

文章编号: 0258-7025(2008)02-0235-05

# 介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模模场分布的高斯近似

郭福源<sup>1</sup> 李连煌<sup>1</sup> 王明华<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 福建师范大学激光与光电子技术研究所 光子技术福建省重点实验室, 福建 福州 350007  
<sup>2</sup> 浙江大学信息与电子工程学系, 浙江 杭州 310027

**摘要** 基于介质平面光波导端面无受限衍射场光束的光束传输因子的特点, 阐明光波导 TE<sub>0</sub> 模模场分布采用高斯分布近似表达的合理性。基于场分布间的匹配效率计算公式, 提出采用等效匹配效率方法确定用于高斯近似表达的等效模场半宽度, 给出基于光波导芯层半宽度和归一化芯层驻波参量和归一化包层倏逝波参量表达的光波导等效模场半宽度的函数表达式, 给出高斯近似分布与光波导本征场分布的匹配效率, 阐明采用等效匹配效率方法确定等效模场半宽度的合理性。采用求解方程组的方法, 给出基于光波导芯层半宽度和归一化频率表达的光波导等效模场半宽度的拟合函数表达式, 并基于拟合引起的误差分析阐明了拟合函数表达式的精确性。

**关键词** 导波光学; 模场分布; 高斯近似; 模场半宽度; 匹配效率; 拟合

**中图分类号** TN 256; O 436.1 **文献标识码** A

## Gaussian Approximation for Mode Field Distribution of Dielectric Planar Waveguide TE<sub>0</sub> Mode

Guo Fuyuan<sup>1</sup> Li Lianhuang<sup>1</sup> Wang Minghua<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Fujian Provincial Key Laboratory of Photonic Technology, Institute of Laser & Optoelectronics Technology, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian 350007, China  
<sup>2</sup> Department of Information Science & Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China

**Abstract** Based on the characteristic of the beam propagation factor of the diffractive beam from the end surface of dielectric planar waveguide, the rationality of the Gaussian approximation for the mode field distribution of planar waveguide TE<sub>0</sub> mode is clarified. As the computing formula of the matching efficiency between two field distributions is engaged, the method of equivalent matching efficiency is advanced for ascertaining the equivalent mode field half width of the Gaussian approximation expression, and the computing formula of equivalent mode field half width which is expressed by the half thickness of core layer, the normalized standing wave parameter of core layer and the normalized evanescent wave parameter of cladding layer of the planar waveguide are acquired, and the matching efficiency between the Gaussian distribution and the eigen mode field distribution of planar waveguide TE<sub>0</sub> mode is presented. The rationality of the method of equivalent matching efficiency for computing equivalent mode field half width is explained. Finally, as the method of solving the equations is introduced, the fitting expression of equivalent mode field half width which is expressed by the half thickness of core layer and the normalized frequency of planar waveguide is suggested, and the accuracy of fitting expression is showed by the error analysis.

**Key words** guided wave optics; mode field distribution; Gaussian approximation; mode field half width; matching efficiency; fitting

## 1 引言

由于高斯光束的概念和高斯函数的傅里叶变换

等数学运算方法比较成熟, 高斯近似仍常被用于基  
模介质光波导和光纤模场分布的近似描述<sup>[1~4]</sup>, 基

收稿日期: 2007-04-23; 收到修改稿日期: 2007-09-26

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60436020), 福建省自然科学基金(A0540001)和福建省科技厅 F5 类项目(2007F5040)资助课题。

作者简介: 郭福源(1965—), 男, 福建人, 博士, 教授, 主要从事光波导理论和光束传输理论及其应用的研究。

E-mail: guofy@fjnu.edu.cn

于光纤归一化频率  $V$  和芯层半径  $a$  表达的单模光纤的模场半径的经验公式由 D. Marcuse 提出并得到了广泛应用<sup>[4~6]</sup>。根据二阶矩算法和微分算法模场半宽度(或半径)的定义,我们给出基于光波导芯层归一化驻波参量  $U$ ,包层归一化倏逝波参量  $W$  和光波导芯层半宽度(或光纤芯层半径)  $a$  表达的折射率阶跃分布单模介质平面光波导模场半宽度(或光纤模场半径)  $\omega_{SM}$ ,  $\omega_{D0}$  和波导端面受限衍射场光束的光束传输因子  $M^2$  的计算公式<sup>[7,8]</sup>。

在弱导条件下,由于折射率阶跃分布的单模介质平面光波导的  $TE_0$  模和  $TM_0$  模的模场分布差异较小,可以采用  $TE_0$  模的模场特性替代  $TM_0$  模的模场特性表达平面光波导基模模场特性。且由于光波导归一化频率  $V$  大于 1 的  $TE_0$  模介质平面光波导端面无受限衍射场光束的光束传输因子  $M^2$  较接近于 1,光波导模场分布采用高斯函数近似表达有一定的合理性。但是,由于基于二阶矩算法和微分算法定义的光波导模场半宽度存在一定的差异,难以明确哪种算法定义的光波导模场半宽度更为合理。本文提出采用等效匹配效率方法计算介质平面光波导  $TE_0$  模的等效模场半宽度,并采用求解方程组的方法给出基于常用光波导基本参量  $V$  和  $a$  表达的等效模场半宽度的拟合函数表达式。本文给出的等效模场半宽度计算公式可为快速分析光束与光波导的耦合和两个光波导之间的纵向接触和非接触耦合特性提供理论基础。

## 2 光波导 $TE_0$ 模模场分布的高斯近似

折射率对称阶跃分布的介质平面光波导基模为  $TE_0$  模和  $TM_0$  模,在忽略描述光波纵向传输特性的时谐波动项时,平面光波导芯层和包层的归一化模场分布分别为<sup>[9,10]</sup>

$$\Psi_1(x) = \cos(U|x/a|) \quad |x| \leq a, \quad (1)$$

$$\Psi_2(x) = \cos U \exp[-W(|x/a| - 1)] \quad |x| > a, \quad (2)$$

式中  $U$  和  $W$  满足特征方程  $W = \xi U \tan U$ ,其中,对于  $TE_0$  模,  $\xi = 1$ ;对于  $TM_0$  模,  $\xi = n_2^2/n_1^2$ ,  $n_1$  和  $n_2$  分别为平面光波导芯层和包层的折射率。

根据折射率对称阶跃分布的介质平面光波导的基本性质,在弱导条件下,即平面光波导芯层-包层相对折射率差  $\Delta = (n_1^2 - n_2^2)/(2n_1^2) \ll 1$ ,平面光波导  $TE_0$  模的有效折射率  $n_{TE,eff}$  和  $TM_0$  模的有效折射率  $n_{TM,eff}$  的差异较小,模间的相对有效折射率差  $\delta n_{eff}$

$= 1 - n_{TM,eff}/n_{TE,eff}$  可表示为

$$\delta n_{eff} = \frac{4U^2 W^2 \Delta^2}{V^4 (1+W)}. \quad (3)$$

以常用的硅基二氧化硅材料弱导单模介质平面光波导为例,  $n_1 = 1.4493$ ,  $n_2 = 1.4440$ ,  $\Delta = 0.365\%$ ,  $a = 3.0 \mu\text{m}$ ,波长  $\lambda = 1.55252 \mu\text{m}$ ,  $U = 0.9158$ ,  $W = 1.1924$ ,  $V = 1.5035$ 。由(3)式知,模间的相对有效折射率差  $\delta n_{eff} = 5.67 \times 10^{-6}$ 。可见,在弱导条件下,平面光波导的  $TE_0$  模和  $TM_0$  模的模场分布差异较小,可以采用  $TE_0$  模的模场特性替代  $TM_0$  模的模场特性表达平面光波导基模模场特性。

光波导端面无受限衍射场光束的光束传输因子  $M^2$  基于二阶矩算法定义,在傍轴近似条件下,基于二阶矩算法定义的介质平面光波导  $TE_0$  模端面无受限衍射场光束的光束传输因子可表示为<sup>[7]</sup>

$$M^2 = \left[ \frac{2U^2}{W} + \frac{2(U^2 - 1)W}{1+W} - \frac{2U^2 W^2}{3(1+W)^2} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

当光波导归一化频率  $V$  满足:  $1.3 < V < 5.2$  时,由(4)式知,  $1.01 < M^2 < 1.05$ ,  $M^2$  因子接近于 1。可见,在上述归一化频率范围内,光波导的基模模场分布采用高斯近似有一定的合理性。当忽略描述纵向传输的时谐波动项时,介质平面光波导的基模归一化模场分布可采用高斯函数形式近似表达为

$$\Psi_{eq}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_{eq}^2}\right), \quad (5)$$

式中  $\omega_{eq}$  为等效模场半宽度。

当光波导归一化频率  $V > \pi/2$  时,光波导模场包含基模模场和高阶模模场,参照光波导基模模场分布的高斯函数形式近似表达,在弱导条件下,光波导的高阶模模场分布可采用方镜共焦腔的  $TEM_{mm}$  模厄米-高斯近似表达。

根据 K. Hayata 等定义的二阶矩算法模场半宽度<sup>[11]</sup>和 An-Hui Liang 等定义的二阶矩算法模场半宽度<sup>[12]</sup>,经典的折射率对称阶跃分布的介质平面光波导  $TE_0$  模的等效模场半宽度可采用基于二阶矩算法定义的光波导模场半宽度  $\omega_{SM}$  和基于微分算法定义的光波导模场半宽度  $\omega_{D0}$  表达为<sup>[7]</sup>

$$\omega_{SM} = a \left[ 2 + \frac{2}{W} + \frac{2}{W^2} - \frac{2}{U^2} - \frac{2W}{3(1+W)} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$\omega_{D0} = a \left[ \frac{1+W}{U^2 W} \right]^{1/2}. \quad (7)$$

平面光波导  $TE_0$  模端面无受限衍射场光束的  $M^2$  因子实际上是二阶矩算法和微分算法两种定义

的模场半宽度的比值,  $M^2 = \omega_{SM}/\omega_{DO}$ 。由于  $M^2 > 1$ , 两种定义的模场半宽度关系为:  $\omega_{SM} > \omega_{DO}$ 。

以上述 TE<sub>0</sub> 模介质平面光波导参数为例, 由 (4) 式知, 光波导端面无受限衍射场光束的传输因子  $M^2 = 1.0325$ , 即  $M^2$  因子较接近于 1, 模场分布可以采用高斯近似表达。由 (6) 和 (7) 式知,  $\omega_{SM} = 4.5861 \mu\text{m}$ ,  $\omega_{DO} = 4.4418 \mu\text{m}$ , 二者存在一定的差异。

由于基于二阶矩算法和微分算法定义的光波导模场半宽度存在一定的差异, 本文提出采用等效匹配效率方法计算介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模模场半宽度, 由等效匹配效率方法确定的模场半宽度表达的高斯近似分布与基于二阶矩算法和微分算子定义的光波导模场半宽度表达的高斯近似分布具有相同匹配效率。

模场间匹配效率计算公式借鉴光波导纵向耦合时激励源场分布对接收光波导本征场分布的激发效率计算公式或重叠面积积分计算公式<sup>[2, 13, 14]</sup>, 在二维坐标系下, 场分布  $\Psi_1(x)$  与场分布  $\Psi_2(x)$  的匹配效率  $\eta(1, 2)$  为

$$\eta(1, 2) = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^2(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^2(x) dx} \quad (8)$$

若  $\Psi_1(x)$  和  $\Psi_2(x)$  为高斯分布, 它们的模场半宽度分别为  $\omega_1$  和  $\omega_2$ , 则这两种分布的匹配效率

$$\eta(1, 2) = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (9)$$

若模场半宽度分别为  $\omega_{SM}$  和  $\omega_{eq}$  的光场分布的匹配效率  $\eta(SM, eq)$  与模场半宽度分别为  $\omega_{DO}$  和  $\omega_{eq}$  的光场分布的匹配效率  $\eta(DO, eq)$  相同, 即  $\eta(SM, eq) = \eta(DO, eq)$ , 则由 (9) 式知, 基于等效匹配效率方法确定的光波导 TE<sub>0</sub> 模模场半宽度  $\omega_{eq}$  与基于二阶矩算法定义的光波导模场半宽度  $\omega_{SM}$  和基于微分算法定义的光波导模场半宽度  $\omega_{DO}$  的关系为

$$\omega_{eq} = \sqrt{\omega_{SM}\omega_{DO}} \quad (10)$$

由 (6), (7) 和 (10) 式知, 基于等效匹配效率方法确定介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模的等效模场半宽度可由光波导基本参数表达为

$$\omega_{eq} = a \left[ \frac{4}{3U^2} - \frac{2(1+W)}{U^4W} + \frac{2(1+2W+2W^2)}{U^2W^3} \right]^{1/4} \quad (11)$$

由 (11) 式知, 折射率对称阶跃分布的介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模的等效模场半宽度  $\omega_{eq}$  由光波导参量

$U, W$  和  $a$  表达, 随隐含参量光波导归一化频率  $V$  的增加单调递减, 等效模场半宽度与  $V$  和  $a$  的关系如图 1 中的实线所示。其中, 当光波导归一化频率  $V \rightarrow 0$  时, 光波导模场半宽度远大于波导尺寸半宽度,  $\omega_{eq} \gg a$ ; 当  $V \rightarrow \infty$  时,  $\omega_{eq} \rightarrow 0.6784a$ , 仍以上述 TE<sub>0</sub> 模介质平面光波导参数为例,  $\omega_{eq} = 1.5045a$ 。

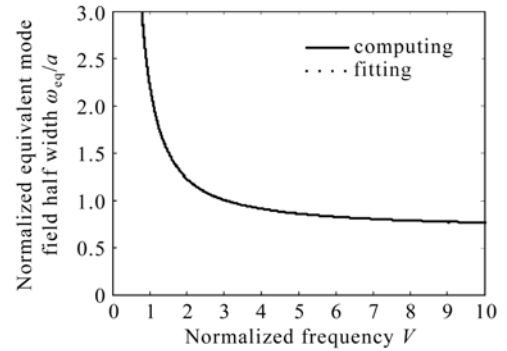


图 1 归一化等效模场半宽度与归一化频率的关系曲线  
Fig. 1 Normalized equivalent mode field half width versus normalized frequency

介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模模场分布高斯近似表达的精确度可以采用由 (5) 式表达的高斯分布  $\Psi_{eq}(x)$  与由 (1) 和 (2) 式表达的光波导本征模场分布  $\Psi_{eigen}(x)$  的匹配效率  $\eta(eq, eigen)$  计算, 计算式仍为 (8) 式形式, 将 (8) 式中的下标 1 和 2 由 eq 和 eigen 替代即可。

由 (8) 式知, 基于等效匹配效率方法确定的介质平面光波导 TE<sub>0</sub> 模等效模场半宽度表达的高斯分布与光波导本征模场分布的匹配效率与光波导归一化频率  $V$  的关系如图 2 所示, 呈抛物线状。当  $V \rightarrow 2.287$  时, 分布  $\Psi_{eq}(x)$  与  $\Psi_{eigen}(x)$  的匹配效率为极大值,  $\eta_{max}(eq, eigen) = 0.9991$ ; 当  $V \rightarrow \infty$  时, 匹配效率  $\eta(eq, eigen) = 0.9886$ ; 当光波导归一化频率  $V$  满足  $V > 0.651$  时, 匹配效率  $\eta(eq, eigen) > 0.98$ ,

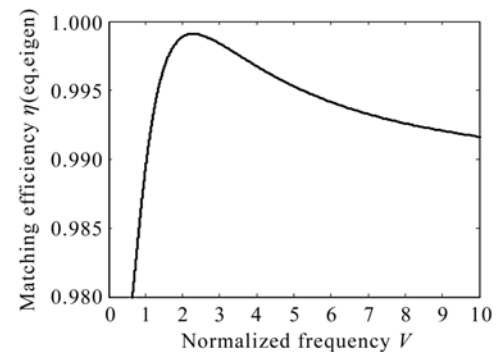


图 2 两种场分布的匹配效率与归一化频率的关系曲线  
Fig. 2 Matching efficiency between two field distributions versus normalized frequency

仍以上述  $TE_0$  模介质平面光波导参数为例, 匹配效率  $\eta(\text{eq}, \text{eigen}) = 0.9966$ 。

### 3 光波导 $TE_0$ 模等效模场半宽度的拟合函数

由(11)式知, 折射率对称阶跃分布的介质平面光波导  $TE_0$  模的等效模场半宽度  $\omega_{\text{eq}}$  由光波导参量  $U, W$  和  $a$  表达。由于光波导归一化频率  $V$  是人们习惯使用的参量, 为了得到等效模场半宽度  $\omega_{\text{eq}}$  与  $V$  和  $a$  的函数关系式, 我们通过分析介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度  $\omega_{\text{eq}}$  与  $V$  和  $a$  的关系, 建立指数函数形式的数学模型拟合图 1 中的实线。由基本参量  $V$  和  $a$  表达的指数函数形式的数学模型为

$$\omega'_{\text{eq}} = a[b \exp(cV^d) + e], \quad (12)$$

式中  $b \sim e$  为待定系数。若由指数函数形式的数学模型所得的曲线在光波导归一化频率  $V$  分别为 1, 1.5, 5 和  $\infty$  处与图 1 中的实线重合, 即上述四个位置的等效模场半宽度  $\omega'_{\text{eq}}$  分别为  $2.2310a$ ,  $1.5073a$ ,  $0.8608a$  和  $0.6784a$ , 则(12)式中的系数  $b \sim e$  可通过求解方程组确定。由(12)式知, 方程组为

$$b + e = 0.6784, \quad (13)$$

$$b \exp(c) + e = 2.2310, \quad (14)$$

$$b \exp(1.5^d c) + e = 1.5073, \quad (15)$$

$$b \exp(5^d c) + e = 0.8608, \quad (16)$$

由(13)~(16)式知,  $b = 0.8296$ ,  $c = 1.0548$ ,  $d = -1.0371$  和  $e = -0.1512$ , 则用于表达介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度  $\omega'_{\text{eq}}$  的拟合函数为

$$\omega'_{\text{eq}} = a[0.8296 \exp(1.0548V^{-1.0371}) - 0.1512]. \quad (17)$$

若将由光波导参量  $U, W$  和  $a$  表达的等效模场半宽度  $\omega_{\text{eq}}$  采用由光波导参量  $V$  和  $a$  表达的等效模场半

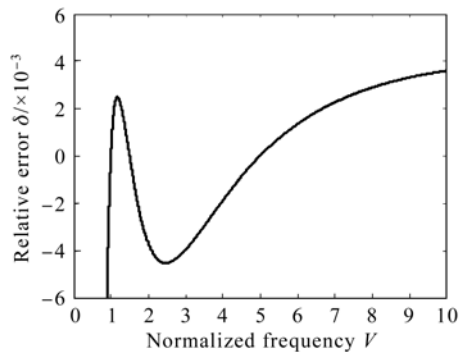


图 3 拟合引起的相对误差与归一化频率的关系曲线

Fig. 3 Relative error caused by fitting versus normalized frequency

宽度  $\omega'_{\text{eq}}$  拟合近似表达引起的相对误差  $\delta$  定义为

$$\delta = \frac{\omega'_{\text{eq}} - \omega_{\text{eq}}}{\omega_{\text{eq}}}, \quad (18)$$

由(18)式知, 拟合引起的相对误差  $\delta$  与归一化频率  $V$  的关系曲线如图 3 所示。在  $V > 0.91$  范围内, 拟合引起的相对误差  $|\delta| < 0.5\%$ 。由(17)式知, 拟合得到的介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度与光波导的  $V$  和  $a$  的关系曲线如图 1 虚线所示, 在  $V > 0.91$  范围内几乎与基于(11)式计算的曲线重合。

### 4 结 论

在弱导条件下, 可以采用  $TE_0$  模的模场特性替代  $TM_0$  模的模场特性表达介质平面光波导基模模场特性, 当光波导归一化频率  $V$  大于 1 时, 介质平面光波导基模模场分布采用高斯函数近似表达有一定的合理性。用于高斯近似表达的介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度采用等效匹配效率方法计算。基于等效匹配效率方法计算的等效模场半宽度与光波导由光波导芯层半宽度  $a$  和归一化芯层驻波参量  $U$  和归一化包层倏逝波参量  $W$  表达。当光波导归一化频率  $V$  大于 0.651 时, 基于等效匹配效率方法确定的介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度表达的高斯分布与光波导本征模场分布的匹配效率大于 0.98。

采用指数函数拟合介质平面光波导  $TE_0$  模等效模场半宽度与光波导芯层半宽度  $a$  和归一化频率  $V$  的关系曲线, 通过求解方程组的方法, 给出拟合函数表达式。当归一化频率  $V$  大于 0.91 时, 拟合引起的相对误差小于 0.5%。

### 参 考 文 献

- 1 K. A. McGreer. Diffraction from concave gratings in planar waveguides [J]. *IEEE Photon. Technol. Lett.*, 1995, **7**(3): 324~326
- 2 Guo Fuyuan, Wang Minghua. Coupling characteristics of star waveguide coupler [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(12):1797~1802  
郭福源, 王明华. 星形光波导耦合器的耦合特性分析[J]. *光学学报*, 2006, **26**(12):1797~1802
- 3 Fuyuan Guo, Minghua Wang. Spectral response characteristics of concave grating demultiplexer [C]. *SPIE*, 2006, **6351**: 63511R-1~63511R-11
- 4 D. Marcuse. Loss analysis of single-mode fiber splices [J]. *Bell System Technical Journal*, 1977, **56**(5):703~718
- 5 Jun-Idii Sakai, Tatsuya Kimura. Design of a miniature lens for semiconductor laser to single-mode fiber coupling [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1980, **QE-16**(10):1059~1067
- 6 Wei Wensheng, Zhou Kezu, Zhang Chunxi *et al.*. Coupling technology of SLD to PMF with quasi-spherical lens [J]. *Laser & Infrared*, 2005, **35**(4):272~274

- 韦文生,周克足,张春熹 等. 超辐射 LD 与带类球透镜保偏光纤的耦合技术[J]. 激光与红外, 2005, **35**(4):272~274
- 7 Guo Fuyuan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al.*. Beam parameters in the diffracted field of dielectric planar waveguide  $TE_0$  mode [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(6):702~706  
郭福源,林 斌,陈钰清 等. 介质平面波导  $TE_0$  模衍射场的光束参量[J]. 光学学报, 2003, **23**(6):702~706
- 8 Guo Fuyuan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al.*. Characteristic beam parameters in diffracted field of fiber end face [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2004, **38**(3):281~285  
郭福源,林 斌,陈钰清 等. 光纤端面衍射场光束的特征参数[J]. 浙江大学学报(工学版), 2004, **38**(3):281~285
- 9 Wu Chongqing. *Optical Waveguide Theory* [M]. 2nd Edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2005  
吴重庆. 光波导理论[M]. 第 2 版. 北京:清华大学出版社, 2005
- 10 Guo Fuyuan, Lin Bin, Chen Yuqing *et al.*. Characteristic analysis of diffraction from planar waveguide [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(12):1513~1517  
郭福源,林 斌,陈钰清 等. 平面波导衍射特性分析[J]. 光学学报, 2002, **22**(12):1513~1517
- 11 K. Hayata, M. Koshihara, M. Suzuki. Modal spot size of axially nonsymmetrical fibres [J]. *Electron. Lett.*, 1986, **22**(2):127~129
- 12 An-Hui Liang, Wei-Bin Huang, Chong-Cheng Fan. Relation between three mode field half-width definitions for single-mode planar waveguide and application to splice-loss evaluation [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1989, **7**(12):2046~2051
- 13 Qi Xiaoling, Cai Zhigang, Xu Yuke *et al.*. A theoretical study of optical coupling in optical components [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(4):521~526  
齐晓玲,蔡志岗,徐宇科 等. 光耦合理论及其在通信元器件中的应用[J]. 光学学报, 2004, **24**(4):521~526
- 14 Ye Peida, Wu Yizun. *Foundation Theory for Waveguide Technology* [M]. Beijing: Posts & Telecommunications Press, 1981  
叶培大,吴彝尊. 光波导技术基本理论[M]. 北京:人民邮电出版社, 1981