

文章编号: 0258-7025(2008)03-0401-05

# 圆柱偏振贝塞耳-高斯光束经 高数值孔径透镜的聚焦

张志明<sup>1</sup> 蒲继雄<sup>2\*</sup> 王喜庆<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> 西南交通大学理学院物理系, 四川 成都 610031; <sup>2</sup> 华侨大学电子科学与技术系, 福建 泉州 362021)

**摘要** 利用里查德-沃耳夫(Richards-Wolf)矢量衍射积分模型, 推导了圆柱偏振贝塞耳-高斯(CPBG)光束经高数值孔径透镜聚焦的光场表达式, 并用数值计算分析了各相关参数的取值变化对焦面及焦点附近光强分布的影响。研究表明, 焦面光强大小及光强剖面形状与贝塞耳函数项相关参数  $\beta$ , 偏振旋转角  $\phi_0$ , 光束束腰宽度  $w_0$  和数值孔径角  $\alpha$  的取值相关。通过控制各相关参数的取值, 在聚焦场中获得了有广泛实际应用的具有涡旋性质的局域空心光束和平顶光束。

**关键词** 非线性光学; 高数值孔径; 贝塞耳-高斯光束; 里查德-沃耳夫矢量衍射积分; 圆柱偏振; 涡旋

**中图分类号** O 436.3 **文献标识码** A

## Focusing of Cylindrically Polarized Bessel-Gaussian Beams through a High Numerical-Aperture Lens

Zhang Zhiming<sup>1</sup> Pu Jixiong<sup>2</sup> Wang Xiqing<sup>1</sup>

(<sup>1</sup> Department of Physics, Science College, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)  
(<sup>2</sup> Department of Electronic Science & Technology, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China)

**Abstract** The light field expressions of cylindrically polarized Bessel-Gaussian (CPBG) beams focused by a high numerical-aperture lens are derived using Richards-Wolf vectorial diffraction method. Numerical calculations are taken to analyze the influences of varying values of the parameters on the light intensity distribution at the focal plane and in the vicinity of focus. The research results show that both the intensity at the focal plane and its profile shape depend on the values of parameter  $\beta$  corresponding to Bessel function, polarization rotation angle  $\phi_0$ , beam waist width  $w_0$  and the maximal angle  $\alpha$  determined by the numerical-aperture. By adjusting the values of corresponding parameters, the bottle beams and the flat-topped beams which possess the characteristics of vortex are obtained and will have many significant applications.

**Key words** nonlinear optics; high numerical-aperture; Bessel-Gaussian beams; Richards - Wolf vectorial diffraction; cylindrically polarization; vortex

## 1 引 言

涡旋光束中的波前位错(亦称相位奇点)的振幅为零且相位具有不确定性<sup>[1~5]</sup>, 而且还具有轨道角动量(OAM), 能够应用于粒子的捕获和旋转等领域<sup>[6,7]</sup>。因此, 对圆柱对称性偏振的涡旋光束经高数值孔径透镜聚焦的研究具有重要的实际意

义<sup>[8~12]</sup>。利用里查德-沃耳夫(Richards-Wolf)矢量衍射积分模型, 推导圆柱偏振贝塞耳-高斯(CPBG)光束经高数值孔径透镜聚焦的光场表达式, 并利用数值计算分析各相关参数的取值变化对焦面及焦点附近光强分布的影响。通过控制各相关参数的取值, 在聚焦场中获得了有广泛实际应用的具有涡旋性质的局域空心光束和平顶光束。

收稿日期: 2007-09-25; 收到修改稿日期: 2007-10-26

基金项目: 国家自然科学基金(60477041)和福建省科技计划重点项目(2007H0027)资助课题。

作者简介: 张志明(1985—), 男, 四川人, 硕士研究生, 主要从事激光光束变换研究。E-mail: zzm985@163.com

导师简介: 王喜庆(1959—), 男, 教授, 主要从事激光光束变换研究。E-mail: xqwang@home.swjtu.edu.cn

\* 通信联系人。E-mail: jixiong@hqu.edu.cn

## 2 理论分析

圆柱偏振涡旋光束的偏振结构如图 1 所示, 每个点的偏振方向都相对于径向旋转了  $\phi_0$ 。用两个半波片组成的偏振旋转器<sup>[10]</sup>, 通过旋转其中一个半波片能控制偏振旋转角  $\phi_0$ , 产生各种圆柱偏振涡旋光束。贝塞耳-高斯光束为柱坐标中近轴波动方程的一组正交解, 其横向场分布包含了贝塞耳函数, 且其解含有分离相位项, 亦被称为涡旋项。因此高阶贝塞耳-高斯光束为涡旋光束的一类。

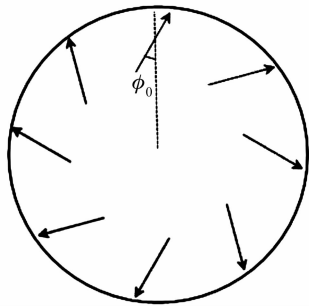


图 1 圆柱偏振涡旋光束的偏振示意图

Fig. 1 Polarization pattern of a generalized cylindrically polarized Bessel-Gaussian beam

当圆柱偏振涡旋光束经高数值孔径的透镜聚焦, 而该透镜是消球差的并遵守正弦条件时, 可将圆柱偏振涡旋光束的聚焦场表示为<sup>[10]</sup>

$$E(r, \varphi, z) = E_r e_r + E_\varphi e_\varphi + E_z e_z, \quad (1)$$

式中  $e_r, e_\varphi$  和  $e_z$  分别为径向、角向和纵向的单位矢量,  $r, \varphi$  和  $z$  分别为聚焦区域观察点的径向、角向和纵向坐标,  $E_r, E_\varphi$  和  $E_z$  则分别为三个正交方向的振幅, 利用里查德-沃耳夫矢量衍射积分模型, 可得其表达式为

$$E_r(r, \varphi, z) = \frac{i^n A}{2} \exp(in\varphi) \cos\phi_0 \times \int_0^\alpha \sqrt{\cos\theta} \sin(2\theta) P(\theta) \exp[ik(z\cos\theta)] \times [J_{n+1}(kr\sin\theta) - J_{n-1}(kr\sin\theta)] d\theta, \quad (2)$$

$$E_\varphi(r, \varphi, z) = i^n A \exp(in\varphi) \sin\phi_0 \times \int_0^\alpha \sqrt{\cos\theta} \sin\theta P(\theta) \exp[ik(z\cos\theta)] \times [J_{n+1}(kr\sin\theta) - J_{n-1}(kr\sin\theta)] d\theta, \quad (3)$$

$$E_z(r, \varphi, z) = 2i^{n+1} A \exp(in\varphi) \cos\phi_0 \times \int_0^\alpha \sqrt{\cos\theta} \sin^2\theta P(\theta) \exp[ik(z\cos\theta)] \times J_n(kr\sin\theta) d\theta, \quad (4)$$

式中  $A$  为振幅常数,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $P(\theta)$  为入射光场关于  $\theta$  的分布函数,  $\alpha = \arcsin(\text{NA})$  为由数值孔径(NA)决定的光线的最大会聚角,  $J_n, J_{n+1}$  和  $J_{n-1}$  分别为  $n, n+1$  和  $n-1$  阶第一类贝塞耳函数。  $n$  阶贝

塞耳-高斯光束在  $z = 0$  平面上的横向场分布函数为

$$E(r) = J_n(\beta r) \exp(-r^2/\omega_0^2), \quad (5)$$

式中  $\beta$  为贝塞耳函数项相关参数,  $\omega_0$  为相应基模高斯光束的束腰宽度。一般的透镜在设计过程中均遵守正弦条件, 即  $r = f \sin\theta$ <sup>[13]</sup>, 其中  $f$  为聚焦透镜的焦距, 可得  $n$  阶贝塞耳-高斯光束关于  $\theta$  的分布函数为

$$P(\theta) = J_n(\beta f \sin\theta) \exp(-f^2 \sin^2\theta/\omega_0^2), \quad (6)$$

将(6)式代入(2)~(4)式计算三个正交方向的光强, 即可得到圆柱偏振贝塞耳-高斯光束经高数值孔径的透镜聚焦的总光强为三个方向的光强之和, 可以发现所有光强都与  $\varphi$  无关, 表明光强分布具有圆柱对称性。

## 3 数值计算与讨论

利用数值计算分析各相关参数的取值变化对焦

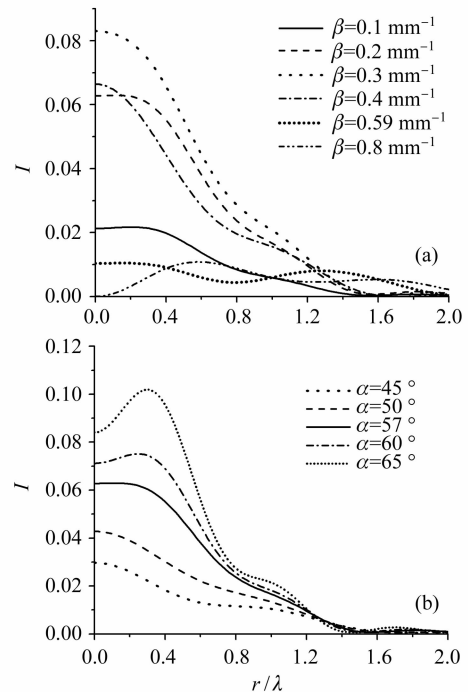


图 2  $n = 1$  时焦面上光强分布随各相关参数的演变。图中相关参数为:  $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\phi_0 = 10^\circ$ ,  $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 57^\circ$ 。(a) 贝塞耳函数项相关参数  $\beta$ ; (b) 数值孔径角  $\alpha$

Fig. 2 Evolution of intensity distribution on the focal plane with varying correlated parameters at  $n = 1$ . The values of correlated parameters except the varying ones are selected as:  $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\phi_0 = 10^\circ$ ,  $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 57^\circ$ . (a) parameter  $\beta$  relating to Bessel function; (b) maximal angle  $\alpha$  determined by NA

面及焦点附近光强分布的影响。所有计算中所选透镜焦距和激光光束波长分别为： $f = 1 \text{ cm}$ ， $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ ，其中横坐标  $r$  和纵坐标  $z$  均归一化为  $\lambda$  的倍数。图 2 为  $n = 1$  时焦面上光强分布随各相关参数的演变情况，其中图 2(a) 为焦面上光强分布随贝塞耳函数项相关参数  $\beta$  的演变。当  $\beta = 0.1 \text{ mm}^{-1}$  时，在  $x = 0$  两侧各存在一个光强略高于轴上点的峰值，随着  $\beta$  的增大，光强剖面依次演变为平顶型分布 ( $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$  时) 和类似高斯型分布 ( $\beta = 0.3 \text{ mm}^{-1}$  时)。在此过程中光强随着  $\beta$  的增大而增强；当  $\beta = 0.4 \text{ mm}^{-1}$  时，光强剖面仍为类似高斯型分布，但光强却相对于  $\beta = 0.3 \text{ mm}^{-1}$  时减小，随着  $\beta$  的继续增大，光强亦继续减小，而光强剖面则依次演变为平顶型分布 ( $\beta = 0.59 \text{ mm}^{-1}$  时) 和空心型分布 (即  $\beta = 0.8 \text{ mm}^{-1}$  时轴上光强为 0)。图 2(b) 为焦面上光强分布随数值孔径的演变。可以看出，焦面光强随着  $\alpha$  的增大而增强，而光强剖面由类似于高斯型的分布 ( $\alpha = 50^\circ$  时) 演变为平顶型分布 ( $\alpha = 57^\circ$  时)，随着  $\alpha$  的继续增加，在轴外出现一个光强高于轴上点的峰值，而且  $\alpha$  越大峰值与轴上点的光强的差值越大。

图 3(a), (b), (c) 分别为  $n = 1$  时，焦面上  $r = 0$

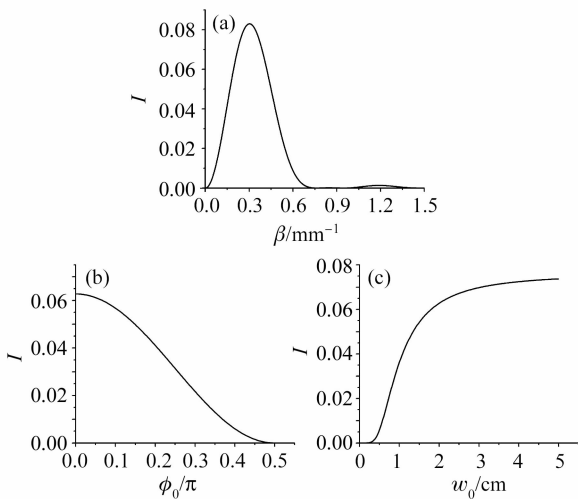


图 3  $n = 1$  时焦点光强随各相关参数的变化。图中相关参数为： $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ ， $w_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\alpha = 57^\circ$ 。(a) 贝塞耳函数项相关参数  $\beta$ ；(b) 偏振旋转角  $\phi_0$ ；(c) 光束束腰宽度  $w_0$

Fig. 3 Evolution of intensity of focus with varying correlated parameters at  $n = 1$ . The values of correlated parameters except the varying ones are selected as:  $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ ， $w_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\alpha = 57^\circ$ . (a) parameter  $\beta$  relating to Bessel function; (b) polarization rotation angle  $\phi_0$ ; (c) beam waist width  $w_0$

即焦点处的光强随不同束腰宽度  $w_0$ ，偏振角  $\phi_0$  和贝塞耳函数项相关参数  $\beta$  的取值的变化情况。由图 3(a) 可以看出，焦点处的光强先随  $\beta$  的增加而增强，在  $\beta > 0.3 \text{ mm}^{-1}$  之后，光强则随  $\beta$  的增加而减小，该变化趋势在图 2(a) 中已表现出来。在  $\beta = 0.8 \text{ mm}^{-1}$  时焦点光强降为零，形成空心型光强分布。由图 3(b) 可以看出，当  $\phi_0$  在  $0 \sim \pi/2$  之间变化时，焦点光强随  $\phi_0$  的增加而减小。由图 3(c) 可以看出，焦点光强随  $w_0$  的增加而增加，但增幅越来越小并最终趋于一定值。这是由于受透镜孔径的限制，当  $w_0$  超过一定范围之后，大于透镜半径部分的光场不能被汇聚到观察点处，不能对光强产生贡献。

图 4 为  $n = 1$  时选择适当参数所形成的平顶型光强分布。 $x-z$  平面的光强分布等照线图如图 4(a) 所示。光强在纵向为高斯型分布，如图 4(b) 所示。 $z = 0$  的焦平面上的横向光强则具有平顶型分布，如图 4(c) 所示，半峰全宽(FWHM) 为  $1.35\lambda$ 。

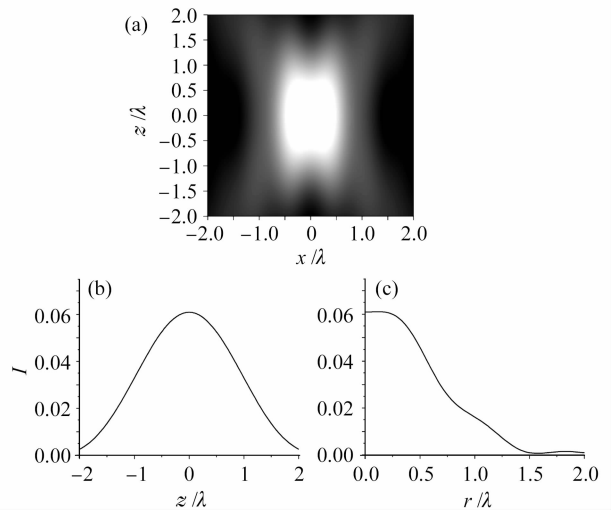


图 4  $n = 1$  时平顶型光强分布。所选参数为： $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $w_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ 。(a)  $x-z$  平面光强分布；(b) 轴上光强分布；(c) 焦平面上横向光强分布

Fig. 4 Flat-topped intensity distribution at  $n = 1$ . The values of correlated parameters are selected as:  $\beta = 0.2 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $w_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ . (a) intensity distribution on  $x-z$  plane; (b) intensity distribution on the  $z$  axis; (c) intensity distribution on the focal plane

图 5 为  $n = 1$  时选择适当参数所形成的局域空心型光强分布。图 5(a) 为  $x-z$  平面的光强分布等照线图，光强在横向和纵向均为空心型分布。由于光强分布具有圆柱对称性，形成了三维的局域空心光束，由半峰全宽定义的该空心区域的横向尺寸为

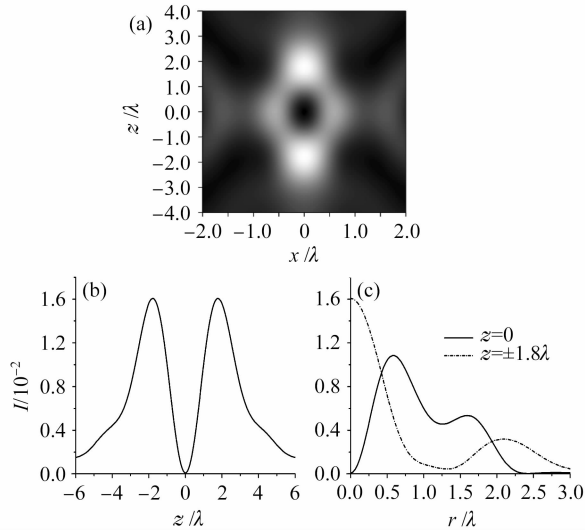


图 5  $n = 1$  时局域空心型光强分布。所选参数为： $\beta = 0.8 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ 。(a)  $x-z$  平面光强分布；(b) 轴上光强分布；(c) 横向光强分布

Fig. 5 Intensity distribution of bottle beams at  $n = 1$ . The values of correlated parameters are selected as:  $\beta = 0.8 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ . (a) intensity distribution on the  $x-z$  plane; (b) intensity distribution on the  $z$ -axis; (c) transversal intensity distribution

$0.55\lambda$ ，纵向尺寸为  $1.72\lambda$ 。由图 5(b)可以看出，轴上光强关于焦点呈对称分布，并在  $z = \pm 1.8\lambda$  处各有一个光强极大值。图 5(c) 为  $z = 0$  和  $z = \pm 1.8\lambda$  的横向光强分布。可以看出，光强剖面由焦平面上的空心型分布演变为类似高斯型分布，且  $z = 0$  的焦平面上轴外光强峰值比  $z = \pm 1.8\lambda$  处的轴上光强峰值小，其比值为  $0.67:1$ 。所以该局域空心光束的暗斑的环绕光强分布不够均匀。

$n = 2$  时  $x-z$  平面光强分布等照线图如图 6 所示。可以看出， $x = 0$  的轴上光强始终为零，形成了二维的空心型光强分布，该空心区域的横向半峰全宽为  $0.62\lambda$ 。由于此时的轴上光强始终为零，而图 5(a) 中的局域空心光束的光强分布的  $x = 0$  两侧的峰值光强明显小于  $z = \pm 1.8\lambda$  处的轴上峰值光强。因此可以将图 6 所示的具有二维的空心型光强分布的光束与图 5(a) 中的三维局域空心光束相叠加，来增强图 5(a) 中  $x = 0$  两侧的峰值光强，以获得具有更为均匀的环绕光强分布的局域空心光束。

图 7 为将一阶与二阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束相叠加时所得到的局域空心光束的光强分布，其中二阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束与一阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束的振幅常数之比为  $0.205:1$ ，由半

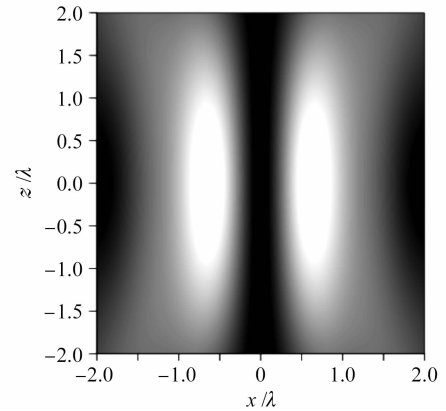


图 6  $n = 2$  时  $x-z$  平面的光强分布。相关参数为：

$\beta = 0.456 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 50^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$

Fig. 6 Intensity distribution on  $x-z$  plane at  $n = 2$ . The values of correlated parameters are selected as:  $\beta = 0.456 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 50^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$

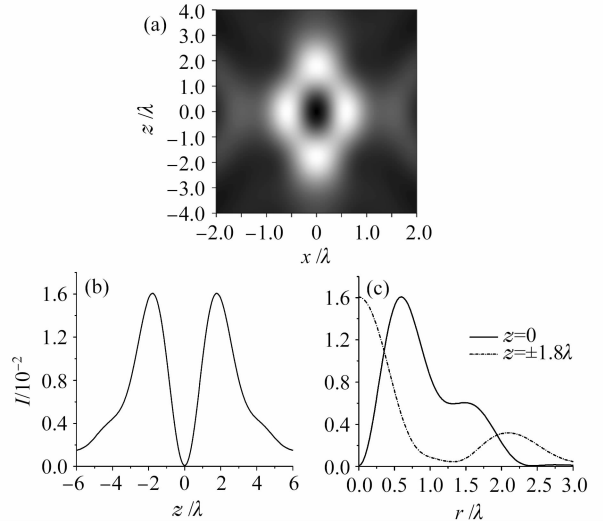


图 7 一阶与二阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束相叠加时的光强分布。所选参数为： $\beta_1 = 0.8 \text{ mm}^{-1}$ ， $\beta_2 = 0.456 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ 。(a)  $x-z$  平面光强分布；(b) 轴上光强分布；(c) 横向光强分布

Fig. 7 Intensity distribution of superposition of the first order and the second order CPBG beams. The values of correlated parameters are selected as:  $\beta_1 = 0.8 \text{ mm}^{-1}$ ， $\beta_2 = 0.456 \text{ mm}^{-1}$ ， $\alpha = 57^\circ$ ， $\omega_0 = 2 \text{ cm}$ ， $\phi_0 = 10^\circ$ . (a) intensity distribution on the  $x-z$  plane; (b) intensity distribution on the  $z$ -axis; (c) transversal intensity distribution

峰全宽定义的横向尺寸为  $0.58\lambda$ ，纵向尺寸为  $1.72\lambda$ 。由图 7(a)可以看出，该局域空心光束的暗斑的环绕光强分布与图 5(a) 相比更为均匀；图 7(b) 为轴上光强分布，由于二阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束经透镜聚焦后的轴上光强始终为零，所以此时的轴

上光强分布与单束一阶圆柱偏振贝塞耳-高斯光束的轴上光强分布相同,即与图 5(b)相同;图 7(c)为  $z = 0$  和  $z = \pm 1.8\lambda$  的横向光强分布,焦平面上轴外光强的峰值与  $z = \pm 1.8\lambda$  处的轴上光强峰值相等,从而获得了具有均匀环绕光强分布的局域空心光束。

## 4 结 论

利用里查德-沃耳夫矢量衍射积分模型,推导了圆柱偏振贝塞耳-高斯光束经高数值孔径透镜聚焦的光场表达式,并用数值计算分析了各相关参数的取值变化对焦面及焦点附近光强分布的影响。研究表明,焦面光强大小及光强剖面形状与贝塞耳函数项相关参数  $\beta$ , 偏振旋转角  $\phi_0$ , 光束束腰宽度  $w_0$  和数值孔径角  $\alpha$  的取值相关。因此通过控制各相关参数的取值,可以改变圆柱偏振贝塞耳-高斯光束经高数值孔径透镜的聚焦光场分布,获得有广泛实际应用的局域空心光束和平顶光束。此外,由于高阶贝塞耳-高斯光束为涡旋光束,因此其被聚焦后得到的三维局域空心光束亦具有涡旋的性质,可以向被捕获或导引的粒子传输轨道角动量,从而产生广泛的实际应用,如粒子的捕获、导引和诱导旋转、充当光学扳手以及激光打印和材料加工等领域的应用。

## 参 考 文 献

1 J. F. Nye, M. V. Berry. Dislocations in wave trains [J].

- Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1974, **336**(1605):165~190
- 2 Victor V. Kotlyar, Anton A. Almazov, Svetlana N. Khonina *et al.*. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2005, **22**(5):849~861
- 3 M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov. Progress in Optics [M]. E. Wolf edn. Amsterdam: Elsevier, Science B. V. 2001. 219~276
- 4 Chen Yuan, Pu Jixiong, Liu Xiaoyun. Focusing properties of the partially coherent beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(10):1375~1378
- 陈 媛,蒲继雄,刘晓云. 部分相干光束的聚焦特性[J]. 中国激光, 2006, **33**(10):1375~1378
- 5 Duan Kailiang, Lü Baida. Validity of series expansion corrections to the paraxial approximation of non-paraxial beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(4):432~436
- 段开棕,吕百达. 非傍轴光束级数修正解的有效性[J]. 中国激光, 2004, **31**(4):432~436
- 6 S. H. Tao, X. C. Yuan, J. Lin *et al.*. Residue orbital angular momentum in interferenced double vortex beams with unequal topological charges [J]. *Opt. Express*, 2006, **14**(2):535~541
- 7 Takahiro Kuga, Yoshio Torii, Noritsugu Shiokawa *et al.*. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(25):4713~4716
- 8 S. Quabis, R. Dorn, M. Eberler *et al.*. The focus of light-theoretical calculation and experimental tomographic reconstruction [J]. *Appl. Phys. B*, 2001, **72**(1):109~113
- 9 L. E. Helseth. Optical vortices in focal regions [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **229**(1):85~91
- 10 T. Grosjean, D. Courjon. Smallest focal spots [J]. *Opt. Commun.*, 2007, **272**(2):314~319
- 11 Djenan Ganic, Xiaosong Gan, Min Gu. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space [J]. *Opt. Express*, 2003, **11**(21):2747~2752.
- 12 Qiwen Zhan, James R. Leger. Focus shaping using cylindrical vector beams [J]. *Opt. Express*, 2002, **10**(7):324~331
- 13 Min Gu. Advanced Optical Imaging Theory [M]. Heidelberg, Springer, 1999. 154