

文章编号: 0258-7025(2007)04-0491-05

气动光学畸变波前的本征正交分解 和低阶近似

谢文科, 姜宗福

(国防科学技术大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要 应用哈特曼波前传感器测量了准直平行光通过低速热射流流场后的畸变波前时间序列, 对该波前时间序列进行了本征正交分解(POD)和低阶近似研究, 对比研究了 16[#], 1008[#] 数据点处的低阶近似波前时间序列和测量波前时间序列。结果表明, 畸变波前可用本征正交分解基来展开, 应用少量的低阶本征正交分解基即可捕捉到波前的主要信息, 并且随着重构模式数的增加, 低阶近似波前更加逼近测量波前。由于波面上不同位置处相位脉动量的空间相关性各异, 因此选用相同的重构模式数时不同数据点处的重构精度也不一样。

关键词 激光物理; 气动光学; 波前重构; 本征正交分解; 低阶近似; 自适应校正

中图分类号 O 354 文献标识码 A

Proper Orthogonal Decomposition and Low Dimensional Approximation of Aero-Optical Aberrated Wavefronts

XIE Wen-ke, JIANG Zong-fu

(College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of
the Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract The aero-optical aberrated wavefronts are measured by applying Hartmann wavefront sensor when the collimated parallel beam passes through a low speed heated turbulent jet. Proper orthogonal decomposition (POD) and the low dimensional approximation are applied to the aberrated wavefront time series, the comparisons between the measured wavefronts and low dimensional approximation reconstruction wavefronts of 16[#] and 1008[#] were conducted. The results indicated that the aberrated wavefronts can be expanded by the POD group and can be described with a few POD modes, with the more the reconstruction modes the more the reconstruction precision. Due to the difference of the spacial correlation of phase pulsating quantity at different wavefront positions, the reconstruction precision different data points is not same for the same reconstruction modes.

Key words laser physics; aero-optics; wavefront reconstruction; proper orthogonal decomposition; low dimensional approximation; adaptive correction

1 引言

气动光学是研究流体与光相互作用的科学。由于湍流的多尺度结构特征, 气动光学畸变可视为众多不同尺度运动叠加的结果, 因此呈现出高频高带宽的特点, 例如机载光学系统光学畸变频率约为 30~100 kHz^[1]。对于传统的反馈控制自适应光学系统, 在波前采样频率一定的情况下, 波前处理机的计

算延迟时间直接影响系统的控制带宽^[2], 现有的反馈控制自适应光学系统带宽大多在 1 kHz 以下。Lumley 首先将本征正交分解(POD)方法引入湍流的研究^[3]。本征正交分解基作为一种“最优”基其意义在于: 对随机量进行相同阶数的基函数展开时, 本征正交分解基相对于任何其他可能存在的正交基的截断误差最小, 因此可用尽可能少的基函数来捕获

收稿日期: 2006-05-16; 收到修改稿日期: 2006-11-20

作者简介: 谢文科(1977—), 男, 湖南人, 博士研究生, 主要研究方向为气动光学。E-mail: wenkexiedan@163.com

导师简介: 姜宗福(1963—), 男, 湖南人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为高能气动和化学激光器技术、气动光学。

E-mail: jiangzongfu28@163.com

尽可能多的随机量特征^[4]；相似地，如果基于本征正交分解基的气动光学畸变波前正交分解和低阶近似同样有效，由于低阶近似波前所含的信息量少并且能捕获畸变波前的主要特征，因此基于该低阶近似波前的波前处理机的计算时间将减少，从而提高自适应光学系统的响应频率。

本文应用哈特曼(Hartmann)波前传感器测量了准直平行光通过低速热射流后的畸变波前时间序列，对该时间序列进行了本征正交分解和低阶近似研究。结果表明，气动光学畸变波前可以采用本征正交分解基来展开表示，应用较少的本征正交分解基对畸变波前进行低阶近似也颇为有效，并且随着模式数的增加重构波前更接近测量波前。

2 本征正交分解基本原理

本征正交分解方法的目的是把多维随机过程进行低维近似描述并提取复杂随机过程的本质特征。其基本思想是将随机量分解为由其自身特征所确定的一组基函数来表示，基函数的确定原则为在每一次分解的过程中使得最低阶的模式上含能最多，应用变分原理上述极值问题转换为求解下列弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程^[4]

$$\int C_\varphi(x, y, x', y') \phi_n(x', y') dx' dy' = \lambda_n \phi_n(x, y), \tag{1}$$

式中 λ_n 和 ϕ_n 分别为 $C_\varphi(x, y, x', y')$ 的本征值和本征模式或经验本征函数(Empirical Eigenfunction)，积分核 $C_\varphi(x, y, x', y')$ 为波面上任意两点 (x, y) 和 (x', y') 相位的空间协方差函数

$$C_\varphi(x, y, x', y') = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x, y, t) \varphi(x', y', t) dt, \tag{2}$$

式中 T 为分析数据的时间长度。其中，本征模式相互正交

$$\int \phi_n(x, y) \phi_m(x, y) dx dy = \delta_{nm}, \tag{3}$$

式中 δ_{nm} 为克罗内克(Kronecker)符号，且

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}, \tag{4}$$

根据本征正交定理，波面上任一点的相位可以展开为级数的形式

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x, y), \tag{5}$$

式中 N 为本征模式(或本征正交分解基)的总数， $a_n(t)$ 为随机函数，称为主坐标，也称正交的振幅系

数，可以证明

$$\overline{a_n(t) a_m(t)} = \lambda_n \delta_{nm}, \tag{6}$$

当 $m = n$ 时， $\overline{a_n^2(t)} = \lambda_n$ ，表明 n 阶主坐标的均方值等于本征函数 λ_n 。

3 实验装置

相对于激光发射和接收系统，气动光学研究发射、接收窗口附近尺寸受限流场对光束传输的影响。实验中应用哈特曼波前传感器测量准直平面波通过低速热射流后的畸变波前时间序列。热射流发生装置如图 1 所示^[5]。气流由轴流风扇产生，消声壁用来消除风扇产生的噪声，加热器工作使得射流与环境气体有一定的温度差，实验中温差 $\Delta T \approx 50^\circ\text{C}$ ，蜂窝器和阻尼网的作用主要是使喷嘴入口处的气流尽量均匀。收缩喷嘴用来产生一定速度的射流，喷嘴型面为五次收缩曲线，它的入口尺寸为 $30.72\text{ cm} \times 20.48\text{ cm}$ ，出口尺寸为 $30.72\text{ cm} \times 1.28\text{ cm}$ ^[6]。实验中应用皮托管测量喷嘴出口处的平均风速约为 7.2 m/s 。

哈特曼波前测量系统如图 2(a) 所示，波长为

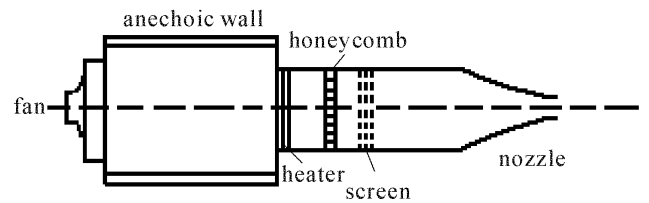
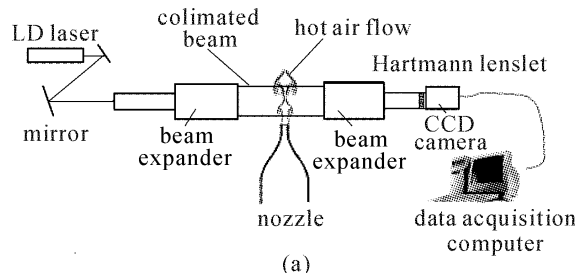
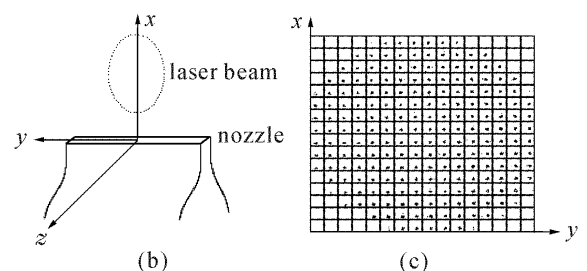


图 1 热射流装置示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the heated jet facility



(a)



(b)

(c)

图 2 (a) 哈特曼波前测量系统示意图；
(b) 光束与射流布局图；(c) 微透镜子孔径光斑阵列
Fig. 2 (a) Hartmann wavefront measuring system;
(b) layout of beam and jet; (c) subapertures distribution

0.65 μm 自准直激光二极管 (LD) 经扩束镜准直后产生约 $\phi 120\text{ mm}$ 的平行光束, 平行光束经流场介质后, 再经缩束系统进入由 16×16 单元子孔径组成的微透镜系统, 经 CCD 进行数据采集和处理, 获得畸变波前的前 65 阶泽尼克 (Zernike) 系数以及各子孔径的倾斜量等。实验中平行光束沿 z 垂直入射流场, 如图 2(b) 所示。哈特曼子孔径水平方向 (x 轴) 与流场流动方向平行, 光束中心处于 $x \approx 75\text{ mm}$ 处。这里对子孔径单元数为 16×16 (如图 2(c)) 的哈特曼波前传感器测量得到的二维光波前时间序列 (通过插值处理后每幅波前相位图包含 128×128 个数据点) 进行本征正交分解分析, 哈特曼传感器的测量帧频为 1200 Hz 。

4 基于本征正交分解的波前低阶近似重构

4.1 畸变波前的本征正交分解

在本征正交分解分析中考虑到协方差矩阵的维数对计算速度的影响, 这里处理的每帧波前图像包含等间距分布的 32×32 个相位数据点, 即: 每个数据点处的相位值为原始相位图像中相邻 4×4 个相位值的平均值, 每帧图像从左到右, 从上到下依次编号为第 1 到第 1024 个数据点, 因此协方差矩阵 $C_\varphi(x, y, x', y')$ 是一个 1024×1024 的实对称矩阵, 每一个本征正交分解基为一个包含 1024 个元素的一维数组, 这里取 550 个时间采样点数据来计算协方差矩阵。计算表明, 随着时间采样点数的增加, 各阶 $\lambda_n / \sum \lambda_n$ 的误差小于 1%。在实际应用中, 对于时间和空间离散的情况, 通常每帧波前图包含的相位数据点远大于数据集合所包含的样本个数 (分析时间序列的长度), 此时如果考虑正交函数的求解速度, 快照本征正交分解方法具有明显的优势^[7]。

图 3(a) 为对畸变波前作 $N = 1024$ 阶展开时前 4 阶本征正交分解模式, 相应各阶的时间系数如图 3(b), 可以看出高阶模式所表征的畸变尺度越小, 相应的时间频率则越高。以前 2 阶基函数为例考察其正交性、归一性, 有

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = 1, j = 1 \\ -5.03 \times 10^{-16} & i = 1, j = 2 \end{cases},$$

而 $\langle a_1, a_1 \rangle = 0.40, \lambda_1 = 0.40$, 可见基函数两两相互正交, 并且 $a_1(t)$ 的均方值等于本征函数 λ_1 。

λ_n 表征被模式 $\phi_n(x)$ 捕获的随机场“动能”的多少^[8] (仅当对速度场的本征正交分解分析时才是严

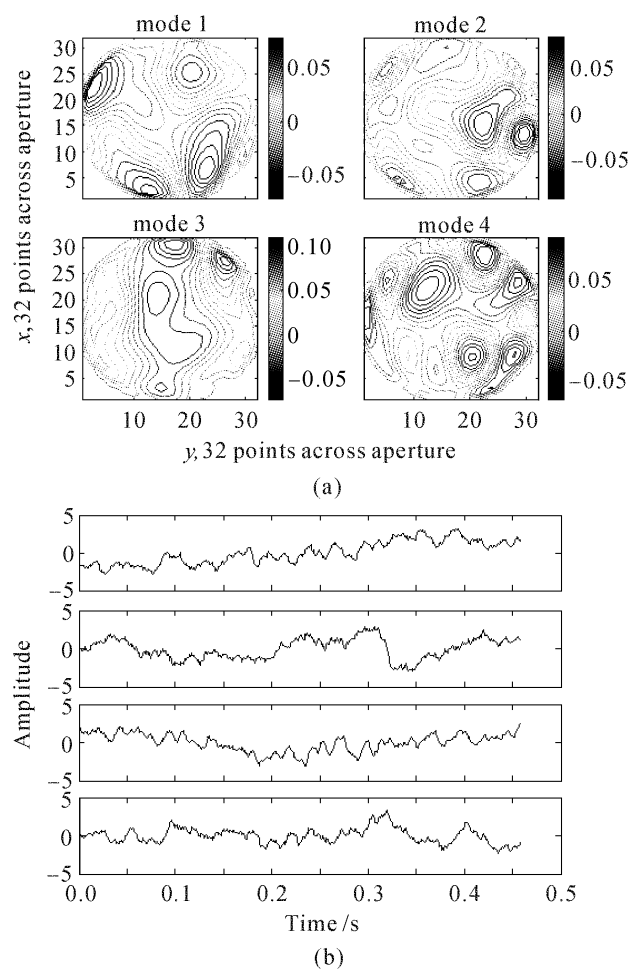


图 3

(a) 前 4 阶本征正交分解模式; (b) 前 4 阶时间系数

Fig. 3

(a) first four POD modes; (b) first four time coefficients

表 1 广义能量随本征正交分解模式的分布, 各模式能量用总能量来归一化

Table 1 Generalized energy distribution among POD modes, normalized energy and cumulated energy

Mode (n)	λ_n	$E_n / \%$	$\sum_n E_n / \%$
1	2.33	16.15	16.15
2	1.80	12.42	28.57
3	1.33	9.19	37.76
4	1.01	6.98	44.74
5	0.89	6.13	50.87
6	0.59	4.06	54.93
7	0.54	3.71	58.64
8	0.47	3.28	61.92
9	0.41	2.85	64.76
10	0.39	2.69	67.45

格的动能概念)。表 1 列出了“动量”最集中的前 10 阶模式对应的特征值、归一化的能量百分比以及累积百分比。可见低阶模式包含的脉动能量多, 高阶模

式包含的脉动能量少,并且具有非常快的收敛速度。前 2 阶本征值所占的比例分别为 16.15% 和 12.42%,前 10 阶本征值则包含了流场 67.45% 的能量,因而只需要少量的本征正交分解基就可较好地描述随机相位场的主要特征。

4.2 畸变波前的低阶近似

所谓相位的低阶近似,指的是选择合适的截断阶数 M (通常 $M \ll N$),使得

$$\varphi(x_i, y_j, t_k) \approx \tilde{\varphi}(x_i, y_j, t_k) = \sum_{k=1}^M a_n(t_k) \Phi_n(x_i, y_j), \quad (7)$$

低阶近似波前与测量波前的误差表示为

$$e(n, t_k) = \sqrt{\frac{1}{32 \times 32} \sum_{i=1}^{32} \sum_{j=1}^{32} [\varphi(x_i, y_j, t_k) - \tilde{\varphi}(x_i, y_j, t_k)]^2}, \quad (8)$$

$k = 10$, 重构阶数为 $M = 10, 20, 30$ 时的波前重构误差分别为 0.0688, 0.0597 和 0.0388 个波长;由图 4 可见,低阶近似重构波前不仅能捕获到随机相位场的轮廓特征,而且随着重构模式阶数的增加更多的小尺度细节特征也被体现出来,因此也更接近测量波前。

重构模式数为 10 时,16# 和 1008# 数据点的测量波前及低阶近似波前时间序列如图 5(a), (b) 所示,重构误差分别为 0.1031, 0.0886 个波长;重构模式数为 30 时,16# 和 1008# 数据点的测量波前及低阶近似波前时间序列如图 5(c), (d) 所示,重构误差

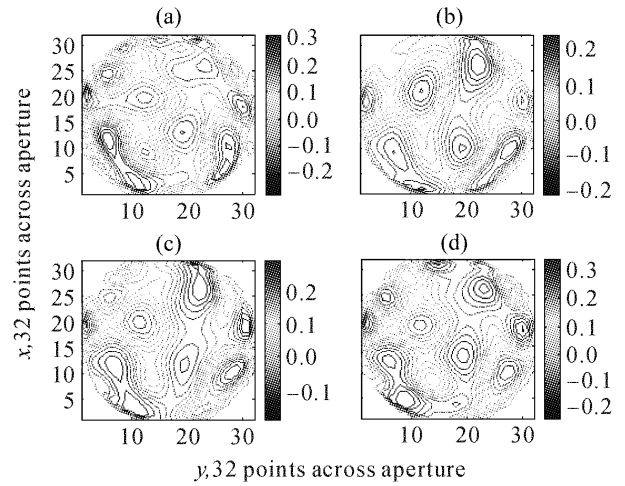


图 4 测量波前和重构波前

(a) 测量波前;(b) 10 阶模式重构波前;
(c) 20 阶模式重构波前;(d) 30 阶模式重构波前

Fig. 4 Measured wavefront and reconstruction wavefronts

(a) measured wavefront; (b) reconstruction wavefront with 10 modes; (c) reconstruction wavefront with 20 modes; (d) reconstruction wavefront with 30 modes

分别为 0.0533, 0.0455 个波长。可见,重构阶数相同时,上游区域重构效果很好,而下游区域的重构效果则相对较差。产生该现象的主要原因是上游区域流动相关性较强,重构的效果好;而下游区域流动相关性较弱,导致重构效果次之。因此在一定的重构精度要求时,下游区域的重构则需要较多的模式。

结合表 1,由于在每一次分解过程中低阶模式

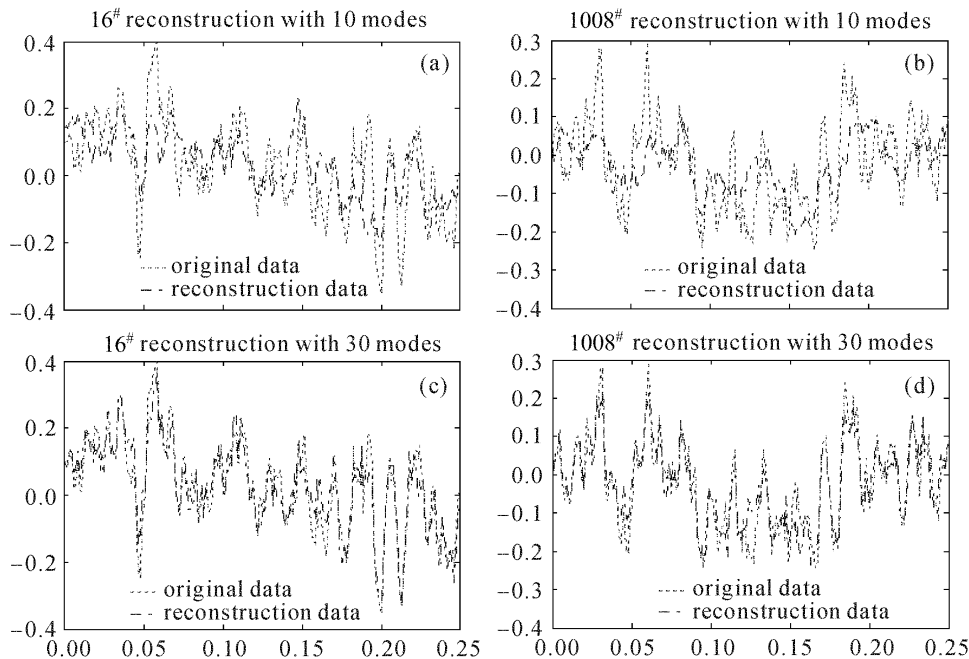


图 5 16# 和 1008# 数据点的测量波前序列和重构波前序列

Fig. 5 Measured wavefront time series and reconstruction wavefront time series of 16# and 1008#

含能最多,因此低阶模式表征畸变波前中含能较多的大尺度结构,而这部分大尺度畸变信息也正是气动光学自适应校正所感兴趣的部分;另外从低阶近似的结果来看,仅用 1024 阶模式中的前 10 阶模式时的波前重构误差即为 0.0688 个波长,可见用少量的低阶模式即能捕获波前的主要特征,因此可以大大减少描述畸变波前所需的数据量,这对于节约自适应系统的波前处理时间,提高系统的响应频率有着重要的意义。

5 结 论

对准直平行光通过低速热射流后的畸变波前时间序列进行了本征正交分解和低阶近似研究,结果表明本征正交分解方法能高效压缩存储信息并提取畸变波前的本质特征,从而提出了一种基于本征正交分解的波前低阶近似表示方法。由于本征正交分解基的“最优”特性,往往应用少量基函数即可捕获到畸变波前的大尺度特征,而这种大尺度畸变信息正是气动光学自适应校正所感兴趣的部分;由于这种基于本征正交分解基的波前低阶近似表示方法所包含的信息量少并且能捕捉到畸变波前的主要信息,因此该波前表示方法对于节约波前处理机的计算延迟时间,提高自适应光学系统的响应频率也有着重要意义。在一定的重构精度条件下如何减少重构所需的模式数并实时地获取时间系数将是下一步研究

工作的重点。

参 考 文 献

- 1 Eric J. Jumper, Edward J. Fitzgerald. Recent advances in aero-optics [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2001, **37**:299~339
- 2 Wang Chunhong, Li Mei, Li Anna. 2900 Hz high speed real time wavefront processor [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1998, **25**(Suppl.):25~28
王春红,李梅,李安娜. 2900 Hz 的高速实时波前处理机 [J]. *光电工程*, 1998, **25**(增刊):25~28
- 3 Wu Chuijie, Shi Hansheng. Advance in flow database analysis and construction of low-dimensional dynamical systems [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 1994, **9**(6):716~719
吴锤结,史汉生. 湍流数据库分析及低维动力系统建模理论研究进展 [J]. *水动力学研究与进展*, 1994, **9**(6):716~719
- 4 James M. Cicchiello, Eric J. Jumper. Addressing the oblique-viewing aero-optic problem with reduced order methods [C]. *AIAA*, 2001, **2799**:1~9
- 5 Jiang Zongfu, Xi Fengjie, Hou Jing *et al.*. Aero-optical effects measurements in a low velocity turbulent jet [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(8):943~946
姜宗福,习锋杰,侯静等. 低速湍流中的气动光学效应实验研究 [J]. *中国激光*, 2004, **31**(8):943~946
- 6 Xie Wenke, Jiang Zongfu, Xu Xiaojun *et al.*. Numerical study on the optical inhomogeneity of free heated jet flowfield [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2004, **16**(8):989~992
谢文科,姜宗福,许晓军等. 自由热射流流场的光学不均匀性数值研究 [J]. *强激光与粒子束*, 2004, **16**(8):989~992
- 7 P. G. Cizmas, A. Palacios, T. O'Brien *et al.*. Proper-orthogonal decomposition of spatio-temporal in fluidized beds [J]. *Chemical Engineering Science*, 2003, **58**(19):4417~4427
- 8 He Jiang, Fu Song. POD analysis of large-scale coherent structures in natural convection between two vertical plates [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4):385~392
何江,符松. 竖直平板间自然对流大尺度相干结构的 POD 分析 [J]. *力学学报*, 2003, **35**(4):385~392