

文章编号: 0258-7025(2008)04-0592-05

基于最小二乘迭代的空载波相移算法

徐建程¹ 许 乔¹ 陈建平²

(¹ 成都精密光学工程研究中心, 四川 成都 610041; ² 闽江学院, 福建 福州 350108)

摘要 为了解决空载波相移(SCPS)法中载波频率不确定引入的误差,提出了一种基于最小二乘迭代的空载波相移算法。先将单幅随机空载波频率干涉图转化成四幅随机相移量的时域干涉图,然后用最小二乘迭代求得相位信息。模拟计算和实验结果表明,该算法只需 10 次左右的迭代计算就可实现算法峰值(PV)精度优于 $\lambda/20$, 均方根(RMS)精度优于 $\lambda/200$, 高于快速傅里叶变换(FFT)法;通过提高空载波频率,使载波方向接近 45° 或 135° 可提高该算法的精度。

关键词 测量与计量;干涉测量;空载波相移;最小二乘迭代;傅里叶分析

中图分类号 O 436.1 **文献标识码** A

Spatial-Carrier Phase-Shifting Algorithm Based on Least-Squares Iteration

Xu Jiancheng¹ Xu Qiao¹ Chen Jianping²

(¹ *Fine Optical Engineering Research Center, Chengdu, Sichuan 610041, China*)
(² *Minjiang University, Fuzhou, Fujian 350108, China*)

Abstract An advanced spatial-carrier phase-shifting (SCPS) algorithm based on least-squares iterative procedure is proposed to cope with the errors caused by the uncertainty of spatial carrier frequency. The algorithm divides the randomly spatial carrier interferogram into four randomly phase-shifted interferograms and then obtains the phase distributions by a least-squares iterative procedure. The algorithm provides stable and fast convergence, high spatial frequency resolution and accurate phase extraction with only one single randomly spatial carrier interferogram. The results of computer simulation and experiment show that the accuracy is better than $\lambda/20$ (peak value, PV) and $\lambda/200$ (root mean square, RMS) with about 10 times iterations and it is better than that obtained by the fast Fourier transform (FFT) algorithm. Computer simulations also show that the accuracy of the algorithm can be improved by increasing the spatial carrier frequency and making the direction of the carrier near 45° or 135° .

Key words measurement and metrology; interferometry; spatial carrier phase shifting; least-squares iteration; Fourier analysis

1 引言

时域相移法(PSI)^[1]因测量精度高而在光学检测中得到了广泛的应用,但它至少需要三幅干涉图,受环境振动影响大。而快速傅里叶变换(FFT)法^[2]只需要一幅载波干涉图,算法简单,适合动态测量,但测量精度相对较低。空载波相移(SCPS)法^[3]结合了快速傅里叶变换法和时域相移法的优点,即通过处理单幅空载波干涉图近似达到时域相移法

的精度。目前实现空载波相移的方法主要有两种:一种是利用偏振分光器件得到 4 幅相移 $\pi/2$ 干涉图的瞬态干涉测量^[4~7],但是偏振器件本身缺陷会引入误差,使得对应像素间的相移不严格等于 $\pi/2$,而且该类瞬态干涉仪通常采用泰曼-格林(Twyman-Green)形式,对系统光学元件要求苛刻;另一种是通过倾斜参考镜引入一个适当的空载波量^[8,9],使相邻像素点间的相位差为 $\pi/2$,但是通常很难使

收稿日期:2007-08-07; 收到修改稿日期:2007-09-18

基金项目:中国工程物理研究院人才基金(zx0104)资助项目。

作者简介:徐建程(1981—),男,浙江人,博士研究生,主要从事精密光学检测和光学设计方面的研究。

E-mail: xujiancheng8143@126.com

导师简介:许 乔(1972—),男,四川人,研究员,博士生导师,主要从事先进光学制造和检测方面的研究。

E-mail: xuqiao@vip.sina.com

空间载波严格等于理论值。而在时域相移法中,为了解决相移量不确定带来的误差,Zhaoyang Wang等^[10]对最小二乘迭代法进行改进,使得该算法只需不小于三幅随机相移的干涉图即可求得相位分布。根据倾斜参考面引入空间载波的特点和最小二乘迭代算法的原理,本文提出了基于最小二乘迭代的空域载波相移算法,以解决空间载波相移法中随机载波频率引入的误差。

2 算法原理

2.1 空域相移转化为时域相移

空间载波干涉图的光强分布可表示为

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + 2\pi(f_x x + f_y y)], \quad (1)$$

式中 a, b 分别为干涉条纹的背景和调制度, f_x, f_y 分别为 x, y 方向的载波量, ϕ 为被测相位分布。假设 f_x, f_y 远大于 a, b, ϕ 的变化频率,则可认为相邻像素间 a, b, ϕ 保持不变,如图 1(a)所示。令干涉条纹对应的相位 $\Phi(x, y) = \phi(x, y) + 2\pi(f_x x + f_y y)$, 则 $\Phi(B) - \Phi(A) = \delta_x, \Phi(C) - \Phi(A) = \delta_y, \Phi(D) - \Phi(A) = \delta_x + \delta_y, \delta_x, \delta_y$ 分别为载波引入相邻像素 x, y 方向的相位差。对如图 1(a)所示的一幅载波干涉图分成分别以所有像素 A 组成第一帧子干涉图,所有像素 B, C, D 组成第二、三、四帧子干涉图。与第一帧子干涉图相比,其他三帧干涉图的相移量分别为 $2\delta_x, 2\delta_y, 2\delta_x + 2\delta_y$ 。也可以按图 1(b)所示的方法分成 4 帧干涉图: ABEC DGIJM; BEFDGHJMN; CDGIJMKLO; DGHJMNLOP, 相移量分别为 $\delta_x, \delta_y, \delta_x + \delta_y$ 。

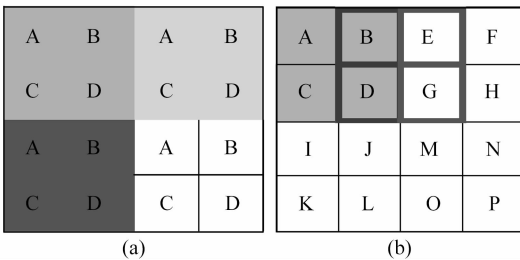


图 1 干涉图像素分布。(a) 相移量为 $2\delta_x, 2\delta_y, 2\delta_x + 2\delta_y$; (b) 相移量为 $\delta_x, \delta_y, \delta_x + \delta_y$

Fig. 1 Pixel distribution of interferogram. (a) phase shifts are $2\delta_x, 2\delta_y, 2\delta_x + 2\delta_y$; (b) phase shifts are $\delta_x, \delta_y, \delta_x + \delta_y$

2.2 时域相移最小二乘法迭代

通过将空域相移转化为时域相移,即将一幅随机空间载波干涉图转化为四幅相移量不确定的时域

干涉图,然后用最小二乘迭代法从四幅干涉图中提取相位分布。具体步骤如下:

2.2.1 相移量决定相位分布

将(1)式改写为

$$I_{ij}^t = a_{ij} + b_{ij} \cos(\phi_j + \delta_i), \quad (2)$$

式中脚标 i 表示第 i 帧子干涉图($i = 1, 2, 3, 4$), j 表示在每一帧子干涉图中的一个像素点($j = 1, 2, \dots, N, N$ 为像素个数), ϕ_j 为第 j 个像素点的相位值, δ_i 为第 i 帧相移量, a_{ij} 为背景光强, b_{ij} 为调制度,上标 t 表示理论值。假设背景光强和调制度在各帧子干涉图间是相同的,只是像素位置的函数,即 $a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = a_{4j}, b_{1j} = b_{2j} = b_{3j} = b_{4j}$ 。并设 $a_j = a_{ij}, b_j = b_{ij} \cos \phi_j, c_j = -b_{ij} \sin \phi_j$, 则(2)式变成

$$I_{ij}^t = a_j + b_j \cos \delta_i + c_j \sin \delta_i, \quad (3)$$

式中包含 $3N$ 个未知量和 $4N$ 个方程。令

$$S_j = \sum_{i=1}^M (I_{ij}^t - I_{ij})^2 = \sum_{i=1}^M (a_j + b_j \cos \delta_i + c_j \sin \delta_i - I_{ij})^2, \quad (4)$$

式中 I_{ij} 为 4 帧子干涉图的光强,按照最小二乘原理,如果 S_j 最小,必须满足

$$\frac{\partial S_j}{\partial a_j} = 0, \quad \frac{\partial S_j}{\partial b_j} = 0, \quad \frac{\partial S_j}{\partial c_j} = 0, \quad (5)$$

则有

$$\begin{bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \cos^2 \delta_i & \sum_{i=1}^M \cos \delta_i \sin \delta_i \\ \sum_{i=1}^M \sin \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin \delta_i \cos \delta_i & \sum_{i=1}^M \sin^2 \delta_i \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M I_{ij} \\ \sum_{i=1}^M I_{ij} \cos \delta_i \\ \sum_{i=1}^M I_{ij} \sin \delta_i \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中 $M = 4$ 。由载波干涉图可粗略估计 $\delta_x, \delta_y, \delta_x + \delta_y$, 将 $[0, \delta_x, \delta_y, \delta_x + \delta_y]$ 代入(6)式中的 $[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$, 求得 b_j, c_j , 进而得到相位分布

$$\phi_j = \arctan(-c_j/b_j). \quad (7)$$

2.2.2 相位分布决定相移量

为了求得相移量的近似值,假设光强背景和调制度与像素位置无关,只与不同帧子干涉图有关,即

$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{iN}, b_{i1} = b_{i2} = \dots = b_{iN}$, 并假设 $a'_i = a_{ij}, b'_i = b_{ij} \cos \delta_i, c'_i = -b_{ij} \sin \delta_i$, 则(2)式可改写为

$$\begin{bmatrix} a'_i \\ b'_i \\ c'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{j=1}^N \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin \phi_j \\ \sum_{j=1}^N \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \cos^2 \phi_j & \sum_{j=1}^N \cos \phi_j \sin \phi_j \\ \sum_{j=1}^N \sin \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin \phi_j \cos \phi_j & \sum_{j=1}^N \sin^2 \phi_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N I_{ij} \\ \sum_{j=1}^N I_{ij} \cos \phi_j \\ \sum_{j=1}^N I_{ij} \sin \phi_j \end{bmatrix}, \quad (9)$$

把(7)式中所得 ϕ_j 分别代入(9)式中,可计算得到 a'_i, b'_i, c'_i , 则相移量可表示为

$$\delta_i = \arctan(-c'_i/b'_i). \quad (10)$$

2.2.3 收敛判断

每完成前两步迭代运算,都会得到一组相移量,随着迭代次数增多,和上一次迭代得到的相移量越接近,同时也越接近真实相移量,因此2.2.2节的近似假设对最终相位的影响可以忽略,影响最终相位的是迭代次数。经过 k 次迭代运算之后,如果满足

$$\sum_{i=1}^M |(\delta_i^k - \delta_i^{k-1}) - (\delta_i^{k-1} - \delta_i^{k-2})| < \epsilon, \quad (11)$$

则第 k 次迭代后得到相位分布即为最终求得的相位分布,式中 ϵ 为预先设定的精度要求,本文取 $\epsilon = 10^{-4}$ 。

3 模拟和实验

令空域干涉图强度分布为

$$I(x, y) = 150 \exp(-0.35r) + 150 \exp(-0.7r) \cos[2\pi(0.5r^2 + Ex + Fy)], \quad (12)$$

式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, E, F$ 均为载波频率, $E = 5, F = 7.5$ 。像素个数 N 为 128, 如图 2(a) 所示。按照图 1(a) 所示的方法将空域干涉图转化为 4 帧具有一定相移量的子干涉图, 用最小二乘法迭代 10 次后求得相位分布如图 2(b) 所示。将求得相位与 $0.5r^2$ 之间的差值定义为误差分布, 如图 2(c) 所示。表 1 列出了计算得到的参数及其误差, 可知该最小二乘法迭代算法可精确地得到 4 帧子干涉图间的相移量, 误差小于 0.005 rad, 从而实现算法峰值(PV)误差精度优于 $\lambda/50$, 均方根(RMS)精度优于 $\lambda/400$ 。若采用图 1(b) 所示的方法, 则经过 9 次迭代后的峰值误差为 0.0294 λ 和均方根误差为 0.0041 λ 。若采用快速傅里叶变换

$$I_{ij} = a'_i + b'_i \cos \phi_j + c'_i \sin \phi_j, \quad (8)$$

式中有 $3M$ 个未知量和 MN 个方程, 其中 $N > 3, M = 4$ 。则由最小二乘法可得

(FFT)算法, 求得的相位误差主要分布在边缘区域, 如图 2(d) 所示, 它的误差峰值和均方根值分别为 0.1669 λ 和 0.0085 λ 。比较图 2(c), (d) 可知, 基于最小二乘法迭代的空域载波相移算法的精度比快速傅里叶变换算法高。

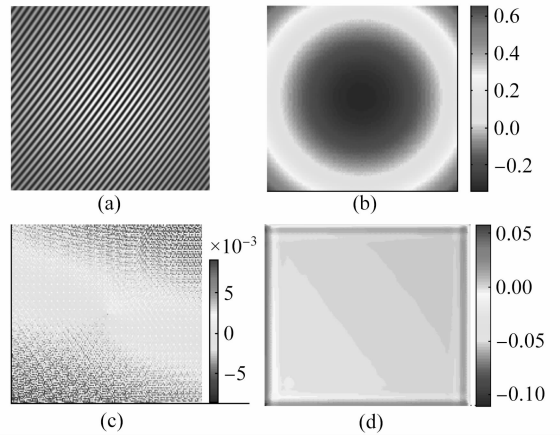


图 2 基于最小二乘法迭代的空域载波相移算法。(a) 干涉图; (b) 相位分布; (c) 误差分布; (d) 快速傅里叶变换法求得的误差分布

Fig. 2 Spatial-carrier phase-shifting algorithm based on least-squares iteration. (a) interferogram; (b) phase distribution; (c) error distribution; (d) error distribution obtained by FFT method

表 1 空间载波相移算法求得的参数与理论值的比较

Table 1 Comparison between parameters obtained by proposed SCPS and theoretical values

	Theoretical value	Calculated value	Error
PV/ λ	1	1.0031	0.0174
RMS/ λ	0.2125	0.2124	0.0025
δ_1 /rad	0.4909	0.4932	0.0023
δ_2 /rad	0.7363	0.7379	0.0016
δ_3 /rad	1.2272	1.2313	0.0041

通过改变(12)式中的空间载波频率 E 和 F , 由算法迭代 10 次求得各个空间载波频率下算法的误差如表 2 所示。通过固定空间载波频率大小 ($E + F = 20$)、改变载波方向(改变 E, F 大小), 由算法迭代 10 次求得各个载波方向下算法的误差如表 3 所示。由表 2, 3 可知, 算法精度随着空间载波频率的增大而提高; 载波频率大小恒定时, x, y 方向的载波频率大小越接近 (45° 或 135°), 算法精度越高。这是因为测试波前自身引入的相移量误差相对于载波引入的相移量变小, 所以算法精度提高。在(12)式中加入随机噪声, 由算法迭代 10 次求得各个随机噪声幅度下算法的误差如表 4 所示, 随着随机噪声幅度的增加, 算法误差明显增大。这是因为空间载波相移算法是用相邻像素光强来求该像素的相位, 所以对随机噪声敏感。

表 2 不同载波频率下的算法误差

Table 2 Errors of the algorithm under different spatial-carrier frequencies

Carrier frequency	$E = 2.5, F = 3.8$	$E = 5, F = 7.5$	$E = 10, F = 15$	$E = 20, F = 30$
PV / λ	0.0798	0.0347	0.0174	0.0099
RMS / λ	0.0136	0.0052	0.0026	0.0015

表 3 不同载波方向下的算法误差

Table 3 Errors of the algorithm under different directions of spatial-carrier frequency

Carrier frequency	$E = 2.5, F = 17.5$	$E = 5, F = 15$	$E = 7.5, F = 12.5$	$E = 10, F = 10$
PV / λ	0.0831	0.0347	0.0227	0.0175
RMS / λ	0.0142	0.0062	0.0035	0.0026

表 4 不同随机噪声下的算法误差

Table 4 Errors of the algorithm under different random noises

Random noise amplitude	0	2	4	6	8	10
PV / λ	0.0175	0.0395	0.0741	0.1030	0.1437	0.1758
RMS / λ	0.0026	0.0046	0.0082	0.0121	0.0159	0.0200

在隔振平台上用 ZYGO 干涉仪测量平面元件得到的干涉图如图 3(a)所示, 用该干涉仪自带的 13 步相移算法和快速傅里叶变换算法测得的面形图如图 3(b), (c)所示; 而用本文提出的空间载波相移算法测得的面形图如图 3(d)所示, 三种算法得到的面形参数如表 2 所示。由图 3 和表 2 可得: 空间载波相移算法求得的面形形状和面形峰值、均方根值比快速傅里叶变换算法更接近 13 步相移算法。

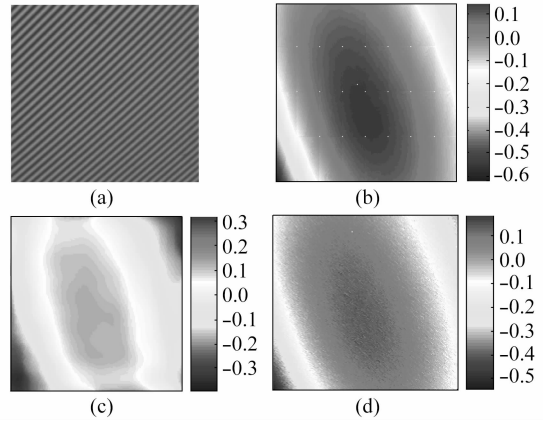


图 3 空间载波相移算法与时域相移法、快速傅里叶变换算法的比较。(a) 干涉图; (b) 时域相移法算法; (c) 快速傅里叶变换算法; (d) 空间载波相移算法

Fig. 3 Comparison among SCPS, PSI and FFT. (a) interferogram; (b) phase distribution by PSI; (c) phase distribution by FFT; (d) phase distribution by SCPS

表 5 三种算法求得的面形参数比较

Table 5 Comparison of figure parameters among SCPS, PSI and FFT

Method	PSI	FFT	SCPS(a)	SCPS(b)
PV / λ	0.7707	0.7131	0.7333	0.7309
RMS / λ	0.1138	0.1069	0.1097	0.1084

Annotation: SCPS (a) and SCPS (b) denote transformation from spatial carrier interferogram into 4 temporal phase-shift interferograms corresponding to Fig. 1(a) and (b) respectively.

4 结 论

提出了一种基于最小二乘迭代的空域载波相移算法, 该算法先将随机空域载波频率的干涉图转化成 4 幅随机相移量的时域干涉图, 然后用最小二乘迭代法求得相位信息。该算法只需单幅随机空域载波频率的干涉图, 适合动态测量, 并且有效地解决了传统空间载波相移法中的载波频率不确定引入的误差。模拟计算和实验结果表明, 该算法比快速傅里叶变换算法精度高, 只需 10 次左右的迭代计算就可实现算法峰值精度优于 $\lambda/20$, 均方根精度优于 $\lambda/200$; 通过提高空间载波频率, 使载波方向接近 45° 或 135° 可提高该算法的精度, 该算法对随机噪声敏感。如何抑制随机噪声、补偿被测波前自身引入的相移量误差是今后需要努力解决的问题。

参 考 文 献

- 1 Lü Xiaoxu, Zhong Liyun, Zhang Yimo. The holographic reconstructing algorithm and its error analysis about phase-

- shifting phase measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(9):1367~1371
- 吕晓旭,钟丽云,张以谟. 相移相位测量的全息再现算法及测量误差分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(9):1367~1371
- 2 Xu Jiancheng, Shi Qikai, Chai Liqun *et al.*. Spatial Fourier fringe analysis with single three-surface interferogram [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(9):1260~1264
- 徐建程,石崎凯,柴立群等. 三表面干涉条纹空域傅里叶分析[J]. *中国激光*, 2006, **33**(9):1260~1264
- 3 M. Pirga, M. Kujawińska. Two-directional spatial-carrier phase-shifting method for analysis of complex interferograms [C]. *SPIE*, 1994, **2340**:163~169
- 4 Qian Kemaο, Miao Hong, Wu Xiaoping. A real-time polarization phase shifting technique for dynamic measurement [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(1):64~67
- 钱克矛,缪泓,伍小平. 一种用于动态过程测量的实时偏振相移方法[J]. *光学学报*, 2001, **21**(1):64~67
- 5 Zuo Fen, Chen Lei, Xu Chunsheng. Simultaneous phase-shifting interferometry based on two-dimension grating [J]. *Acta Optica Sinica*, 2007, **27**(4):663~667
- 左芬,陈磊,徐春生. 基于二维光栅分光的同步移相干涉测量技术[J]. *光学学报*, 2007, **27**(4):663~667
- 6 Zuo Fen, Chen Lei. Development of anti-vibration technology in simultaneous phase-shifting interferometry [J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2006, **43**(11):43~48
- 左芬,陈磊. 同步移相抗振光干涉测量技术研究进展[J]. *激光与光电子学进展*, 2006, **43**(11):43~48
- 7 Matt Novak, James Millerd, Neal Brock *et al.*. Analysis of a micropolarizer array-based simultaneous phase-shifting Interferometer [J]. *Appl. Opt.*, 2005, **44**(32):6861~6868
- 8 P. H. Chan, P. J. Bryanston-Cross, S. C. Parker. Spatial phase stepping method of fringe-pattern analysis [J]. *Opt. and Lasers Eng.*, 1995, **23**(5):343~354
- 9 M. Servin, F. J. Cuevas. A novel technique for spatial phase-shifting interferometry [J]. *J. Mod. Opt.*, 1995, **42**(9):1853~1862
- 10 Zhaoyang Wang, Bongtae Han. Advanced iterative algorithm for phase extraction of randomly phase-shifted interferograms [J]. *Opt. Lett.*, 2004, **29**(14):1671~1673