

文章编号: 0258-7025(2006)09-1206-04

# 部分相干脉冲光束的 $M^2$ 因子

徐延冰

(四川大学物理科学与技术学院, 四川 成都 610064)

**摘要** 研究了部分相干超短脉冲光束的  $M^2$  因子。从时空维格纳分布函数出发,以高斯-谢尔(GSM)脉冲光束为例,导出部分相干超短脉冲光束的  $M^2$  因子公式。给出了空间完全相干高斯脉冲光束和准单色高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子。由于受脉冲光束带宽及空间相关度的影响,高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子总是大于1。研究表明,  $M^2$  因子随脉冲光束带宽的增大而增大,随空间相关度的增大而减小。此外,对于啁啾高斯-谢尔脉冲光束,  $M^2$  因子还随啁啾参数的增大而增大。

**关键词** 激光光学;高斯-谢尔脉冲光束;  $M^2$  因子;时空维格纳分布函数;啁啾参数

**中图分类号** O 436 **文献标识码** A

## $M^2$ Factor of Partially Coherent Ultrashort Pulsed Beams

XU Yan-bing

(Institute of Physics Science and Technology, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

**Abstract** The  $M^2$  factor of partially coherent ultrashort pulsed beams is studied. Starting from the space-time Wigner distribution function and taking the Gaussian Schell-model (GSM) pulsed beam as a typical example, the closed-form expressions for the  $M^2$  factor have been derived. The  $M^2$  factor of spatially fully coherent Gaussian pulsed beams and quasi-monochromatic GSM pulsed beams can be treated as special cases of the general expressions. Due to the effects of the bandwidth and the spatial correlation degree, the  $M^2$  factor of GSM pulsed beams is always greater than 1. It is shown that the  $M^2$  factor increases with increasing bandwidth and decreases with increasing spatial correlation degree. Furthermore for chirped pulse, the  $M^2$  factor increases as the chirp parameter increases.

**Key words** laser optics; Gaussian Schell-model pulsed beam;  $M^2$  factor; space-time Wigner distribution function; chirp parameter

## 1 引言

近年来,随着超短脉冲激光技术的迅速发展,时空维格纳分布函数理论已经建立并用于研究飞秒脉冲传输的时空特性<sup>[1~3]</sup>。二阶矩方法已被推广并用于处理脉冲光束的传输<sup>[4~7]</sup>。文献[4]利用时空张量方法导出准单色脉冲光束的二阶矩传输规律,但是对宽频带的超短脉冲,准单色条件不再成立<sup>[5]</sup>。文献[7]揭示了时间平均过程中空间二阶矩仍然遵循 ABCD 定律,并在时空维格纳分布函数理论基础上导出空间部分相干超短脉冲光束  $M^2$  因子的二阶矩矩阵元表示公式。本文主要研究部分相干脉冲光束  $M^2$  因子及其与光束参数的关系。从时空维格纳

分布函数出发,导出高斯-谢尔(GSM)脉冲光束的  $M^2$  因子公式,结果表明  $M^2$  因子与脉冲光束的带宽和空间相关度有关。此外,对啁啾脉冲光束,  $M^2$  因子还与啁啾参数有关。

## 2 基本理论

考虑在空间时间域内的任意脉冲光束  $E(\mathbf{r}, z, t)$ , 其中  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  是和传输方向  $z$  垂直的空间矢量,  $t$  为时间变量。利用傅里叶变换,在频率域内的脉冲光束为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (1)$$

收稿日期:2005-12-26;收到修改稿日期:2006-03-27

作者简介:徐延冰(1965—),男,山东高密人,四川大学物理科学与技术学院副教授,主要从事高功率激光技术和核物理等方面的研究。E-mail:sxuyb@163.com

脉冲光束的时空维格纳分布函数定义为<sup>[1]</sup>

$$W^{sT}(\mathbf{r}, \mathbf{u}; t, \omega) = \int \frac{1}{\lambda^2} \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}'/2, \omega + \omega'/2) \times \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}'/2, \omega - \omega'/2) \rangle \times \exp\left[-i\left(\frac{2\pi\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}}{\lambda} - \omega't\right)\right] d\mathbf{r}' d\omega', \quad (2)$$

式中  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}$  为传输角矢量,  $\langle \rangle$  表示系综平均, \* 表示复共轭。考虑时间平均过程

$$W^s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) = \int W^{sT}(\mathbf{r}, \mathbf{u}; t, \omega) dt, \quad (3)$$

对时空维格纳分布函数的时间变量  $t$  积分得

$$W^s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) = \int \frac{1}{\lambda^2} \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r} + \mathbf{r}'/2, \omega) \times \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}'/2, \omega) \rangle \exp\left(-i\frac{2\pi\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'}{\lambda}\right) d\mathbf{r}', \quad (4)$$

运算中用到关系

$$(2\pi)^{-1} \int \exp(-i\omega't) dt = \delta(\omega'), \quad (5)$$

式中  $\delta(\cdot)$  表示狄拉克  $\delta$  函数。

近轴光学系统可由  $ABCD$  矩阵表征

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_o \\ \mathbf{u}_o \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  都是  $2 \times 2$  矩阵且与波长  $\lambda$  无关;  $\mathbf{J}$  为偶对矩阵, 其行列式得值为 1。

输入面上的  $W_i^s$  和输出面上的  $W_o^s$  的关系为<sup>[7]</sup>

$$W_i^s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) = W_o^s(\mathbf{A}\mathbf{r} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{C}\mathbf{r} + \mathbf{D}\mathbf{u}; \omega). \quad (7)$$

利用 (4) 式可定义部分相干超短脉冲光束的二阶矩矩阵为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{rr} & m_{ru} \\ m_{ur} & m_{uu} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \mathbf{r}\mathbf{r} & \mathbf{r}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}\mathbf{r} & \mathbf{u}\mathbf{u} \end{bmatrix} W_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) d\mathbf{r} d\mathbf{u} d\omega, \quad (8)$$

这里假设

$$\int W^s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) d\mathbf{r} d\mathbf{u} d\omega = 1, \quad (9)$$

$\mathbf{m}$  是  $4 \times 4$  对称的有限的正的实矩阵<sup>[7]</sup>。

文献[7]给出的  $M^2$  因子公式

$$M^2 = [(\frac{2\pi}{\lambda})^2 (m_{rr} m_{uu} - m_{ru}^2)]^{1/2}, \quad (10)$$

式中  $\bar{\lambda} = \int \lambda W^s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) d\mathbf{r} d\mathbf{u} d\omega$  (11)

为波长  $\lambda$  的平均。此结论对时间平均过程中的空间完全相干和部分相干脉冲光束都是适应的。

### 3 高斯-谢尔和啁啾高斯-谢尔脉冲光束的 $M^2$ 因子公式

考虑高斯-谢尔脉冲光束在近轴非色散光学系

统中传输, 其在  $z = 0$  面上的交叉谱密度函数为

$$\langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_{11}, 0; \omega) \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_{12}, 0; \omega) \rangle = S^{(0)}(\omega) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{12}|^2}{2\sigma_0^2}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{11}^2 + \mathbf{r}_{12}^2}{\omega_0^2}\right), \quad (12)$$

式中  $\sigma_0$  和  $\omega_0$  分别为  $z = 0$  面上光场的相关长度和光束宽度,  $S^{(0)}(\omega)$  为功率谱。

对  $z = 0$  面上的任意时间函数  $A_0(t)$ , 其傅里叶变换为

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int A_0(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (13)$$

源平面上的功率谱为

$$S^{(0)}(\omega) = |f(\omega)|^2. \quad (14)$$

将(12)式代入(4)式得

$$W_{is}(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) = \frac{4S^{(0)}(\omega)}{\lambda^2(1+\alpha^{-2})} \exp\left[-\frac{2\pi^2\omega_0^2}{\lambda^2(1+\alpha^{-2})} \mathbf{u}^2\right] \times \exp\left(-\frac{2}{\omega_0^2} \mathbf{r}^2\right), \quad (15)$$

式中  $\alpha = \sigma_0/\omega_0$  表示空间相关度,  $\omega_0$  是与频率  $\omega$  无关的常数。在此式的导出过程中假设

$$\int S^{(0)}(\omega) d\omega = 1. \quad (16)$$

将(4)和(15)式代入(10)式得

$$M^2 = \left\{ (1+\alpha^{-2}) \left[ 1 + \frac{(\Delta\lambda)^2}{\bar{\lambda}^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (17)$$

式中  $(\Delta\lambda)^2 = \bar{\lambda}^2 - \bar{\lambda}^2$ , (18)

$$\bar{\lambda}^2 = \int \lambda^2 W_s(\mathbf{r}, \mathbf{u}; \omega) d\mathbf{r} d\mathbf{u} d\omega. \quad (19)$$

从(17)式可以得到两种特殊情况: 1) 如果空间相关度  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $M^2 = [1 + (\Delta\lambda/\bar{\lambda})^2]^{1/2}$ , 这是空间完全相干脉冲光束的  $M^2$  因子<sup>[6]</sup>; 2) 如果  $(\Delta\lambda)^2/\bar{\lambda}^2 \rightarrow 0$ ,  $M^2 = (1+\alpha^{-2})^{1/2}$  是准单色高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子<sup>[8]</sup>。

(17) 式表明高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子与带宽  $\Delta\lambda$ , 空间相关度  $\alpha$  及平均波长  $\bar{\lambda}$  有关。  $M^2$  因子随带宽  $\Delta\lambda$  的增大而增大, 随空间相关度  $\alpha$  的增大而减小。因为  $\alpha^{-2}$  和  $(\Delta\lambda)^2$  都大于零, 高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子总是大于 1。只有在  $\Delta\lambda/\bar{\lambda} \rightarrow 0$  和  $\alpha \rightarrow \infty$  这种特殊情况下, 即准单色高斯光束时,  $M^2 = 1$ 。

将(15)式分别代入(19)和(11)式得

$$\bar{\lambda}^2 = \lambda_0^2 F_p^2, \quad (20)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 F_p, \quad (21)$$

式中  $\lambda_0$  为脉冲光束的中心波长,

$$F_p^2 = \int \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 |f(\omega)|^2 d\omega, \quad (22)$$

$$F_p = \int \frac{\omega_0}{\omega} |f(\omega)|^2 d\omega, \quad (23)$$

$\omega_0$  为脉冲光束的中心频率。因子  $F_p^2$  和  $F_p$  只有在特殊情况下才能得到解析形式。但是, 通过变量代换<sup>[9]</sup>  $\xi = (\omega - \omega_0)/T_0$ , 其中  $T_0$  是和脉冲宽度  $T$  相关的量, 可将它们展开成泰勒级数形式。将 (22) 和 (23) 式改写为

$$F_p^2 = \int (1 + \gamma\xi)^{-2} |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (24)$$

$$F_p = \int (1 + \gamma\xi)^{-1} |f(\xi)|^2 d\xi, \quad (25)$$

这里  $\gamma = (\omega_0 T_0)^{-1}$  为高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的相对带宽。假设脉冲具有对称的功率谱, 将因子  $(1 + \gamma\xi)^{-2}$  和  $(1 + \gamma\xi)^{-1}$  展开成泰勒级数得

$$F_p^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) \gamma^{2m} \langle \xi^{2m} \rangle, \quad (26)$$

$$F_p = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^{2m} \langle \xi^{2m} \rangle, \quad (27)$$

式中  $\langle \xi^n \rangle = \int \xi^n |f(\xi)|^2 d\xi$  表示脉冲功率谱  $S^{(0)}(\omega)$  的  $n$  阶矩。实际应用中只需取展开级数中的前几项, 因为  $\gamma \ll 1$ <sup>[9]</sup>。

为了说明 (17) 式的应用, 考虑啁啾脉冲, 其时间函数形式为<sup>[9]</sup>  $A_0(t) = \exp[-(1 + iC)t^2/2T_0^2]$ , 其中  $C$  为啁啾参数。保留 (26) 和 (27) 式中的前三项, 即  $m = 2$  得

$$F_p^2 \approx 1 + \frac{3}{2}\gamma^2(1 + C^2) + \frac{15}{4}\gamma^4(1 + C^2)^2, \quad (28)$$

$$F_p \approx 1 + \frac{1}{2}\gamma^2(1 + C^2) + \frac{3}{4}\gamma^4(1 + C^2)^2, \quad (29)$$

这样, 脉冲带宽为

$$\Delta\lambda \approx \lambda_0 \left[ \frac{1}{2}\gamma^2(1 + C^2) + 2\gamma^4(1 + C^2)^2 \right]^{1/2}, \quad (30)$$

波长的平均值为

$$\bar{\lambda} \approx \lambda_0 \left[ 1 + \gamma^2(1 + C^2) + \frac{7}{4}\gamma^4(1 + C^2)^2 \right]^{1/2}, \quad (31)$$

利用 (30), (31) 和 (17) 式得啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子为

$$M^2 = \left\{ (1 + \alpha^{-2}) \times \left[ 1 + \frac{\gamma^2(1 + C^2) + 4\gamma^4(1 + C^2)^2}{2 + 2\gamma^2(1 + C^2) + 3\gamma^4(1 + C^2)^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (32)$$

其中  $\gamma = 2(\ln 2)^{1/2}/\omega_0 T$ 。可以看出, 啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子与啁啾参数  $C$  有关。由于  $\partial M^2/\partial C^2 \approx [\gamma^2 + 8\gamma^4(1 + C^2)]/[2 + 4\gamma^2(1 + C^2) + 9\gamma^4(1 + C^2)^2] > 0$ , 并且 (32) 式中的啁啾参数以  $(1 + C^2)$  的形式出现, 因此, 无论啁啾参数的正负, 只

要其绝对值相同, 啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子相同, 并且  $M^2$  因子随啁啾参数  $C$  的增大而增大。此外, 当  $C = 0$  时, (32) 式变为

$$M^2 = \left[ (1 + \alpha^{-2}) \left( 1 + \frac{\gamma^2 + 4\gamma^4}{2 + 2\gamma^2 + 3\gamma^4} \right) \right]^{1/2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} [(1 + \alpha^{-2})(2 + \gamma^2 + 3\gamma^4)]^{1/2}, \quad (33)$$

这是高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子公式。

图 1 给出不同的空间相关度参量  $\alpha = 5, 10$  和  $\alpha \rightarrow \infty$  下, 高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子随相对带宽  $\gamma$  的变化曲线。计算参量为  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ 。计算中脉冲宽度  $T$  的取值为  $8.33 \sim 4.99 \text{ fs}$ , 对应的相对带宽  $\gamma$  的值为  $0.085 \sim 1.141$ 。计算结果表明,  $M^2$  因子随相对带宽  $\gamma$  的增大而增大, 而随空间相关度  $\alpha$  的增大而减小。啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子随脉冲宽度  $T$  的变化示于图 2, 计算中的啁啾参量为 (a)  $C = 2$ , (b)  $C = 3$ ; 其他参量与图 1 相同。可以看出,  $M^2$  因子随脉冲宽度的增大而减小, 啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子大于对应的高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子, 啁啾参数  $C$  越大,  $M^2$  因子越大。这意味着啁啾参数越大光束质量越差。

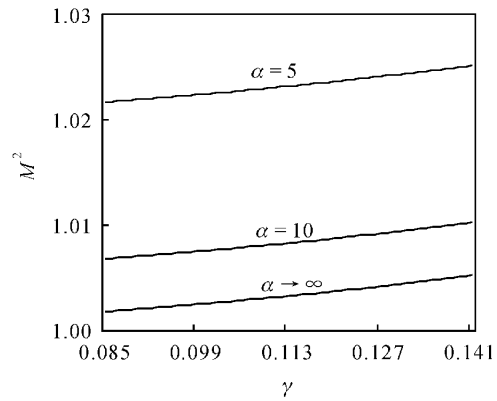


图 1 空间相关度不同时, 高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束的  $M^2$  因子随相对带宽的变化

Fig. 1  $M^2$  factor of GSM pulsed beams versus the relative bandwidth  $\gamma$  for different values of spatial correlation degree  $\alpha = 5, 10$  and  $\infty$

本文讨论中假设源平面上的束宽  $\omega_0$  是常数, 对高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束, 相对带宽  $\gamma$  增加使远场发散角增大<sup>[9]</sup>。另一方面, 空间相关度  $\alpha$  的增加, 即光场空间相干性增加, 使远场发散角减小<sup>[10]</sup>。因此,  $M^2$  因子随相对带宽  $\gamma$  增加和空间相关度  $\alpha$  的减小而增大。此外, 对啁啾高斯 - 谢尔啁啾脉冲光束, 由于其相对带宽  $(1 + C^2)^{1/2}(\omega_0 T_0)^{-1}$  是啁啾的函数, 因此, 啁啾

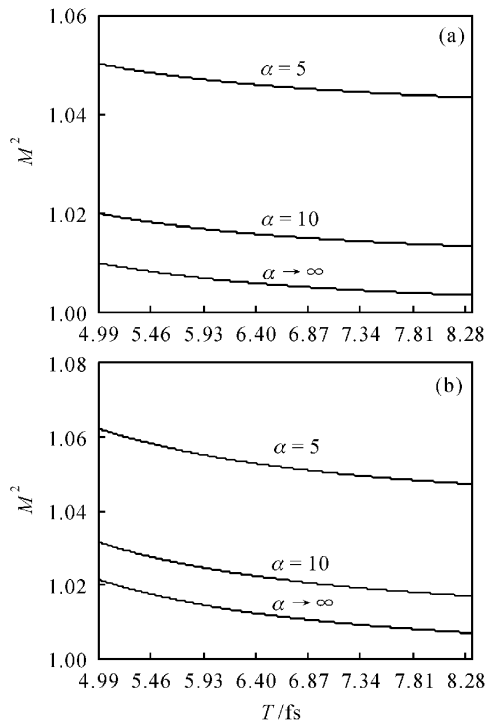


图 2 空间相关度不同时,啁啾高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子随脉冲宽度的变化

Fig. 2  $M^2$  factor of chirped GSM pulsed beams versus the pulse duration  $T$  for different values of spatial correlation degree  
(a)  $C = 2$ ; (b)  $C = 3$

的存在也必然引起啁啾高斯-谢尔脉冲光束远场发散角的增大,从而使得  $M^2$  因子增大。

## 4 结 论

本文以高斯-谢尔脉冲光束为例,对部分相干超短脉冲光束的  $M^2$  因子进行了研究。利用时空维格

纳分布函数导出了  $M^2$  因子的解析表达式。研究结果表明,高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子与带宽  $\gamma$ (或脉冲宽度  $T$ ) 及空间相关度  $\alpha$  有关。对啁啾高斯-谢尔脉冲光束,其  $M^2$  因子还与啁啾参数  $C$  有关,而与  $C$  的正负无关。空间完全相干高斯脉冲光束和准单色高斯-谢尔脉冲光束的  $M^2$  因子是本文结论的特例。本文的结果可用于研究和描述超短脉冲的传输。

## 参 考 文 献

- 1 D. Mendlovic, Z. Zalevsky. Definition and properties of the generalized temporal-spatial Wigner distribution function [J]. *Optik*, 1997, **107**:49~56
- 2 Jérôme Paye, Arnold Migus. Space-time Wigner function and their application to the analysis of a pulse shaper [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1995, **12**(8):1480~1490
- 3 J. Paye. The chronocyclic representation of ultrashort light pulse [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1992, **28**(10):2262~2273
- 4 Qiang Lin, Shaomin Wang, Javier Alda *et al.*. Transformation of pulsed nonideal beams in a four-dimension domain [J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(9):669~671
- 5 Kurt E. Oughstum, Hong Xiao. Failure of the quasimonochromatic approximation for ultrashort pulse propagation in a dispersive, attenuative medium [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **78**(4):642~645
- 6 Qing Cao, Ximing Deng. Spatial parametric characterization of general polychromatic light beam [J]. *Opt. Commun.*, 1997, **142**:135~145
- 7 Jun Yang, Dianyuan Fan. Intensity-moments characterization of general pulsed paraxial beams with the Wigner distribution function [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(10):2488~2493
- 8 Ari T. Friberg, Jari Turunen. Imaging of Gaussian Schell-model sources [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1988, **5**(5):713~720
- 9 Govind P. Agrawal. Spectrum-induced changes in diffraction of pulsed optical beams [J]. *Opt. Commun.*, 1998, **157**:52~56
- 10 Ari T. Friberg, Ronald J. Sudol. Propagation parameters of Gaussian Schell-Model beams [J]. *Opt. Commun.*, 1982, **41**:383~387