文章编号：0258-7025(2007)03-0327-04

基于本征正交分解基的实时波前重构方法

谢文科，姜宗福
（国防科学技术大学光电科学与工程学院，湖南 长沙 410073）

摘要 气动光学畸变波前可近似表示为低阶本征正交分解(POD)基与时间系数的相乘叠加形式。当本征正交分解基已知时，如何实时获取各阶时间系数则是能否对波前进行有效低阶近似重构的关键。从波前低阶近似表达式出发建立了时间系数、基函数的空间导数与探测光束偏折角所满足的线性方程组，通过求解该方程组得到系列低阶时间系数。对实验测量的畸变波前时间序列的分析表明，该方法求解的时间系数和直接波前本征正交分解分析得到的时间系数能够较好地吻合，并且与基函数的组合也能较好地重构出波前。由于只需测量波面上稀疏布局的探测光束的偏折角，并且求解的方程组包含方程数量少，因此该系数获取方法更具有实时性，从而实现对高频变化的气动光学畸变波前的实时重构。

关键词 光电子学；气动光学；波前重构；本征正交分解；时间系数；自适应校正
中图分类号 O 354 **文献标识码** A

Real-Time Wavefront Construction Approach Based on Proper Orhtogonal Decomposition Basis Function

XIE Wen-ke, JIANG Zong-fu
(*College of Optoelectronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan* 410073, *China*)

Abstract Aero-optical aberration wavefront can be represented as a multiplicative summation of the proper orthogonal decomposition (POD) basis functions and time coefficients. So if the basis functions are known, how to obtain the time coefficients real-timely is the key in construction the wavefront. Based on the wavefront's low order approximation expression, the linear equations set that the time coefficients, basis function's spatial derivative and the jitters of probe beams are met is established. By solving the linear equations set, the series coefficients are obtained. This approach is applied in the aberration wavefront induced by a heated jet. The results indicate that coefficients obtained by this approach are coincided with those by directed POD analysis of the wavefront time series. The coefficients combined with POD basis functions can reconstruct the wavefront effectively. Because only a few jitters need to be measured among the beam apertures and a few equations need to be solved, so the approach has the potential for real-time coefficients obtaining, sequentially for the fast wavefront reconstruction.

Key words optoelectronics; aero-optics; wavefront reconstruction; proper orthogonal decomposition; time coefficient; adaptive correction

1 引 言

激光与流体相互作用问题可分为大气光学和气动光学两类[1]。由于大气光学问题的时间频率通常较低(<1000 Hz)，因此无论是其畸变波前的测量还是自适应校正理论都相对成熟[2]。然而气动光学的相关研究表明：即使是实验室低速(<10 m/s)射流导致的波前畸变频率也达到2 kHz[3]；高速(≈0.8 Ma)飞行器外流场导致的光学畸变频率则在30 kHz以上[4]，因此如何实时获取高速畸变波前是气动光学自适应校正首先要解决的问题。气动光学畸变波前可表示为时间系数和本征正交分解

收稿日期：2006-07-11；收到修改稿日期：2006-11-06

作者简介：谢文科(1977—)，男，湖南人，博士研究生，主要研究方向为气动光学。E-mail：wenkexiedan@163.com
导师简介：姜宗福(1963—)，男，湖南人，教授，博士生导师，主要研究方向为高能气动和化学激光器技术、气动光学。E-mail：jiangzongfu28@163.com

(POD)基函数相乘叠加的形式，由于本征正交分解基的“最优”特性，通常只需少量低阶基函数就可以较准确描述畸变波前，因此该波前表示方法能有效地减少描述畸变波前所需的信息量[5]。James M. Cicchiello 等[6]认为基于该低阶近似波前的自适应光学系统的处理时间将大大减少，从而提高系统的响应频率。基于这种波前低阶近似表示方法，在本征正交分解基已知的情况下，如何实时获取时间系数则是能否实现波前实时重构的关键，而如何实时获取这种低阶时间系数则是本文要解决的问题。

哈特曼传感器测量准直平面波通过低速热射流后的畸变波前时间序列，对该波前序列进行本征正交分解分析，从而提取了各阶本征正交分解基以及时间系数；通过求解光束面上稀疏布局的探测光束偏折角与相应位置处基函数的空间导数值、时间系数所满足的线性方程组，从而得到系列近似时间系数，并且该时间系数与基函数的组合能对波前进行有效的近似重构。由于现有的测试手段可以对光束偏折角进行快速的测量[7]，并且求解的方程数量少，因此该时间系数求解方法具有实时性，从而能够实时快速地重构出畸变波前。

2 本征正交分解基本原理

本征正交分解方法的目的是把多维随机过程进行低维近似描述并提取复杂随机过程的本质特征。其基本思想是将随机量分解为由其自身特征所确定的一组基函数来表示，基函数的确定原则为在每一次分解的过程中使得最低阶的模式上含能最多，应用变分原理上述极值问题转换为求解下列弗雷德霍姆(Fredholm)积分方程[8,9]

$$\int C_\varphi(x,y,x',y')\phi_n(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \lambda_n\phi_n(x,y,), \tag{1}$$

其中 $C_\varphi(x,y,x',y')$ 为波面上任意两点 (x,y) 和 (x',y') 处光程的协方差函数

$$C_\varphi(x,y,x',y') = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x,y,t)\varphi(x',y',t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

λ_n 为本征值，ϕ_n 为与空间相关的本征模式或本征正交分解基函数，$\varphi(x,y,t)$ 表示波面上 (x,y) 点的光程，T 为本征正交分解分析数据的时间长度。对于某类特定的气动光学问题，本征正交分解基函数可以事先从实验测量或者数值计算得到的波前数据库中提取，因而本征正交分解基函数亦称经验本征函数[10]。

由于协方差 $C_\varphi(x,y,x',y')$ 是实对称矩阵，$\{\phi_n\}$ 组成一个完备正交集，波面上任一点的光程可以表示为特征向量的级数展开形式

$$\varphi(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\phi_n(x,y), \tag{3}$$

式中 N 为本征正交分解基的总数，$a_n(t)$ 为随机函数，这里称为时间系数，各阶时间系数可以通过计算光程与相应基函数的内积求得，即

$$a_n(t) = \langle \varphi(x,y,t),\phi_n(x,y)\rangle。 \tag{4}$$

3 波前数据采集及本征正交分解基函数求解

哈特曼波前测量系统如图 1 所示，波长为 0.65 μm自准直激光二极管(LD)激光经扩束镜准直后产生约ϕ120 mm的平行光束，平行光束经流场介质后，再经缩束后进入 16×16 单元的微透镜系统，经 CCD 成像和数据采集、波前重构最后得到系列 128×128 点的二维波前图。这里哈特曼传感器的测量帧频为1200 Hz；实验射流与环境介质温差 $\Delta T \approx 50$ ℃，喷嘴出口尺寸为30.72 cm×1.28 cm，喷嘴出口处的平均风速约为7.2 m/s，射流发生装置以及光束与射流布局图详见文献[11]。

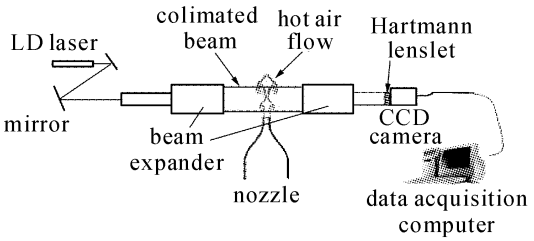

图 1 哈特曼波前测量系统示意图

Fig. 1 Hartmann wavefront measuring system

所谓波前的低阶近似是指选择合适的截断阶数 M(通常 $M \ll N$)，使得

$$\varphi(x,y,t) \approx \widetilde{\varphi}(x,y,t) = \sum_{k=1}^{M} a_n(t)\phi_n(x,y), \tag{5}$$

对于空间离散的情况，低阶近似波前相对于实际测量波前的误差可表示为

$$e(M,t) = \sqrt{\frac{1}{I\times J}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}[\varphi(x_i,y_j,t) - \widetilde{\varphi}(x_i,y_j,t)]^2}, \tag{6}$$

式中 I,J 分别为 x 和 y 方向的空间采样点数。由于波前 $\varphi(x_i,y_j)$ 可以看作是一个标量场，因此这里仅对第 64 列连续 32 个空间点，即 $\varphi(x_i,t_k)(i = 1,2,$

…,32;$k=1,2,\cdots,800$)进行本征正交分解分析。重构阶数 $M=6$,$t_k=0.16$ s和0.33 s时刻的低阶近似波前和哈特曼波前传感器测得波前的对比如图 2 所示,由式(6)计算波前重构误差分别为3.06×10^{-8} m和6.97×10^{-9} m,可见仅用前 6 阶本征正交分解模式就能较好地捕获畸变波前的主要特征。

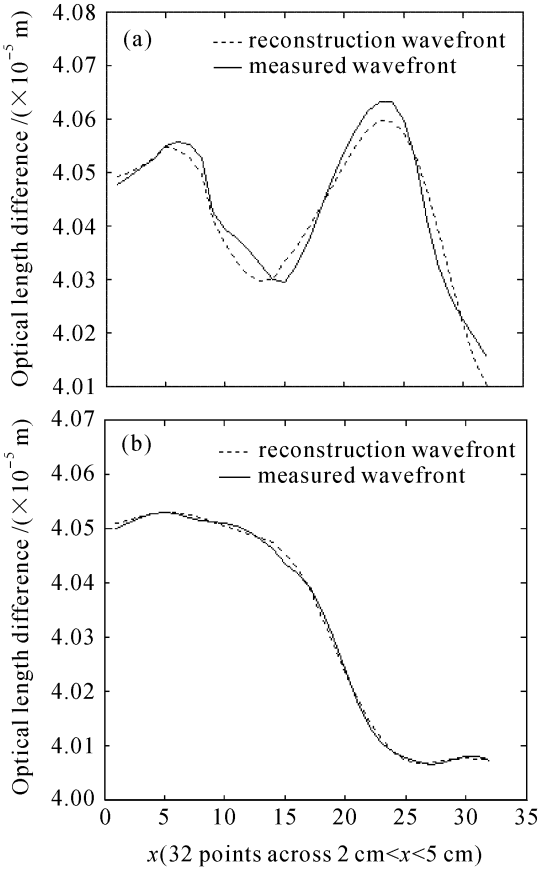

图 2　重构阶数 $M=6$,时间系数为 a_n 的重构波前和测量波前

Fig. 2　Reconstruction wavefront with a_n and the measured wavefront

(a) $t_k=0.16$ s; (b) $t_k=0.33$ s

4　实时低阶时间系数获取方法

通过对波前时间序列数据库作本征正交分解分析确定系列本征正交分解基函数,再通过计算波前与各基函数的内积从而获得各阶时间系数的方法显然不是一种实时的系数获取方法,因而它必然限制了本征正交分解分析方法在波前重构中的应用。

小口径探测光束通过变折射率流场后其方向会发生改变,由惠更斯原理可知:光线方向总是与当地波前正交,如图 3 所示。因此,由式(5)探测光束偏折角 θ 与低阶近似波前 $\widetilde{\varphi}$ 有

$$\theta(x,t)\approx\widetilde{\theta}(x,t)=\sum_{n=1}^{M}a_n(t)\frac{\mathrm{d}\phi_n(x)}{\mathrm{d}x},\qquad(7)$$

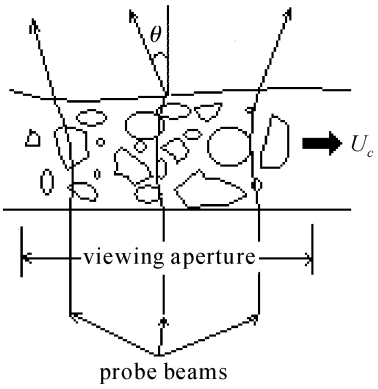

图 3　平面波以及探测光束在变折射率流场中的畸变

Fig. 3　Planner wave front and probe beam distorted by a variant index-of-refraction field

令 $\omega_n=\dfrac{\mathrm{d}\phi_n(x)}{\mathrm{d}x}$,可见偏折角 $\theta(x,t)$ 可近似表示为前 M 阶时间系数 a_n 和基函数空间导数 ω_n 的线性组合形式。相应地,可以将大口径光束内 M 个采样点处探测光束偏折角表示为相应点处前 M 阶 ω 函数值的线性组合形式。这里测量了光束孔径平面上等间距的 6 点($i=5,10,15,20,25,30$)处的光束偏折角时间序列 $\theta(x_i,t_k)$,计算了相应点处的 $\omega_n(x_i)$($n=1,2,\cdots,6$;$i=5,10,15,20,25,30$)值,因此时间系数可以通过求解以下的非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\qquad(8)$$

获得。其中方阵 $\boldsymbol{A}=[\omega_1(x_i),\omega_2(x_i),\omega_3(x_i),\omega_4(x_i),\omega_5(x_i),\omega_6(x_i)]$,$i=5,10,15,20,25,30$,$\boldsymbol{b}=[\theta(x_5,t_k),\theta(x_{10},t_k),\theta(x_{15},t_k),\theta(x_{20},t_k),\theta(x_{25},t_k),\theta(x_{30},t_k)]^{\mathrm{T}}$,因此,非齐次线性方程组的解 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 即为相应的时间系数 $[\widetilde{a}_1(t_k),\widetilde{a}_2(t_k),\widetilde{a}_3(t_k),\widetilde{a}_4(t_k),\widetilde{a}_5(t_k),\widetilde{a}_6(t_k)]^{\mathrm{T}}$,时间系数 $a_n(t_k)$ 和 $\widetilde{a}_n(t_k)$($n=1,2,3,4$)对比如图 4 所示。可见由波面上空间稀疏点处的偏折角求解的 $\widetilde{a}_n(t_k)$ 和时间系数 $a_n(t_k)$ 具有较好的相似性,因此(5)式可写为

$$\widetilde{\varphi}(x_i,t_k)=\sum_{n=1}^{N}\widetilde{a}_n(t_k)\phi_n(x_i),\quad i=1,2,\cdots,32\qquad(9)$$

应用 $\widetilde{a}_n(t_k)$ 与 $\phi_n(x_i)$ 的组合,重构阶数 $M=6$ 时,$t_k=0.16$ s和0.33 s时刻的低价近似波前和哈特曼波前传感器测得的波前对比如图 5 所示,重构误差分别为4.53×10^{-8} m和1.54×10^{-8} m。可见由大口径光束内稀疏点处的偏折角信息求解的时间系数 $\widetilde{a}_n(t_k)$ 与本征正交分解基函数的组合仍然能有效地低阶近似重构畸变波前。

值得说明的是:时间系数 $\widetilde{a}_n(t_k)$ 的求解精度只

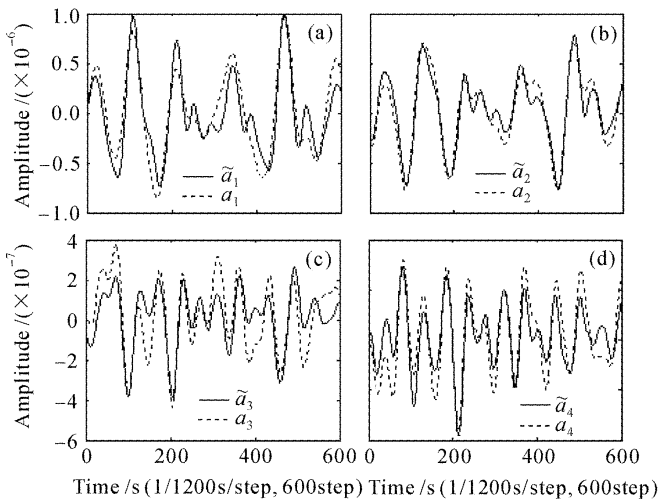

图 4 时间系数 a_n 和 $\widetilde{a}_n$

Fig. 4 Time coefficient a_n and $\widetilde{a}_n$

(a) $n=1$; (b) $n=2$; (c) $n=3$; (d) $n=4$

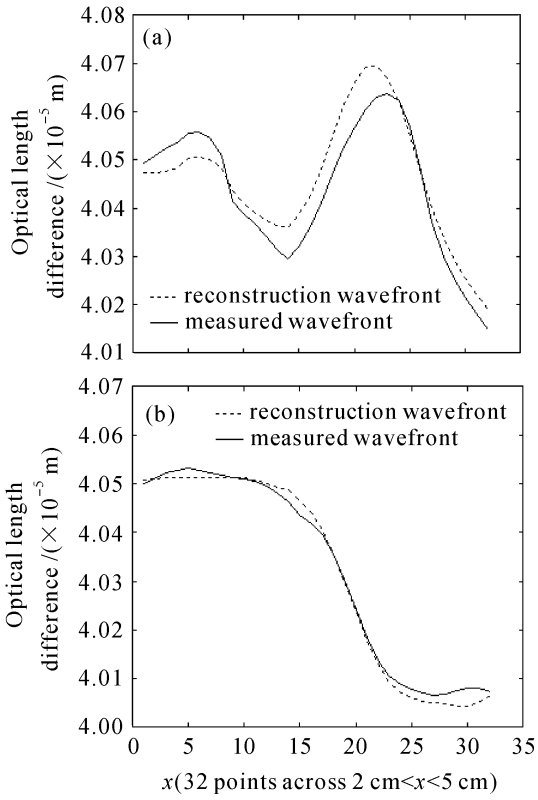

图 5 重构阶数 $M=6$,时间系数为 $\widetilde{a}_n$ 的重构波前和测量波前

Fig. 5 Reconstruction wavefront with $\widetilde{a}_n$ and measured wavefront

(a) $t_k=0.16$ s; (b) $t_k=0.33$ s

与探测光束的数量有关,而与探测光束的空间位置坐标无关。由大口径光束内任意 M 个探测光束的信息都能较好地计算出前 M 阶时间系数,因此在实验中无需考虑系列探测光束相对位置的优化问题,从而给光路设计带来很大的方便。

5 结 论

时间系数加权的低阶本征正交分解基组合可有效地对气动光学畸变进行低阶近似描述,并能捕获畸变波前的主要特征,而在本征正交分解基已知的情况下如何实时地获取低阶时间系数,是该分析方法能否应用于气动光学研究的关键。本文给出了一种基于探测光束偏折角测量通过求解线性方程组的时间系数获取方法,由于现有的实验设备对光束偏折角进行快速的测量,并且求解的线性方程组包含的方程数目较少,因此该系数求解方法可以达到较高的时间频率。由于时间系数求解精度只与探测光束的数量有关而与空间位置无关,因此无需考虑探测光束之间相对位置的优化问题,这给实际应用中的光路设计带来极大方便。另外,该低阶时间系数信息将可以直接作为控制信号源驱动变形镜对畸变波前进行自适应校正,因此该系数求解方法无论是对快速气动光学畸变波前的测量还是对自适应校正都具有较重要的应用价值。

参 考 文 献

1 Eric J. Jumper, Edward J. Fitzgerald. Recent advances in aero-optics [J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2001, **37**:299～339

2 Eric J. Jumper. Recent advances in the measurement and analysis of dynamic aero-optic interactions [C]. AIAA **97-2350**:1～2

3 Ronald J. Hugo, Eric J. Jumper. Experimental measurement of a time-varying optical path difference by the small-aperture beam technique [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(22):4436～4447

4 Ronald J. Hugo, Eric J. Jumper. Time-resolved wave front measurements through a compressible free shear layer [J]. *AIAA Journal*, 1997, **35**(4):671～677

5 James M. Cicchiello, Eric J. Jumper. Addressing the oblique-viewing aero-optic problem with reduced order methods [C]. AIAA **2001-2799**:1～9

6 James M. Cicchiello, Eric J. Jumper. Low-order representation of fluid-optic interactions associated with a shear layer [C]. AIAA **2001-0952**:1～11

7 Eric J. Jumper, Ronald J. Hugo. Quantification of aero-optical phase distortion using the small-aperture beam technique [J]. *AIAA Journal*, 1995, **33**(11):2151～2157

8 Wu Chuijie, Shi Hansheng. Advance in flow database analysis and construction of low-dimensional dynamical systems [J]. *J. Hydrodynamics*, 1994, **9**(6):716～719
吴锤结,史汉生. 湍流数据库分析及低维动力系统建模理论研究进展[J]. *水动力学研究与进展*, 1994, **9**(6):716～719

9 He Jiang, Fu Song. Pod analysis of large-scale coherent structures in natural convection between two vertical plates [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4):385～392
何 江,符 松. 直平板间自然对流大尺度相干结构的 POD 分析[J]. *力学学报*, 2003, **35**(4):385～392

10 Xia Ma, George Em Karniadakis. A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flow [J]. *J. Fluid Mech.*, 2002, **458**:181～190

11 Jiang Zongfu, Xi Fengjie, Hou Jing *et al.*. Aero-optical effects measurements in a low velocity turbulent jet [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(8):943～946
姜宗福,习锋杰,侯 静 等. 低速湍流中的气动光学效应实验研究[J]. *中国激光*, 2004, **31**(8):943～946