

文章编号: 0258-7025(2008)05-0706-06

非傍轴厄米-正弦-高斯光束的特性

屈 军 丁培宏 袁扬胜 孟 凯 崔执凤

(安徽师范大学物理系, 安徽 芜湖 241000)

摘要 为了研究厄米-正弦-高斯(HSiG)光束在非傍轴情形下受参量影响的特性,基于光强二阶矩理论,经过一系列复杂的数学计算,得出了非傍轴厄米-正弦-高斯光束的远场发散角、束腰宽度以及光束传输因子的解析式,并通过数值模拟,得到了它们与离心参量的关系。结果表明,在束腰宽度与波长比值逐渐减小时,随着离心参量趋于 0,当阶数为奇数和偶数时,发散角分别趋于 63.435° 和 73.898° 。束腰宽度和光束传输因子随参量的增加呈现较大的起伏,非傍轴情形下的光束传输因子取值与傍轴情况有很大的不同,其受参量影响不仅可以小于 1,甚至趋于 0。

关键词 物理光学;二阶矩;非傍轴;厄米-正弦-高斯光束;离心参量

中图分类号 O 436 **文献标识码** A

Non-Paraxial Hermite-Sine-Gaussian Beam Character

Qu Jun Ding Peihong Yuan Yangsheng Meng Kai Cui Zhifeng

(Department of Physics, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui 241000, China)

Abstract For studying the character of Hermite-sine-Gaussian (HSiG) beam in non-paraxial case, based on the theory of the second intensity moment and a series of complex calculations, the results of the far-filed divergence angle, waist width and M^2 factor of non-paraxial Hermite-sine-Gaussian beams are derived, and the relationship of them versus the acentric parameters are studied by calculation and plot. The result indicates that the relationship of non-paraxial HSiG beam characters versus the acentric parameter is different from paraxial case. As the parameter ω_0/λ decrease, $\alpha \rightarrow 0$, the far-filed divergence angle with even and odd orders approach 73.898° and 63.435° , respectively. With increasing the parameter, the waist width and M^2 factor show large changes. Because of the effect of parameters, non-paraxial M^2 factor can be less than 1 as well as approaching 0, which is different from paraxial case.

Key words physical optics; second-order moment; non-paraxial; Hermite-sine-Gaussian beam; acentric parameter

1 引言

光束质量一般用光束传输因子方法,即 M^2 因子法来评价^[1],但随着半导体激光器、微腔激光器、光子晶体以及微光学元件等技术的不断发展应用,且在理论上当光束的发散角很大或束宽为波长的数量级时,局限于傍轴情况的方法遇到了困难。对此, M. A. Porrás^[2]采用了光强的精确定义,将 M^2 因子方法推广到了非傍轴的情况,随之各类光束得到了广泛而深入的研究^[3~10]。本文从二阶矩的定义出发,采用光强的精确定义,对非傍轴厄米-正弦-高斯(HSiG)光束作了理论研究,并通过数值模拟,分析了非傍轴厄米-正弦-高斯光束受参量影响的

特性。

2 理论模型

厄米-正弦-高斯光束在 $z = 0$ 平面的二维场分布为^[11]

$$E(x, 0) = i \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_0^2}\right) H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{\omega_0}\right) \sin(\Omega_0 x), \quad (1)$$

式中 ω_0 为高斯振幅分布的束腰宽度, H_m 为 m 阶厄米多项式, Ω_0 为与正弦项有关的光束参量。利用正弦函数与指数函数的关系,由(1)式可得

收稿日期:2007-08-30; 收到修改稿日期:2007-10-28

作者简介:屈 军(1970—),安徽人,教授,主要从事非线性光学与激光传输方面的研究。

E-mail:qujun70@mail.ahnu.edu.cn

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0} \right) \left[\exp \left(-\frac{x^2}{w_0^2} + i\Omega_0 x \right) - \exp \left(-\frac{x^2}{w_0^2} - i\Omega_0 x \right) \right], \quad (2)$$

根据角谱理论,对(2)式进行傅里叶变换,得到空间-频率域中光场复振幅的角谱分布为

$$A_0(p) = i^m \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[H_m \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(-\frac{A^2}{4} \right) - H_m \left(-\frac{B}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(-\frac{B^2}{4} \right) \right], \quad (3)$$

式中 $A = \alpha - 2\pi\omega_0 p/\lambda, B = \alpha + 2\pi\omega_0 p/\lambda, \alpha = \Omega_0 w_0$ 为离心参量, $p = \lambda f_x, f_x$ 为 x 方向的空间频率,由(3)式可知,非傍轴厄米-正弦-高斯光束在 $z = 0$ 处光场复振幅的角谱 $A_0(p)$ 为实数或纯虚数,忽略倏逝波的贡献,二维非傍轴标量光束的远场发散角、束腰宽度及光束质量因子的定义分别为^[7]

$$\tan^2 \theta = \frac{4}{P(z)} \int_{-1}^1 \frac{p^2}{\gamma} |A_0(p)|^2 dp, \quad (4)$$

$$w_{\min}^2 = w_0(0)^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 P(z)} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\partial[A_0(p)\gamma]}{\partial p} \frac{\partial[A_0^*(p)]}{\partial p} dp \right\}, \quad (5)$$

$$M^2 = \frac{\pi}{\lambda} w_{\min} \tan \theta, \quad (6)$$

式中 $\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2}, *$ 为复共轭符号,且

$$P(z) = \operatorname{Re} \left[\int_{-1}^1 \gamma |A(p, z)|^2 dp \right], \quad (7)$$

将(3),(7)式代入(4)~(6)式,经过一系列的复杂计算,可得

$$\tan^2 \theta = 4 \frac{\frac{\pi}{2} \alpha^a F_{a3} F_2^a + \frac{\pi}{2} \alpha_3^b F_2^b - \sqrt{\pi} [1 + (-1)^l] \alpha^c F_c G_0 \frac{\Gamma\left(\frac{3+l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+l}{2}\right)}}{\frac{\pi}{2} F_a \alpha_2^a F_1^a + \frac{\pi}{2} F_b \alpha_2^b F_1^b - \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + (-1)^l] \alpha^c F_c G_0 \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+4}{2}\right)}}, \quad (8)$$

$$w_{\min}^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \left[\begin{aligned} & 2\pi^3 \left(\frac{w_0}{\lambda} \right)^2 F_g g (1-g) \alpha^{g-2} (\alpha^g {}_2F_1^{g_1} + {}_2F_1^{g_2}) + 2\pi^3 \left(\frac{w_0}{\lambda} \right)^2 F_h h (1-h) \alpha^{h-2} (\alpha^h {}_2F_1^{h_1} + {}_2F_1^{h_2}) - \\ & 2\pi^{3/2} \left(\frac{w_0}{\lambda} \right)^2 F_g F_h h g (\Omega_0 \lambda)^{h+g-2} G_p [1 + (-1)^p] \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+4}{2}\right)} - \\ & \pi^{3/2} \frac{w_0}{\lambda} F_g F_h h (\Omega_0 \lambda)^{h+g-1} G_q [-1 + (-1)^q] \frac{\Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+3}{2}\right)} + \\ & \pi^{3/2} \frac{w_0}{\lambda} F_g F_h g (\Omega_0 \lambda)^{h+g-1} G_r [-1 + (-1)^r] \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)} \end{aligned} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\pi}{2} F_a \alpha_2^a F_1^a + \frac{\pi}{2} F_b \alpha_2^b F_1^b - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^c F_c G_0 [1 + (-1)^l] \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+4}{2}\right)}$$

$$M^2 = \frac{4}{\frac{\pi}{2} F_a \alpha_2^a F_1^a + \frac{\pi}{2} F_b \alpha_2^b F_1^b - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^c F_c G_0 [1 + (-1)^l] \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+4}{2}\right)}} \times$$

$$\left\{ 2\pi^3 \left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 F_g g (1-g) \alpha^{g-2} (\alpha^g {}_2F_1^{g_1} + {}_2F_1^{g_2}) + 2\pi^3 \left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 F_h h (1-h) \alpha^{h-2} (\alpha^h {}_2F_1^{h_1} + {}_2F_1^{h_2}) - \right. \\
2\pi^{3/2} \left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^2 F_g F_h h g (\Omega_0 \lambda)^{h+g-2} G_p [1 + (-1)^p] \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+4}{2}\right)} - \\
\pi^{3/2} \frac{\omega_0}{\lambda} F_g F_h h (\Omega_0 \lambda)^{h+g-1} G_q [-1 + (-1)^q] \frac{\Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+3}{2}\right)} + \\
\left. \pi^{3/2} \frac{\omega_0}{\lambda} F_g F_h g (\Omega_0 \lambda)^{g+h-1} G_r [-1 + (-1)^r] \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)} \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

式中 ${}_2F_1^a, {}_2F_1^b, {}_3F_2^a, {}_3F_2^b, {}_2F_1^{g_1}, {}_2F_1^{g_2}, {}_2F_1^{h_1}, {}_2F_1^{h_2}$ 为超几何多项式, Γ 为伽马函数符号,

$$a = 2(m + n_1 - s_1 - s_2), b = 2(m + n_2 - s_3 - s_4), c = 2(m + n_3 - s_5 - s_6), l = 2k_1 + k_2 + k_3,$$

$$g = m + 2n_4 - 2s_7, h = m + 2n_5 - 2s_8, p = i_1 + j_1, q = i_2 + j_2, r = i_3 + j_3,$$

$$F_a = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{[m/2]} \sum_{s_2=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^m m!^2 (-2)^{\frac{a}{2}}}{n_1! s_1! s_2! (m-2s_1)! (m-2s_2)!},$$

$$F_b = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{s_3=0}^{[m/2]} \sum_{s_4=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^m m!^2 (-2)^{\frac{b}{2}}}{n_2! s_3! s_4! (m-2s_3)! (m-2s_4)!},$$

$$F_c = \sum_{n_3=0}^{\infty} \sum_{s_5=0}^{[m/2]} \sum_{s_6=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^m m!^2 (-2)^{\frac{c}{2}}}{n_3! s_5! s_6! (m-2s_5)! (m-2s_6)!},$$

$$G_0 = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \left(\frac{2\pi}{\lambda \Omega_0} \right)^l \times \\ \frac{\text{Pochhammer}(-n_3, k_1) \text{Pochhammer}(2s_6 - m, k_2) \text{Pochhammer}(2s_5 - m, k_3)}{k_1! k_2! k_3!},$$

$$F_g = \sum_{n_4=0}^{\infty} \sum_{s_7=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^{s_7+n_4} m!}{n_4! s_7! (m-2s_7)!} 2^{\frac{1}{2}m-s_7-2n_4},$$

$$F_h = \sum_{n_5=0}^{\infty} \sum_{s_8=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^{s_8+n_5} m!}{n_5! s_8! (m-2s_8)!} 2^{\frac{1}{2}m-s_8-2n_5},$$

$$G_p = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_1} \left(\frac{2\pi}{\Omega_0 \lambda} \right)^p \Gamma(-g+i_1) \Gamma(-h+j_1)}{i_1! j_1! \Gamma(1-g) \Gamma(1-h) \Gamma(1+i_1) \Gamma(1+j_1)},$$

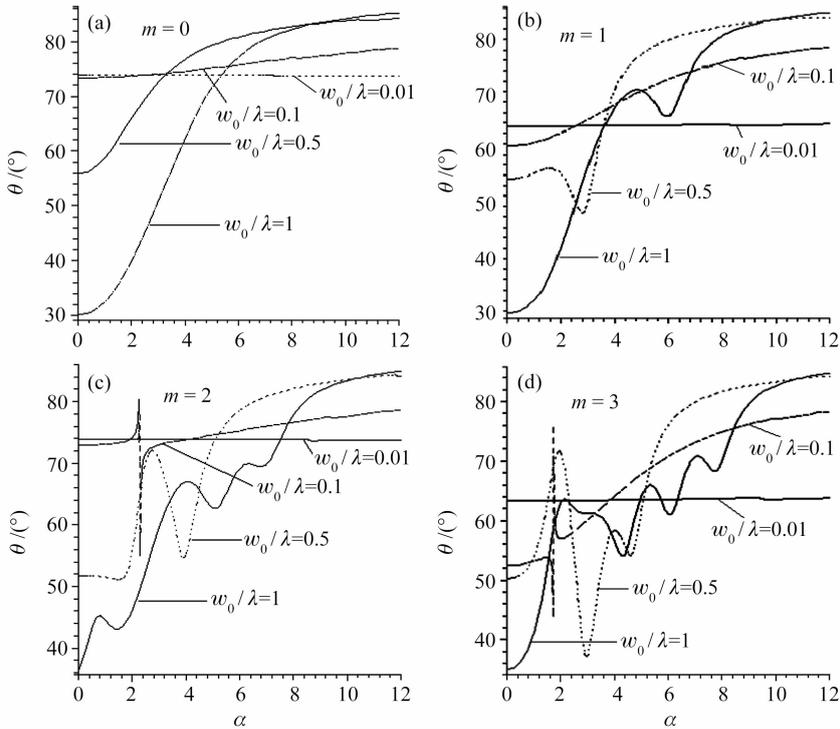
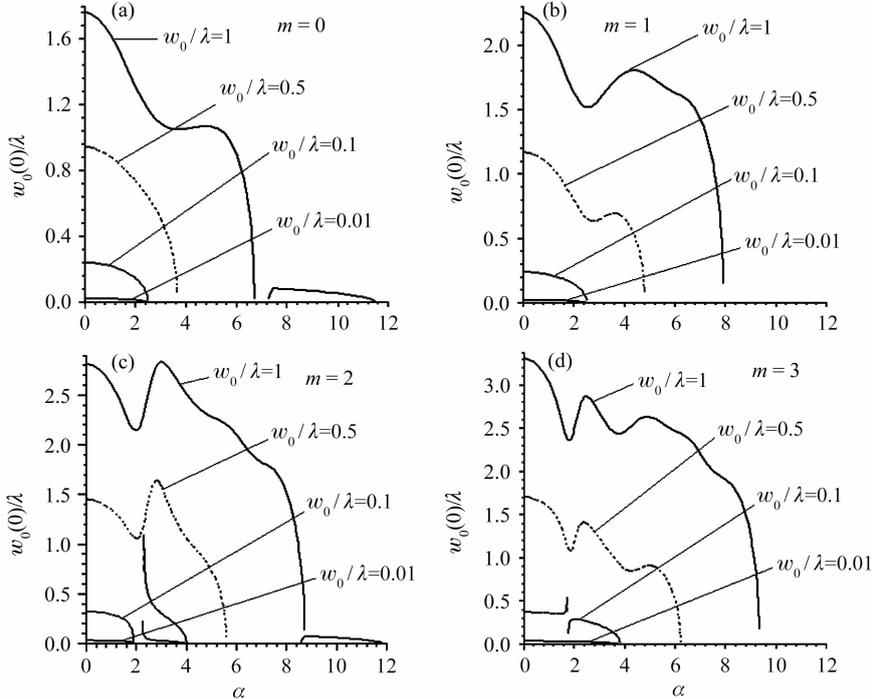
$$G_q = \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_2} \left(\frac{2\pi}{\Omega_0 \lambda} \right)^q \Gamma(-g+i_2) \Gamma(-h+j_2)}{i_2! j_2! \Gamma(1-g) \Gamma(1-h) \Gamma(1+i_2) \Gamma(1+j_2)},$$

$$G_r = \sum_{i_3=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_3} \left(\frac{2\pi}{\Omega_0 \lambda} \right)^r \Gamma(-g+i_3) \Gamma(-h+j_3)}{i_3! j_3! \Gamma(1-g) \Gamma(1-h) \Gamma(1+i_3) \Gamma(1+j_3)}.$$

3 数值计算和分析

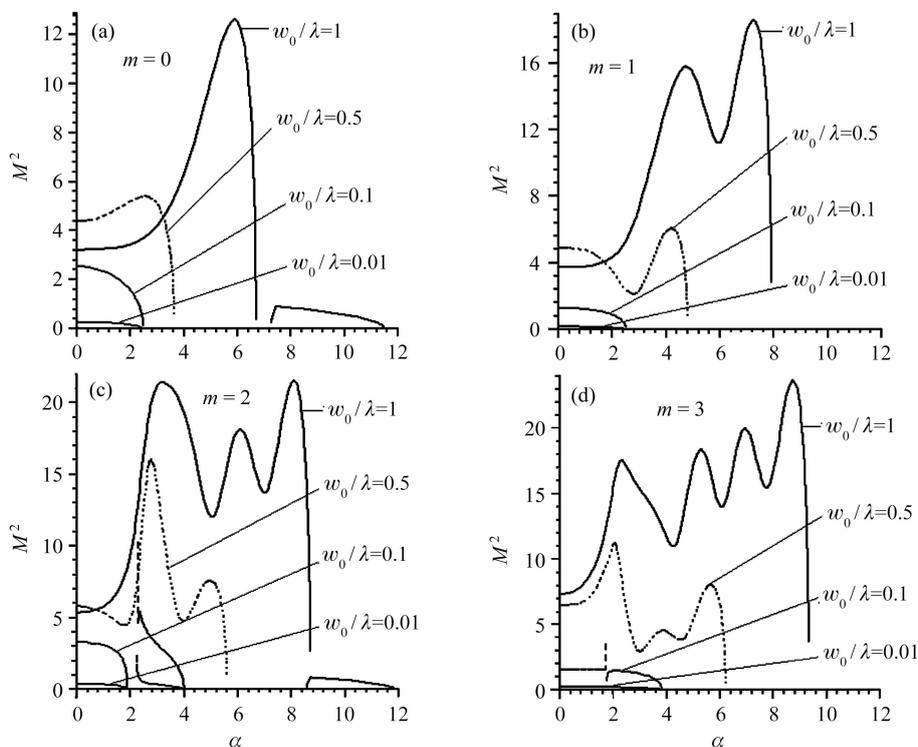
从(8)~(10)式可以看出,反映非傍轴下厄米-正弦-高斯光束特性的参量:远场发散角、束腰宽度及 M^2 因子不仅与厄米多项式的阶数 m 有关,而且还与 Ω_0, ω_0 以及 λ 有关。为了研究非傍轴厄米-正弦

-高斯光束受参量影响的具体特性,令离心参量 α 为变量,取 $\omega_0/\lambda = 1, 0.5, 0.1, 0.01$, 当阶数 $m = 0, 1, 2, 3$ 时,可以得到厄米-正弦-高斯光束远场发散角、束腰宽度与波长比以及 M^2 因子随参量 α 的变化情况,分别如图 1,图 2,图 3 所示。

图 1 远场发散角 θ 随离心参量 α 的变化Fig. 1 Far-field divergence angle θ versus α 图 2 束腰宽度与波长之比 $w_0(0)/\lambda$ 随离心参量 α 的变化Fig. 2 Ratio of waist width to wavelength $w_0(0)/\lambda$ versus α

由图可见,随着阶数 m 的增大,三个特性参量随参量 α 的变化都比较复杂,呈现较大起伏。图 1 中,在 w_0/λ 取一定值时,随着 $\alpha \rightarrow 0$ 时,非傍轴厄米-正弦-高斯光束的远场发散角趋于一定值,但当 w_0/λ

取值变小时,此定值又趋于一极限值,经计算,当 $m = 0, 2, 4, \dots$ 为偶数阶时,发散角 θ 随 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时有一极限值,经计算极限值为 73.898° , 而当 $m = 1, 3, \dots$ 为奇数阶时,随 $w_0/\lambda \rightarrow 0$ 时,发散角 θ 也趋于一极

图3 M^2 因子随离心参量 α 的变化Fig. 3 M^2 factor versus α

限值,此极限值为 63.435° 。图2中,束腰宽度与波长比 $w_0(0)/\lambda$ 随着 α 的增加呈下降趋势,而随 w_0/λ 值的增加,表现为增加趋势。图3中,随着 α 的增加, M^2 因子在起伏中增加,随后又急剧下降,而且随 w_0/λ 取值的增加, M^2 因子在不断增加中又出现较大的起伏变化,但当 w_0/λ 取值不断减小趋于0时,如在 $w_0/\lambda = 0.01$ 时, M^2 因子的值不仅可以小于1,而且甚至趋于0,这与傍轴情况有很大的不同。另外,在图2和图3中,由于取值的原因,导致图形出现间断点。

因此,调节 w_0/λ 和 α 的取值,可以减小激光束的发散角和束腰宽度,从而减小 M^2 因子的值,抑制光束的发散,进一步提高激光光束质量。这对光束在传输中的应用、激光器的设计和光束质量的评价方面有一定的参考价值和指导意义。

4 结 论

基于光强二阶矩理论,经过一系列复杂的数学计算,得出了非傍轴厄米-正弦-高斯光束的远场发散角、束腰宽度以及光束传输因子的解析式。数值计算表明,非傍轴厄米-正弦-高斯光束的远场发散角随厄米阶数取值的奇偶趋于两极限值,束腰宽度和光束质量因子随参量的变化呈现较大起伏,尤其

非傍轴情况下的光束质量因子,不仅可以小于1,甚至趋于0。

参 考 文 献

- 1 A. E. Siegman. New developments in laser resonators [C]. SPIE, 1990, **1224**:2~20
- 2 M. A. Porrás. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **127**(1-3):79~95
- 3 Wen Qiao, Zhang Bin. M^2 -factor of partially coherent Gaussian Schell-model beams propagating in media [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(2):212~216
文 侨,张 彬. 部分相干高斯-谢尔模型光束在介质中传输的 M^2 因子[J]. *光学学报*, 2006, **26**(2):212~216
- 4 Lu Wei, Liu Liren, Sun Jianfeng *et al.*. Phase-space product of beam from Gaussian Schell-model source by using coherent-mode representation [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(3):471~476
鲁 伟,刘立人,孙建锋等. 相干模表示的部分相干高斯-谢尔光束的相位-空间积[J]. *光学学报*, 2007, **27**(3):471~476
- 5 Duan Kailiang, Lü Baida. Validity of series expansion corrections to the paraxial approximation of non-paraxial beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(4):432~436
段开棕,吕百达. 非傍轴光束级数修正解的有效性[J]. *中国激光*, 2004, **31**(4):432~436
- 6 Tao Fang, Xin Ye, Jinfu Niu *et al.*. Definition and measurement of the beam propagation factor M^2 for chromatic laser beams [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2006, **4**(10):586~588
- 7 Xiaoping Kang, Baida Lü. The M^2 factor of nonparaxial Hermite-Gaussian beams and related problems [J]. *Optik*, 2005, **116**(5):232~236
- 8 Ye Hongwei, Li Xinyang, Xian Hao *et al.*. Relationship

- between the beam excursion error and the beam quality β factor of long-term exposure spot [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(6):809~813
- 叶红卫,李新阳,鲜 浩 等. 光束漂移误差与长曝光光斑光束质量 β 因子的关系[J]. 中国激光, 2007, **34**(6):809~813
- 9 Fang Tao, Ye Xin, Wang Zhimin *et al.*. Real-time measurement of beam quality factor M^2 based on diffraction gratings [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(5):650~654
- 房 滔,叶 訢,王志敏 等. 一种基于衍射光栅光束质量 M^2 因子的实时检测技术[J]. 中国激光, 2006, **33**(5):650~654
- 10 Li Te, Ning Yongqiang, Sun Yanfang *et al.*. Beam quality of 980 nm high power vertical-cavity surface-emitting laser [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(5):641~645
- 李 特,宁永强,孙艳芳 等. 980 nm 高功率 VCSEL 的光束质量[J]. 中国激光, 2007, **34**(5):641~645
- 11 Wang Xiqing, Lü Baida. The M^2 -factor of Hermite-sinh-Gaussian beams [J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, **51**(2):247~252
- 王喜庆,吕百达. 厄米-双曲正弦-高斯光束的 M^2 因子[J]. 物理学报, 2002, **51**(2):247~252

Chinese Optics Letters (《中国光学快报》)“生物光子学”专题 征 稿 启 事

光学技术给生物医学成像、传感以及诊断学领域带来了重大变革,并产生了巨大影响。例如,内窥式激光共聚焦显微镜、光学相干层析技术(OCT)等光学成像技术为生物组织提供了高分辨率的三维影像;而各种光学传感技术也被应用于生物医学中提供高灵敏度的痕量气体分析和化学分析。*Chinese Optics Letters* (《中国光学快报》)计划于2008年12月推出“生物光子学”专题栏目,现特向国内外广大读者以及作者征集“生物光子学”方面原创性的研究论文,旨在集中反映该领域基础理论的研究进展以及最先进的临床试验水平。

征稿范围包括:

- Optical imaging techniques
- Non-invasive optical diagnostics
- Laser tissue treatment
- Optical bio-sensors
- Optical biomedical instrumentation
- Other

Feature Editor:

Jin U. Kang

Department of Electrical and Computer Engineering, Johns Hopkins University

截稿日期:2008年9月15日

投稿方式以及格式:可直接将稿件电子版发至邮箱:col@mail.shcnc.ac.cn(主题标明“生物光子学专题投稿”),或通过网上投稿系统直接上传稿件(投稿类型选择 focus issue submission),详情请参见《中国光学快报》网站:<http://www.col.org.cn>。投稿必须是英文稿,其电子版请使用 Latex 或者 MS-Word 格式。有任何问题请发邮件至 col@mail.shcnc.ac.cn 询问。