0} & \varphi_0 \text{ is known} \end{cases}, \quad (6)$$

r_D 的估计方差下限为

$$r_{\text{DL}} \geq \begin{cases} \frac{180}{N^5 \Delta^4 \text{SNR}_0} & \varphi_0 \text{ is unknown} \\ \frac{80}{N^5 \Delta^4 \text{SNR}_0} & \varphi_0 \text{ is known} \end{cases}, \quad (7)$$

与 Shimon Peleg 等^[9]提到的复信号的 CRLB 对比可见,当 N 较大时,实回波信号多普勒频移 ω_D 和多普勒频率变化率 r_D 估计方差的 CRLB 分别为对应的复信号 CRLB 的 2 倍。这与 David C. Rife 等^[10]得出的结论相符,因为实信号采样序列减少了一半信息,相当于采样序列长度减少了一半。

3 最大似然估计

回波信号参数的最大似然估计(MLE)是那些同时使采样时间内信号序列对信号参数的条件联合概率密度为最大的参数值,参数矢量 α 的 MLE 应为使 $f(X/\alpha)$ 或 $\lg(f)$ 达到最大的 α 值。如果信号参数在某一不确定范围内的统计分布未知,那么 MLE 是最优的估计器,其估计方差趋于 CRLB。对于固体目标的激光多普勒回波信号,当 N 较大时,求 α 的 MLE 可以近似等价于求

$$L = \frac{2A}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j(\varphi_0 + \omega_D n + r_D n^2)} - \frac{A^2}{2}, \quad (8)$$

使(8)式达到最大的 α 值。所求参数的 MLE 为

$$\hat{\omega}_D, \hat{r}_D = \arg \max_{\omega_D, r_D} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j(\omega_D n + r_D n^2)} \right|. \quad (9)$$

4 仿真结果

对推导出的参数估计的 CRLB 进行计算机仿真,如图 1 所示,采样频率 $f_s = 20$ MHz,采样点数 $N = 128, 256, 512, 1024$, SNR 为 $0 \sim 20$ dB,以 2 dB 为间隔步进的仿真结果。图 1(a), (b) 分别为回波信号的归一化多普勒频率估计均方差和归一化频率变化率估计均方差的 CRLB 对不同信噪比和采样点数的关系曲线。

由图 1 可见, ω_D 和 r_D 的 CRLB 均随着信噪比的提高而减小,并且采样点数增加也会使各参数估计的 CRLB 减小。在相同信噪比的情况下, ω_D 和 r_D 的 CRLB 随采样点数的变化较大,这说明采样点数对频率和频率变化率的估计精度的影响较大,采样点数越大,频率估计精度越高,这是因为频率分辨率 $\Delta f = f_s/N$,在采样频率 f_s 不变的前提下,频率分辨率 Δf 与采样点数 N 呈反比关系, N 越大,频率分辨率越高,估计精度也就越高。

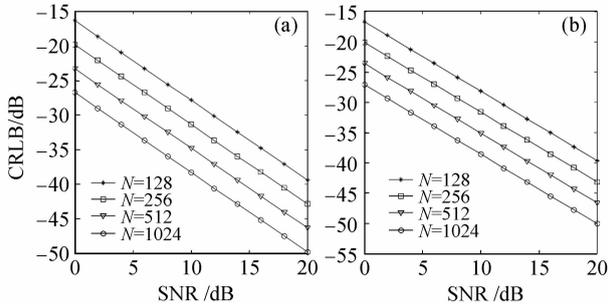


图 1 不同采样点数归一化多普勒频率 ω_D (a) 和频率变化率 r_D (b) 的估计均方差的 CRLB 与信噪比的关系

Fig. 1 CRLBs of normalized RMS for Doppler frequency ω_D (a) and frequency rate r_D (b), as function of SNR

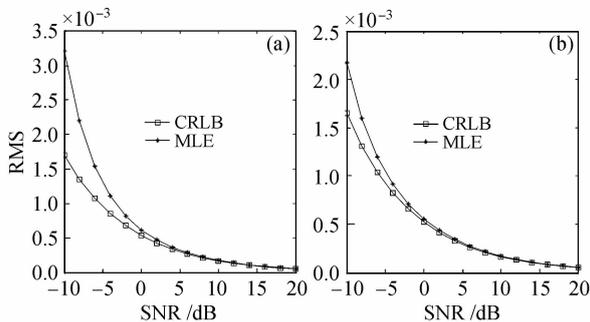


图 2 $N = 256$ 时,多普勒频率 ω_D (a) 和频率变化率 r_D (b) 均方差的极大似然估计值与对应 CRLB 随信噪比的变化关系

Fig. 2 MLE, relative to CRLB of RMS for Doppler frequency ω_D (a) and frequency rate r_D (b), as function of SNR when $N = 256$

通过计算机直接进行二维搜索,来实现多普勒频移 ω_D 和频率变化率 r_D 最大似然估计。理论上,只要二维搜索精度足够高,多普勒频率 ω_D 和频率变化率 r_D 估计的最小均方差(RMS)能够达到 CRLB。图 2(a), (b) 分别为 ω_D 和 r_D 估计均方差的最大似然估计值与对应的 CRLB 在不同信噪比情况下的对比曲线。

由图 2 可见,随着信噪比的提高,最大似然估计值会逐渐趋近于 CRLB,在信噪比高于 8 dB 时,基本达到 CRLB。

5 结论

研究了高斯白噪声背景下回波信号的离散观测值参数估计的问题,给出了实回波信号多普勒频率和频率变化率估计方差下限的计算公式,讨论了回波信号参数的极大似然估计。结果表明,提高回波信号的信噪比和增加采样点数可有效减小多普勒频率和频率变化率估计方差的 CRLB,这也使相应的算法精度具有更大的提升空间。

参 考 文 献

- Hu Shaolou. Laser Interference Velocimetry Technology[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2001. 6~7
胡绍楼. 激光干涉测速技术[M]. 北京:国防工业出版社, 2001. 6~7
- Ma Zongfeng, Zhang Chunxi, Zhang Chaoyang *et al.*. Signal-noise ratio in optical heterodyne detection [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(5):889~892
马宗峰,张春熹,张朝阳等. 光学外差探测信噪比研究[J]. 光学学报, 2007, **27**(5):889~892
- Shu Weiqun. Cramér-Rao bound of laser Doppler anemometer [J]. *IEEE Trans. Instrum. Measure.*, 2001, **50**(6):1770~1772
- Olivier Besson. Estimating particles velocity from laser measurements: maximum likelihood and Cramer-Rao bounds [J]. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1996, **44**(12):3056~3068
- V. S. Sobolev, A. A. Feshenko. Accurate Cramer-Rao bounds for a laser Doppler anemometer [J]. *IEEE Trans. Instrum. Measure.*, 2006, **55**(2):659~665
- Zhang Zhiping, Cheng Zhaogu, Qin Zhaoyu *et al.*. Influence of acceleration on the error of laser dual-frequency interferometer [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(5):694~698
张志平,程兆谷,覃兆宇等. 加速度对激光双频干涉仪测量误差的影响[J]. 中国激光, 2007, **34**(5):694~698
- Jiang Zhihong, Cao Yanwei, Cheng Zhu *et al.*. Partial-dechirping-based real-time acceleration correction algorithm for multi-frequency radar [J]. *Signal Processing*, 2006, **22**(5):663~667
江志红,曹延伟,程 翥等. 基于局部解线性调频的多频连续波雷达实时加速度补偿算法[J]. 信号处理, 2006, **22**(5):663~667
- Zhang Yucun, Liu Bin, Li Qun. Application of novel approach of detecting signal in laser Doppler effect [J]. *Chinese J.*

Lasers, 2005, **32**(12):1673~1677

张玉存,刘 彬,李 群. 一种新的信号分析方法在激光多普勒信号检测中的应用[J]. *中国激光*, 2005, **32**(12):1673~1677

- 9 Shimon Peleg, Boaz Porat. Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations [J]. *IEEE Trans.*

AES, 1991, **27**(4):607~616

- 10 David C. Rife, Robert R. Boorstyn. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. *IEEE Trans. Information Theory*, 1974, **IT-20**(5):591~598

征 稿 简 则

《中国激光》是由中国光学学会和中国科学院上海光学精密机械研究所共同主办,科学出版社出版的学术期刊,国内外公开发行。

1. 刊登内容

主要发表我国科技人员在激光理论与技术领域的最新进展,栏目包括:综述、实验技术与元件、激光物理与化学、全息技术、光束传输、光通信及其元器件、光纤元件、测量技术、材料、薄膜、激光应用、激光生物学与医学,等等。请作者在来稿中注明所投栏目,并注明所属中图分类号。

2. 投稿与查询

本刊接受 Email 投稿或网络投稿,投稿信箱:submit@siom.ac.cn,网络投稿与查询:登录中国光学期刊网 www.opticsjournal.net。来稿请注明作者真实姓名、服务单位、详细通信地址、联系电话、邮政编码及电子信箱。本刊收到稿件后在 2~3 个工作日内 Email 发出收稿通知。作者投稿 2 个月内未收到本刊处理意见,可另投他刊。但需事先告知本刊编辑部。编辑部有权对来稿删改。来稿请勿涉及保密内容,并提供相关单位证明。来稿请附所有作者签名,作者顺序一经确定,请勿任意删改。可同时提供 6~8 位国内外同行专家的详细通讯方式和研究领域,供送审时参考。

3. 来稿要求

3.1 文字要求

来稿应含中英文题目、摘要、关键词和第一作者简介,全文要求在 5000 字以内。来稿请用小 4 号,1.5 倍或 2 倍行距,另用不同颜色标明文内尤其公式内易混淆的大小写、上下角码、文种、算符等。计量单位一律采用国家标准 GB3100-3102-93 规定,摘要和正文中的缩略词在第一次出现时都必须写出全称,后附缩略词。

3.2 标题与摘要

标题应言简意赅,字数控制在 20 字以内,不使用不公开的外文缩写词(化学符号除外)。中英文摘要请用第三人称叙述,不使用“本文”或“作者”等主语,不引用参考文献、数学公式和化学式。内容应包括四个要素:即研究目的、方法、结果、结论。中英文摘要内容应基本对应,中文摘要 300 字左右,英文摘要 150~180 个单词。

3.3 关键词

每篇论文应给出 4~8 个关键词,第一个列出该文主要工作或内容所属的二级学科名称,第二个列出该文研究得到的成果名称或文内若干个成果的总类别名称,第三个列出该文在得到上述成果或结论时采用的科学研究方法的具体名称,第四个列出在前三个关键词中没有出现的,但作为主要研究对象的事或物质的名称,如有需要,还可以列出作者认为有利于检索和文献利用的第五、第六个等关键词。

3.4 图表

要求设计美观,大小适中,尺寸一般不小于 5 cm×7 cm,线条均匀,主辅线分明,粗线一般为 0.25~0.5 mm,细线一般为粗线的 1/2,图中主线用粗线,如函数曲线等,辅线用细线,如坐标轴线、指示线等;照片要求对比度高,层次清晰。推荐使用三线表。图题、表题须中英文对照,图面、表面一律采用英文。

3.5 参考文献

应引用公开出版物,并仔细核对;欢迎作者充分引用本刊上同行的文献。每条文献应作相应的文献类型标识(见方括号内)。参考文献的原文献为英文,请用英文表示,如原文献为其他文种,请译成英文,在该文献最后用括号注明,如原为日文,则用(in Japanese),如原文献为中文,则给出中文和相应的英文译文。每条文献的顺序和标点如下:专著[M]、学位论文[D]、报告[R]——著者(三名). 文献题名. 版本(专著用),出版地:出版者,出版年. 起止页码;期刊[J]——作者(三名). 论文题目[J]. 刊名,出版年,卷(期):起止页码;专利[P]——专利申请者. 专利题目[P]. 专利国别,专利文献种类,专利号,出版日期;文集[C]——作者(三名). 论文题目[C]. 编者,论文集名,出版地:出版者,年. 起止页码。

3.6 基金资助、作者简介

论文如获省、部级以上的基金资助,须在首页的脚注位置注明基金资助单位全称及批准号。作者简介(含导师简介)应给出姓名(出生年一),性别,籍贯,民族(汉族可省略),职称,学历,研究方向,Email。

4. 收费

本刊遵照中国科协和中国科学院有关文件精神,向录用稿件作者收取适量版面费以聊补本刊的高额亏损。

5. 版权

录用稿件一经刊出,论文版权(含各种介质)均归编辑部所有。本刊向作者酌付稿酬及赠送该期期刊 1 册,抽印本 10 份。

本刊已入编《中国学术期刊(光盘版)》和中国光学期刊网,著作权使用费在奉寄作者稿酬中一次性支付。如有不同意将文章编入上述数据库者,请事先声明,本刊将作适当处理。

特别声明:凡已在国内外正式出版物上登载过的稿件,本刊一律不予刊登。若发现一稿多投者,本刊三年内不接受其稿件,并追补对本刊造成的损失。

凡本刊投稿者,均视作接受上述各项规定,本刊不再另行声明。

本刊在办刊过程中,得到了社会各界的大力协助,谨致谢忱。