

文章编号: 0258-7025(2008)10-1463-06

# 基于传输矩阵的激光谐振腔模式计算

秦应雄 唐霞辉 钟如涛 李正佳

(华中科技大学光电子科学与工程学院, 湖北 武汉 430074)

**摘要** 建立了激光谐振腔往返传输矩阵,通过求解往返传输矩阵的特征值与特征向量,获得了激光谐振腔模式特征。该方法可以用于快速计算同阶贝塞尔函数的所有谐振腔模式和衍射损耗,其结果与 Fox-Li 数值迭代方式计算结果完全一致。分别就对称谐振腔往返传输矩阵的  $A^2$  与单程传输矩阵  $A$  的特征值及特征向量之间的关系和物理意义,以及非对称谐振腔往返传输矩阵  $AB$  与  $BA$  的特征值及特征向量之间关系和物理意义进行了分析和讨论,建立了数学表达式,并可以通过改变传输矩阵来提高计算效率。分析了对称共焦腔离散单元数量对光腔模式计算结果的影响,建立了最佳离散单元数量与谐振腔镜片半径的关系表达式,并实现了大菲涅耳系数共焦腔模式的计算。

**关键词** 激光技术;激光谐振腔;传输矩阵;特征值;特征向量;离散单元数量

中图分类号 TN 248.1 文献标识码 A doi: 10.3788/CJL20083510.1463

## Study on Mode Calculation of Transmission Matrix for Laser Resonator

Qin Yingxiong Tang Xiahui Zhong Rutao Li Zhengjia

(College of Optoelectronics Science and Engineering,

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

**Abstract** Round-way transmission matrix of laser resonator was founded, whose eigenvalue and eigenvector are used for calculating diffraction loss and corresponding mode distribution. The calculated results fit well with the Fox-Li method. The relation of eigenvalue and eigenvector of round-way transmission matrix  $A^2$  and one-way transmission matrix  $A$  of symmetrical laser resonator, and that of round-way transmission matrix  $AB$  and  $BA$  of asymmetrical laser resonator, were analyzed. The mathematics expression of transmission matrix relation was founded, which is used for improving calculation efficiency. The calculation discussed the effect of confocal cavity discrete unit amount on the resonator mode. And mathematics expression between optimizing discrete unit amount and radius of resonator mirror was built, and confocal cavity mode with big Fresnel coefficient was calculated.

**Key words** laser technique; laser resonator; transmission matrix; eigenvalue; eigenvector; discrete unit amount

## 1 引言

激光谐振腔的结构和尺寸对光腔的输出光束模式具有决定性的作用,光腔模式的计算在激光谐振腔的设计、光束质量控制、光束整形传输聚焦、激光应用等方面具有非常重要的意义<sup>[1~4]</sup>。谐振腔模式的计算方法主要有解析法和数值计算方法。解析法是假定腔的菲涅耳数  $F$  足够大的条件下推导出来的<sup>[5,6]</sup>。经典的数值计算方法 Fox-Li 法原则上可以

计算任意光腔的模式,缺点是在菲涅耳数  $F$  很大时,计算工作量很大,结果不理想,而且这种方法总是收敛于较低次模,计算高次模误差较大<sup>[7]</sup>。光腔模式传输矩阵的特征向量法是对腔镜进行有限元单元划分的,构造光束传输矩阵,通过求解传输矩阵的特征向量,即可获得腔镜光场的振幅及相位分布<sup>[8,9]</sup>。矩阵运算时间与矩阵维数有着近似平方的关系,二维衍射积分方程的传输矩阵的维数高,计算

收稿日期:2008-02-01;收到修改稿日期:2008-03-07

基金项目:国家科技支撑计划(2007BAF11B01),国家自然科学基金(60808005)和武汉市科技计划(200870834409)资助项目。

作者简介:秦应雄(1978—),男,湖南人,讲师,博士研究生,主要从事高功率激光器、激光加工技术的研究。

E-mail: qyx@hust.edu.cn

导师简介:唐霞辉(1963—),男,湖南人,教授,博士生导师,主要从事高功率激光器、激光加工技术的研究。

E-mail: txh1116@hust.edu.cn (通信作者)

需要数小时甚至数天的时间,对于大菲涅耳系数谐振腔模式的计算难度更大。

为了提高计算效率,本文利用贝赛耳函数将二维的衍射积分方程化简为一维积分方程,建立一维光束传输矩阵,进行光场模式计算,探讨对称谐振腔往返传输矩阵  $\mathbf{A}^2$  与单程传输矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值及特征向量之间的关系和物理意义,以及非对称谐振腔往返传输矩阵  $\mathbf{AB}$  与  $\mathbf{BA}$  的特征值及特征向量之间的关系和物理意义,再通过优化传输矩阵来提高计算效率。计算讨论了离散单元数量对光腔模式计算的影响,获得了离散单元数量与共焦腔反射镜半径之间的关系表达式,并实现了大菲涅耳系数共焦腔模式的快速计算。

## 2 谐振腔的传输矩阵计算模型

图 1 为圆形镜激光谐振的结构,反射镜  $M_1$  的曲率半径为  $R_1$ ,镜面半径为  $a_1$ ,反射镜  $M_2$  的曲率半径为  $R_2$ ,镜面半径为  $a_2$ ,腔长为  $L$ ,激光波长为腔长为  $\lambda$ 。

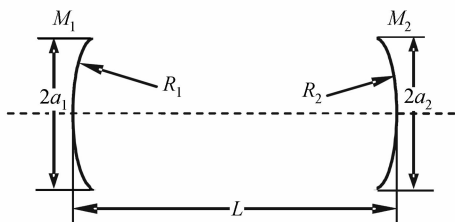


图 1 圆形镜激光谐振的结构

Fig. 1 Structure of laser resonator of circle mirror

衍射积分方程的推导过程为<sup>[7,8,10]</sup>

$$v_2(r_2, \varphi_2) = \frac{j}{2\lambda} \times \int_0^{a_1} \int_0^{2\pi} v_1(r_1, \varphi_1) \frac{e^{-jkR}}{R} \left(1 + \frac{L}{R}\right) r_1 d\varphi_1 dr_1, \quad (1)$$

式中  $R$  为光程,对于对称共焦腔  $L = R_1 = R_2$ ,有

$$R \approx L - \frac{r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{L}. \quad (2)$$

对于极坐标系的积分可以采用特殊贝赛耳函数进行分离变量,将与角度有关的积分变量用贝赛耳函数进行处理,将二维积分方程化简为只与半径有关的一维积分方程。贝赛耳函数的积分表达式为<sup>[7]</sup>

$$e^{jn[(\pi/2) - \varphi_2]} J_n \left(k \frac{r_1 r_2}{L}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jk(r_1 r_2 / L) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - jn\varphi_1} d\varphi_1. \quad (3)$$

令

$$v(r, \varphi) = u_n(r) e^{-jn\varphi}, \quad (4)$$

所以

$$u_n(r_2) = e^{-jkL} \frac{j^{n+1} k}{L} \int_0^{a_1} J_n \left(k \frac{r_1 r_2}{L}\right) u_n(r_1) r_1 dr_1. \quad (5)$$

将反射镜  $M_1$  划分为  $M$  个环,这样将连续  $u_n(r_1)$  离散成  $u_1[1], u_1[2], \dots, u_1[M]$ ,整个  $u_n(r_1)$  可用列向量  $\mathbf{U}_1$  表示

$$\mathbf{U}_1 = [u_1[1], u_1[2], \dots, u_1[M]]^T. \quad (6)$$

将反射镜  $M_2$  划分为  $N$  个环,这样将连续  $u_n(r_2)$  离散成  $u_2[1], u_2[2], \dots, u_2[N]$ ,整个  $u_n(r_2)$  可用列向量  $\mathbf{U}_2$  表示

$$\mathbf{U}_2 = [u_2[1], u_2[2], \dots, u_2[N]]^T. \quad (7)$$

当  $M, N$  足够大时,可将  $u_1[m], u_2[n]$  视为常数,这样可以将  $u_1[m]$  从积分里面提出

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^M u_1[m] e^{-jkL} \frac{j^{n+1} k}{L} \int_{r_m} J_n \left(k \frac{r_1 r_2}{L}\right) r_1 dr_1, \quad (8)$$

(8)式可以写成

$$u_2[n] = \sum_{m=1}^M A[n, m] u_1[m], \quad (9)$$

其中

$$A[n, m] = e^{-jkL} \frac{j^{n+1} k}{L} \int_{r_m} J_n \left(k \frac{r_1 r_2}{L}\right) r_1 dr_1, \quad (10)$$

将(6),(7)式代入(9)式,可得

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{A} \mathbf{U}_1, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A[1,1] & A[1,2] & \dots & A[1,M] \\ A[2,1] & A[2,2] & \dots & A[2,M] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A[N,1] & A[N,2] & \dots & A[N,M] \end{bmatrix}, \quad (12)$$

同理

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{B} \mathbf{U}_2, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B[1,1] & B[1,2] & \dots & B[1,N] \\ B[2,1] & B[2,2] & \dots & B[2,N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B[M,1] & B[M,2] & \dots & B[M,N] \end{bmatrix}. \quad (14)$$

假定反射镜  $M_1$  上的初始光场为  $\mathbf{U}_1$ ,在光腔中往返一周后的光场为  $\mathbf{U}'_1$ ,有

$$\mathbf{U}'_1 = \mathbf{BA} \mathbf{U}_1. \quad (15)$$

对于稳定的模式分布,光场在谐振腔中经过一次往返后实现自再现。对于光腔的往返传输矩阵  $\mathbf{BA}$ ,其特征向量满足自再现条件,即

$$\mathbf{BA} \mathbf{U}_1 = \gamma \mathbf{U}_1, \quad (16)$$

式中  $\mathbf{U}_1$  为特征向量,  $\gamma$  为对应的特征值,  $\mathbf{U}_1$  表示反射镜  $M_1$  某一种模式光场分布,  $\mathbf{A}\mathbf{U}_1$  为反射镜为  $M_2$  上同一种模式的光场分布, 光腔的往返衍射损耗  $\delta = 1 - |\gamma|^2$ 。

激光谐振腔的非涅耳系数为

$$F = \frac{a_1 a_2}{L\lambda}. \quad (17)$$

为了方便计算, 定义一个标准非涅耳光斑半径

$$a_s = \sqrt{L\lambda}. \quad (18)$$

为了验证特征向量求解光场模式的准确性, 计算非涅耳系数分别为 0.5, 0.75, 1 (对应的两个反射镜半径分别为  $\sqrt{0.5}a_s, \sqrt{0.75}a_s, a_s$ ) 的对称共焦腔的  $\text{TEM}_{00}$  和  $\text{TEM}_{01}$ , 计算结果与 Fox-Li 法的计算结果完全一致。该方法一次性可以获得同阶贝塞耳函数的所有谐振腔模式和衍射损耗, 多次运算, 可以获得不同阶次贝塞耳函数的谐振腔模式和衍射损耗。

### 3 对称谐振腔传输矩阵分析

对于对称激光谐振腔, 即有  $R_1 = R_2$  和  $a_1 = a_2$ , 当反射镜  $M_1$  和反射镜  $M_2$  的离散单元数量一样,  $M = N$  时, 传输矩阵为方阵, 且  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

在矩阵理论中<sup>[11]</sup>, 存在这样的定理: 设  $\gamma$  为方阵  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\mathbf{P}$  为  $\mathbf{A}$  的特征值  $\gamma$  对应的特征向量, 则有  $\gamma^2$  是  $\mathbf{A}^2$  的特征值,  $\mathbf{P}$  也是  $\mathbf{A}^2$  的特征值  $\gamma^2$  对应的特征向量。

对非涅耳系数为 0.5 (对应的两个反射镜半径为  $\sqrt{0.5}a_s$ ) 的对称共焦腔, 往返传输矩阵的最大特征值绝对值  $|\gamma_1|$  为 0.9074, 单程传输矩阵的最大特征值绝对值  $|\gamma_2|$  为 0.9526, 满足  $|\gamma_1| = |\gamma_2|^2$ 。单程传输矩阵  $\mathbf{A}$  的最大特征值对应的特征向量  $\mathbf{P}$ , 与往返传输矩阵  $\mathbf{A}^2$  的最大特征值对应的特征向量  $\mathbf{P}'$ , 以及  $\mathbf{A}\mathbf{P}$  三个向量对应的归一化的光场振幅分布完全

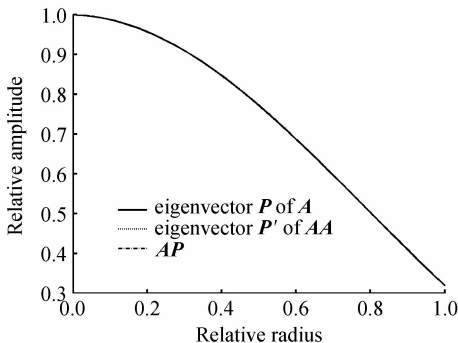


图 2 三个向量对应的光场分布

Fig. 2 Amplitude distribution of three eigenvectors

一致, 如图 2 所示。通过单程传输矩阵来求解对称腔的模式, 光腔的往返衍射损耗  $\delta = 1 - |\gamma_2|^4$ , 这样可以减少传输矩阵的建立和重复运算过程。

### 4 非对称谐振腔传输矩阵分析

对于非对称激光谐振腔,  $a_1 \neq a_2$ , 反射镜  $M_1$  和反射镜  $M_2$  的离散单元数量  $M \neq N$ , 即  $\mathbf{A}$  是  $N \times M$  矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $M \times N$  矩阵, 矩阵理论中,  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  有相同的特征值, 且阶数较高的那个乘积还有  $|M - N|$  个零特征值。即反射镜  $M_1$  与反射镜  $M_2$  互换位置, 但谐振腔的衍射损耗不变, 这与谐振腔的互易定理是一样的<sup>[1]</sup>。

根据谐振腔的互易定理, 认为  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  的对应同一特征值的两个特征向量分别代表同一模式在两个反射镜上的光场分布, 从而有: 设  $\gamma$  为  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  的特征值, 如果  $\mathbf{P}$  为  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  特征值  $\gamma$  对应的特征向量, 则  $\mathbf{B}\mathbf{P}$  为  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  特征值  $\gamma$  对应的特征向量, 同理, 如果  $\mathbf{Q}$  为  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  特征值  $\gamma$  对应的特征向量, 则  $\mathbf{A}\mathbf{Q}$  为  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  特征值  $\gamma$  对应的特征向量。证明过程为

$$\mathbf{B}\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{P}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{P} = \mathbf{B}\gamma\mathbf{P} = \gamma\mathbf{B}\mathbf{P}, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{Q}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{Q} = \mathbf{A}\gamma\mathbf{Q} = \gamma\mathbf{A}\mathbf{Q}. \quad (20)$$

对一个非对称的共焦谐振腔, 反射镜  $M_1$  的半径为  $a_1 = a_s$ , 反射镜  $M_2$  的半径为  $a_2 = 2a_s$ , 假定  $M_1$  的离散单元数量为 50,  $M_2$  的离散单元数量为 100, 则从  $M_1$  到  $M_2$  的传输矩阵  $\mathbf{A}$  为  $100 \times 50$  矩阵, 从  $M_2$  到  $M_1$  的传输矩阵  $\mathbf{B}$  为  $50 \times 100$  矩阵,  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  矩阵为  $100 \times 100$  矩阵,  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  矩阵为  $50 \times 50$  矩阵。表 1 为  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  矩阵的前几个非零特征值的绝对值, 图 3 为求解  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  特征向量获得反射镜  $M_1$  的归一化光场振幅分布。

表 1  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  矩阵的前几个非零特征值的绝对值

Table 1 Absolute value of eigenvalue of matrix  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  and  $\mathbf{B}\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\mathbf{B}$ matrix	$\mathbf{B}\mathbf{A}$ matrix
0.8470	0.8470
0.9966	0.1481
1.0000	0.9966
0.9995	1.0000
0.1481	0.9995
0.0025	0.0025

实际模拟计算得知, 分别计算  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  的特征值与特征向量来计算激光谐振腔的损耗和光场分布, 其结果是一样的。根据  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  与  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  特征向量的关系, 在计算谐振腔模式时, 可以先计算利用  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  和  $\mathbf{B}\mathbf{A}$  中阶数少的矩阵来计算特征值和特征向量, 特

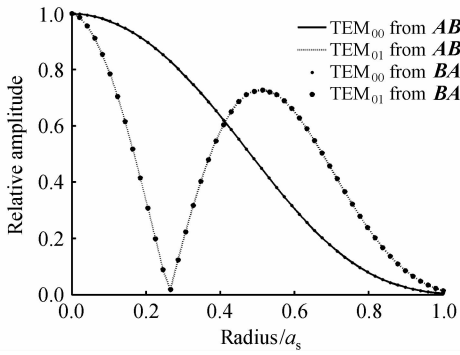


图 3 半径为  $a_s$  的镜片对应的低阶模光场分布  
Fig. 3 Amplitude distribution of low-order mode of mirror with radius  $a_s$

征向量表示一个反射镜上的光场分布,另外一个反射镜上的光场分布可以用一个单程传输矩阵与特征向量的乘积来获得。

### 5 离散单元数量的分析

在激光谐振腔模式的计算过程中,离散单元的数量越大,计算量增加,离散单元的数量太小,可能导致模式的剧烈振动,表现在传输矩阵的特征值绝对值大于 1,对应的损耗小于 0,没有物理意义。在模拟过程中,分别采用离散单元数量  $N$  为 20,40,80,160,320 对半径为  $4a_s$  对称共焦腔进行计算,在计算机上对应的计算时间为 0.3 s,1 s,4 s,16 s,65 s,图 4 为最大特征值绝对值对应的归一化光场振幅分布。当离散单元数量  $N$  为 20 时,其特征值绝对值的最大值均为 1.1153,其衍射损耗小于 0,对应的光场分布为不规则的锯齿状。另外四种离散单元数量其特征值绝对值的最大值均为 1,其对应的归一化光场振幅分布为一致的基模。随着离散单元数量的增加,模式计算时间与离散单元数量呈平方关系增加,合适的离散单元数量,既能保证谐振腔模

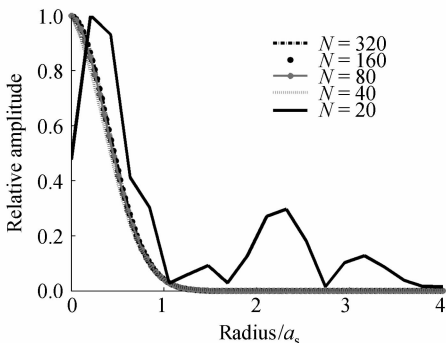


图 4 不同离散单元数量最大特征值的对应模式  
Fig. 4 Mode of most eigenvalue for different discrete units

式的计算精度,也能减少计算机的运算量,节约运算时间。

为了分析离散单元数量  $N$  对计算不同半径镜片的模式的影响,先进行如下的模拟计算,设定离散单元数量  $N$  分别为 20,40,60,80,分别对镜片半径为  $0.1a_s, 0.2a_s, 0.3a_s, \dots, 9.9a_s, 10.0a_s$  等 100 个不同对称共焦腔进行计算,求出每个谐振腔最大的特征值绝对值如图 5 所示。可以看出,不同的离散单元数量  $N$ ,对于小的镜片半径,其最大的特征值绝对值是一样的,随着离散单元数量  $N$  的增大,其最大的特征值绝对值开始起伏的镜片半径也增大。

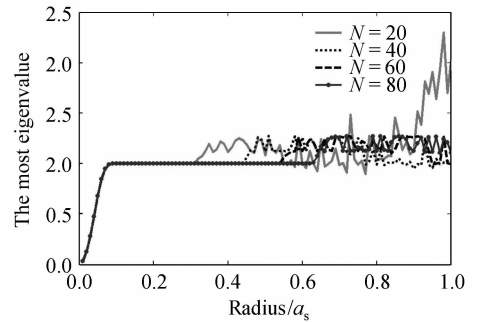


图 5 不同离散单元数量的最大特征值绝对值分布  
Fig. 5 Absolute value distribution of the most eigenvalue for different discrete units

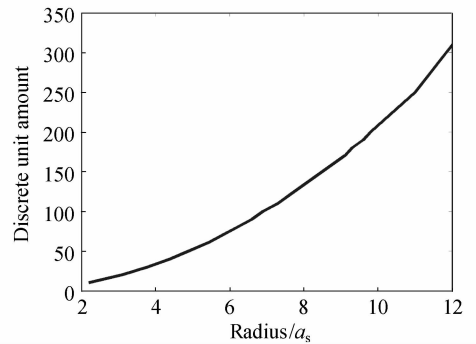


图 6 最佳离散单元数量  $N$  与反射镜半径  $a$  的关系  
Fig. 6 Relation of optimal discrete unit amount  $N$  with mirror radius  $a$

对于一定的镜片半径,有一最佳的离散单元数量,即实际离散单元数量大于最佳离散单元数量时,计算的损耗和模式分布不再发生明显变化。图 6 为最佳离散单元数量  $N$  与对称共焦腔反射镜半径  $a$  之间的关系,曲线拟合发现

$$N = 2(a/a_s)^2. \tag{21}$$

为保证计算的有效性,最佳离散单元数量  $N$  可表示为

$$N = \begin{cases} [2.2(a/a_s)^2], & a \geq 3a_s \\ 30 & a < 3a_s \end{cases}. \tag{22}$$

## 6 大菲涅耳系数共焦腔的模式计算

对反射镜半径为  $4a_s, 6a_s, 8a_s, 10a_s$  的对称共焦腔(对应的菲涅耳系数  $F$  分别为 16, 36, 64, 100) 进行模式计算, 离散单元数量  $N$  分别为 40, 80, 150, 220。图 7 为不同镜片半径共焦腔的前面几个低级

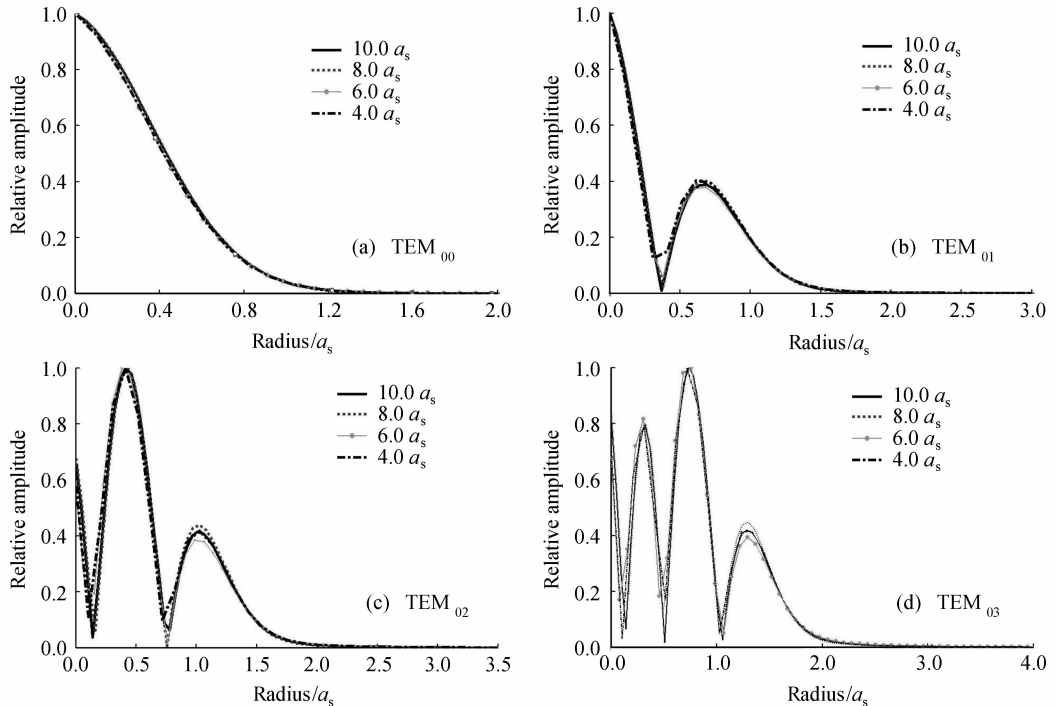


图 7 不同镜片半径共焦腔的前面几个低级模式

Fig. 7 Amplitude distribution of low-order modes of mirrors with different radii  $a_s$ .

## 7 结 论

建立了激光谐振腔一维衍射积分方程的光束往返传输矩阵, 通过求解传输矩阵特征值与特征向量, 获得激光谐振腔模式特征。该方法可以在数秒内一次性快速计算同阶贝塞耳函数的所有谐振腔模式和衍射损耗, 其结果与 Fox-Li 数值迭代方式计算结果完全一致。分别对对称谐振腔往返传输矩阵的  $A^2$  与单个传输  $A$  的特征值及特征向量之间关系和物理意义, 以及非对称谐振腔往返传输矩阵  $AB$  与  $BA$  的特征值及特征向量之间关系和物理意义进行了分析和讨论, 建立了数学表达式, 并可通过改变传输矩阵来提高计算效率。分析了对称共焦离散单元数量对光腔模式计算结果的影响, 建立了最佳离散单元数量与对称共焦腔菲涅耳数的关系表达式。计算了大菲涅耳系数共焦腔的模式, 结果表明, 低阶模的光场分布不随反射镜半径的增大而变化。

模式。计算结果表明, 合适的离散单元数量, 传输矩阵模式计算方法可以实现大菲涅耳系数共焦腔的模式计算, 而且低阶模的光场分布不随反射镜半径的增大而变化。

## 参 考 文 献

- Lü Baida. Laser Optics [M]. Chengdou: Sichuan University Press, 1992. 191~231  
吕百达. 激光光学[M]. 成都: 四川大学出版社, 1992. 191~231
- Zhou Bingkun, Gao Yizhi, Chen Tirong *et al.*. Theory of Lasers [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000. 24~64  
周炳琨, 高以智, 陈侗嵘 等. 激光原理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002. 24~64
- Wu Jianqiang, Tang Xiahui, Qin Yingxiong *et al.*. 90° conical reflector resonator for high power transverse flow CO<sub>2</sub> laser [J]. *Chinese J. Lasers*, 2007, **34**(5): 628~632  
武建强, 唐霞辉, 秦应雄 等. 高功率横流 CO<sub>2</sub> 激光器的锥面反射镜谐振腔[J]. *中国激光*, 2007, **34**(5): 628~632
- Xu Zhiguang, Zhang Shulian, Liang Dong *et al.*. Research of the laser transverse mode modulated by the cat's eye resonator [J]. *Acta Optica Sinica*, 2006, **26**(1): 86~90  
许志广, 张书练, 梁 栋 等. 猫眼激光谐振腔横模选择特性研究[J]. *光学学报*, 2006, **26**(1): 86~90
- G. D. Boyd, J. P. Gordon. Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers [J]. *Bell System Technical Journal*, 1961, **40**: 489~508
- G. D. Boyd, H. Kogelnik. Generalized confocal resonator theory [J]. *Bell System Technical Journal*, 1962, **41**: 1347~1369

- 7 A. G. Fox, T. Li. Resonant modes in maser interferometer [J]. *Bell System Technical Journal*, 1961, **40**:453~488
- 8 Cheng Yuanying, Wang Youqing, Hu Jin *et al.*. An eigenvector method for optical field simulation [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **234**:1~6
- 9 Jiang Chao, Bo Li, Yuanying Cheng *et al.*. Simulation of optical field in laser resonators cavity by eigenvector method [J]. *Optics & Laser Technology*, 2007, **39**(3):490~499
- 10 Ling Dongxiong. Numerical caculation of field distribution of confocal spherical resonator by the finete element method [J]. *Applied Laser*, 1999, **19**(2):69~72  
凌东雄. 圆形镜共焦腔模式分布的有限元数值计算[J]. *应用激光*, 1999, **19**(2):69~72
- 11 Wang Lianhua. The application on characteristic value of matrix  $\mathbf{AB}$  and  $\mathbf{BA}$  [J]. *College Mathematics*, 2007, **23**(3):135~139  
王莲花. 矩阵  $\mathbf{AB}$  与  $\mathbf{BA}$  的特征值问题及其应用[J]. *大学数学*, 2007, **23**(3):135~139