

文章编号: 0258-7025(2006)03-0339-04

# 一种可对复杂光场进行相位恢复的算法

曾 发<sup>1</sup>, 谭峭峰<sup>1</sup>, 魏晓峰<sup>2</sup>, 向 勇<sup>2</sup>, 严瑛白<sup>1</sup>, 金国藩<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084; <sup>2</sup> 中国工程物理研究院激光聚变中心, 四川 绵阳 621900

**摘要** 给出了一种改进的相位恢复迭代算法。根据多个面的强度信息进行相位恢复, 并提出将相位恢复过程划分为轮廓恢复和细节恢复两个阶段。首先利用三个较远的衍射面及输入面的强度信息, 恢复出输入面相位分布的轮廓, 然后再利用两个较近的衍射面及输入面, 进一步恢复出相位分布的细节。该方法在一维情况下能够准确地恢复出各种输入光场, 尤其是复杂光场的相位分布, 大幅度提高了相位恢复的精度。模拟实验还表明, 本算法具有较好的鲁棒性: 多次随机选取迭代初始值时, 收敛结果唯一, 并具有良好的抗噪性能。

**关键词** 光计算; 相位恢复; 迭代算法; 复杂光场; 轮廓恢复; 细节恢复

**中图分类号** O 436.1 **文献标识码** A

## A Phase Retrieval Algorithm for Complex Optical Field

ZENG Fa<sup>1</sup>, TAN Qiao-feng<sup>1</sup>, WEI Xiao-feng<sup>2</sup>,  
XIANG Yong<sup>2</sup>, YAN Ying-bai<sup>1</sup>, JIN Guo-fan<sup>1</sup>

<sup>1</sup> State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084, China  
<sup>2</sup> Research Center of Laser Fusion, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China

**Abstract** An improved iterative phase retrieval algorithm is put forward, which makes use of intensity information in several planes, and divides the retrieval process into two steps: profile retrieval and detail retrieval. First the input plane and other three far diffraction planes are needed to retrieve the profile of phase distribution, then the phase detail is available in a similar way. The phase distribution of any one dimensional optical field, including very complicated ones, can be successfully retrieved with this algorithm, and the accuracy of retrieval is greatly enhanced. This algorithm is also very robust. It has convergence independent on the initial phase, and high stability towards additive noise, which are both confirmed by simulations.

**Key words** optical computing; phase retrieval; iterative algorithm; complex optical field; profile retrieval; detail retrieval

## 1 引 言

相位恢复问题的研究, 对天文, X 射线成像, 衍射光学等诸多领域具有重要意义<sup>[1]</sup>。由于光的频率较高, 现有仪器只能采集光场的强度信息, 而无法直接获取其相位信息。借助强度信息来进行光场的相位恢复是非常必要的。

相位恢复的数值算法可分为: 迭代算法和非迭代算法两类。1972 年, R. W. Gerchberg 和 W. O. Saxton<sup>[2]</sup>提出了 GS 迭代算法, 在此基础上出现了

误差减算法(RE)、输入输出算法(IO)、基本输入输出算法(BIO)<sup>[3]</sup>以及杨顾算法(YG)<sup>[4]</sup>等改进算法, 根据两个面(含输入面和一个输出面)的强度信息, 对输入面的相位进行恢复。不过, 该类算法具有迭代不确定性、抗噪性能差、收敛速度慢等缺点<sup>[5~9]</sup>。为了克服上述缺点, 有人<sup>[5,6]</sup>提出利用三个或更多面进行相位恢复。文献[5]借鉴了 GS 算法的思想指出, 只要在菲涅耳衍射区合理选定输出面的位置, 利用三个面即可确保相位恢复结果的唯一性, 且收敛速度得到提高。各面之间的光场变换关系服从菲

收稿日期: 2005-09-02; 收到修改稿日期: 2005-10-20

基金项目: 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金(10276021)和国家高技术(2005AA849027)资助项目。

作者简介: 曾 发(1982—), 湖南省芷江县人, 清华大学精密仪器与机械学系硕士研究生, 主要从事光场模拟和重构方面的研究。E-mail: cengf04@mails.tsinghua.edu.cn

涅耳衍射定理,输入面与各输出面之间不需要放入透镜等光学元件,从而大大简化了实验系统的设计。非迭代算法的研究<sup>[4,6~8,10,11]</sup>也取得了一些进展,不过,该类算法往往对待恢复信号有一定要求<sup>[7,10]</sup>。在上述所有情况中,输入面光场通常比较简单:相位变化缓慢,或者相位变化的幅度范围较小;且输入面的强度分布一般也比较简单。而在实际情况中,输入面上的光场可能比较复杂,强度分布及相位分布都具有一定的随机性。因此,必须设计出能成功地对复杂光场进行相位恢复的算法,以提升算法的适用性。

本文对文献[5]提出的算法进行了改进,提出了相位恢复的两步走思路:即首先利用输入面和几个较远的输出面恢复出相位分布的“轮廓”,然后再利用输入面和几个较近的输出面,进一步恢复出相位分布的“细节”。

## 2 基本原理

输入面及选取的各输出面均垂直于光路系统光轴方向 $z$ ,分别与之相交于 $z = z_k$ 处, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,输入面位于 $z = z_0$ 处。假设各面的强度分布 $I(x, y, z_k)$ 均可准确测得,则对应的振幅分布为: $\sqrt{I(x, y, z_k)}$ ,各面的相位分布可表示为: $\varphi(x, y, z_k)$ 。为便于讨论,各面的强度、复振幅、振幅及相位

分布可分别简记为: $I_k, E_k, \rho_k, \varphi_k$ 。各面之间的光场变换关系服从傍轴近似条件及菲涅耳标量衍射定理。以输入面与输出面1为例,即有

$$E_1(x, y) = A_{d_{01}} \iint E_0(x', y') e^{\frac{i\pi}{d_{01}} [(x'-x)^2 + (y'-y)^2]} dx' dy', \quad (1)$$

式中, $d_{01} = z_1 - z_0$ ,即等于输入面与输出面1之间的距离, $\lambda$ 表示激光波长, $A_{d_{01}}$ 为与 $d_{01}$ 有关的系数。式(1)对应一个卷积运算,对其进行离散数值计算时,可借助快速傅里叶变换(FFT)完成。本文研究的是如何根据各面的强度分布数据,恢复出输入面的相位分布 $\varphi(x, y, z_0)$ 。

输入面相位的高频成分(即相位变化剧烈的部分),对近菲涅耳衍射区的光场影响较大,而输入面相位的低频成分(即相位的缓变部分),则对远菲涅耳衍射区的光场影响较大<sup>[5]</sup>。适用于近菲涅耳衍射区的光强传播方程(transport of intensity equation, TIE)<sup>[7,10]</sup>亦表明,近菲涅耳衍射区的光场对输入面相位的高频成分较为敏感。而在一般的相位分布中,往往同时包含低频成分和高频成分。其中,低频成分构成了相位分布的基本轮廓,而高频成分则对应相位分布的细节部分。本文中,首先利用输入面和三个位于远菲涅耳衍射区的输出面,恢复出输入面相位分布的轮廓;再利用输入面和两个位于近菲涅耳衍射区的输出面,进一步恢复出输入面相位分布的细节。算法流程如图1。

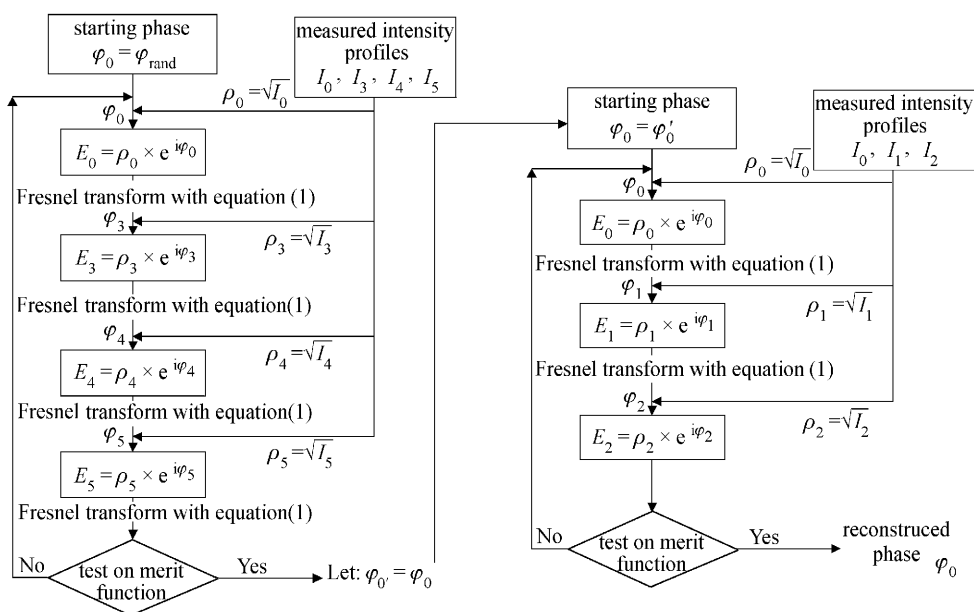


图1 算法流程

Fig. 1 Schematic of the proposed algorithm

### 3 模拟实验及结果分析

在一维情况下,对算法进行了验证。实验一,对由高斯函数及随机函数叠加而成的相位分布进行恢复,考虑到在实际测量各面强度分布时,不可避免地会引入一定量的噪声(或误差),所以还对算法的抗噪性能作了测试;实验二,针对输入面复振幅为完全随机分布时的情形,进行相位恢复。

实验一:采样点总数为 256,采样区域的宽度为 10 mm,激光波长为  $0.6328 \mu\text{m}$ ,输出面 1,2,3,4,5 与输入面的距离分别为 60 mm,120 mm,500 mm,1000 mm 和 1500 mm,输入面的振幅分布由一幅值为 0.5 的矩形窗函数和随机函数叠加产生,输入面相位分布由一高斯函数和随机函数产生,相位取值位于  $0 \sim 8.5 \text{ rad}$  之间,如图 2 所示。

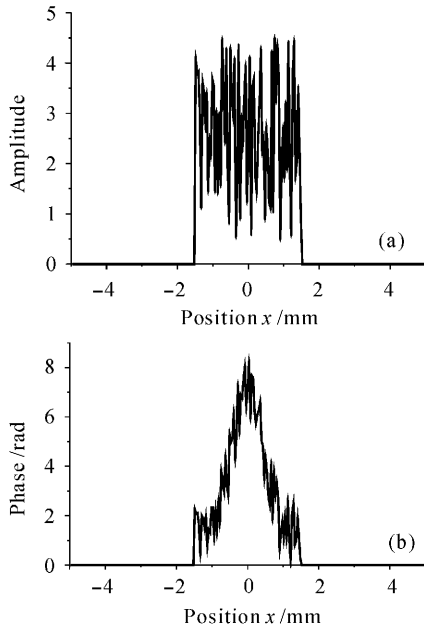


图 2 输入面复振幅分布  
(相位取值位于  $0 \sim 8.5 \text{ rad}$  之间)  
(a) 振幅分布;(b) 相位分布

Fig. 2 Complex amplitude distribution in the input plane  
(a) amplitude distribution; (b) phase distribution

迭代初始值取为零相位分布,恢复相位分布轮廓所用迭代次数为 30 次,结果如图 3(a)所示,以得到的相位轮廓作为初始值,再进行 30 次迭代,可进一步恢复出输入面相位分布的细节,如图 3(b)所示。相位恢复结果与真实分布之间仅存在平移关系,二者之间的均方根误差(RMSE)约为  $\lambda/200$ ,即几乎完全恢复出了输入面的相位分布。根据恢复出来的输入面相位分布,可依次计算出各输出面的振

幅分布,与各面所测得振幅分布之间的相对均方根误差为  $0.68\%$ ,  $0.68\%$ ,  $1.92\%$ ,  $2.01\%$  和  $2.68\%$ 。增加迭代次数,各误差值进一步减小。

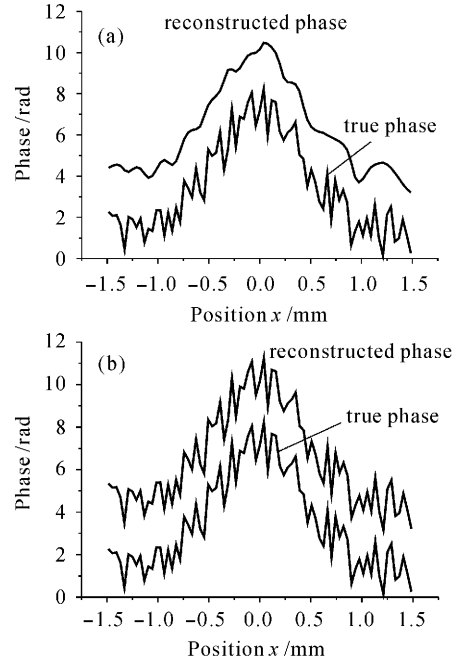


图 3 模拟实验结果  
(a) 相位轮廓恢复结果;(b) 细节恢复结果

Fig. 3 Simulated results

(a) profile reconstruction; (b) detail reconstruction

采用信噪比(SNR)作为噪声大小的评价指标,若将信号、噪声功率分别简记为  $P_s, P_n$ ,则有  $\text{SNR} = 10\lg(P_s/P_n)$  (单位为 dB)。将恢复相位分布轮廓、细节所用迭代次数均设定为 180 次,对上述各面的振幅分布数据均引入均匀白噪声(各面的信噪比相等),在不同信噪比条件下分别进行多次实验(12 次),取均方根误差对应的最大值,得到表 1,说明本算法具有良好的抗噪性能。

表 1 算法抗噪性能测试

Table 1 Performance of retrieval with additive noise

SNR /dB	RMSE / $\lambda$	SNR /dB	RMSE / $\lambda$	SNR /dB	RMSE / $\lambda$
16.8	0.0702	26.4	0.0182	30.8	0.0101
35.4	0.0049	38.4	0.0037	40.6	0.0024
43.1	0.0021	45.0	0.0015	46.5	0.0012
47.8	0.0010	49.0	0.0009		

实验二:输入面的振幅、相位分布由随机函数产生,相位取值位于  $0 \sim 9 \text{ rad}$  之间,如图 4 所示。其他条件同实验一,迭代初始值取为零相位分布。

恢复相位分布轮廓及细节所用的迭代次数均为

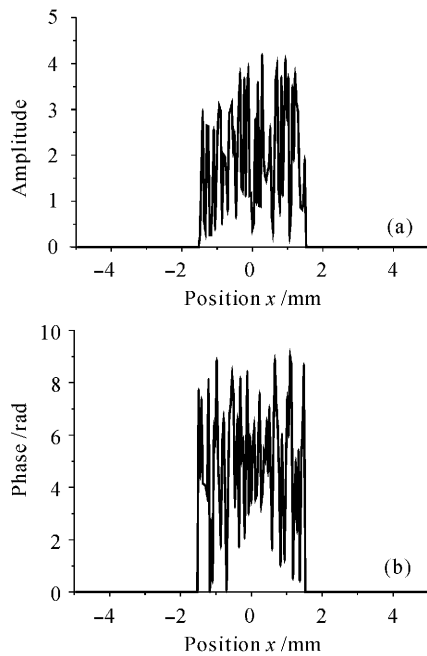


图4 输入面复振幅分布  
(相位取值位于0~9 rad之间)  
(a) 振幅分布; (b) 相位分布

Fig. 4 Complex amplitude distribution in the input plane  
(a) amplitude distribution; (b) phase distribution

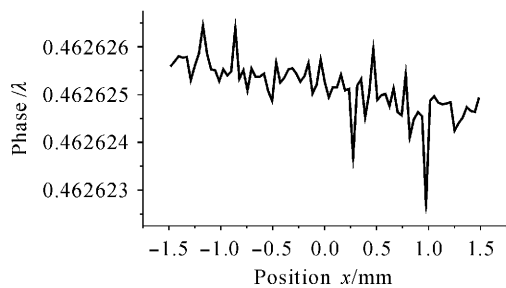


图5 相位恢复结果与真实相位间的差分布  
Fig. 5 Difference between the reconstructed phase and  
the true phase

150次,将恢复相位与真实相位分布都转换成范围内的值,则二者的差分布如图5,相位差分布的峰谷值在 $\lambda/100000$ 之内,即本文算法能对完全随机的光场进行相位恢复。

其他模拟实验表明,多次随机选取迭代初始值时,本算法亦能完全地恢复出各种一维光场的相位分布,且收敛结果唯一。受迭代初始值选取及输入光场本身特点的影响,进行相位细节恢复所需的迭

代次数在几十至几百之间,而对相位轮廓恢复的要求相对要低一些,其迭代次数一般可设定在100次以内。

## 4 结 论

现有各种迭代相位恢复算法均难以对复杂光场进行相位恢复。给出了一种改进迭代算法,利用多个面的强度信息进行相位恢复,并提出将相位恢复过程划分为轮廓恢复和细节恢复两个阶段。本算法在一维情况下能够准确地恢复出各种输入光场,尤其是复杂光场的相位分布,具有较好的鲁棒性。进一步的研究内容主要包括:对各面位置选取的优化,对面的个数的优化,尝试减少所用面的数目。

## 参 考 文 献

- 1 H. A. Ferwerda. The Phase Reconstruction Problem for Wave Amplitudes and Coherence Functions. H. P. Baltés, ed.. Inverse Source Problems in Optics [M]. New York: Springer-Verlag, 1978. 13~19
- 2 R. W. Gerchberg, W. O. Saxton. Practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, **35**(2):237~250
- 3 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms: A comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15):2758~2769
- 4 Bizhen Dong, Yan Zhang, Benyuan Gu *et al.*. Numerical investigation of phase retrieval in a fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10):2709~2714
- 5 Laurent Buel. Numerical phase retrieval from beam intensity measurements in three planes [C]. *SPIE*, 2003, **4932**:590~598
- 6 V. Yu. Ivanov, V. P. Sivokon, M. A. Vorontsov. Phase retrieval from a set of intensity measurements: theory and experiment [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(9):1515~1524
- 7 T. E. Gureyev, A. Pogany, D. M. Paganin *et al.*. Linear algorithms for phase retrieval in the Fresnel region [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **231**:53~70
- 8 Cong Wenxiang, Lin Zhongkai, Zhu Hanqiang. Reconstruction of wave-fields using fractional Fourier transform [J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 1999, **7**(4):346~351 (in English)
- 9 Liu Lanqin, Wu Yi. Features of G-S method for measuring wavefront distortion [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(9):1259~1562
- 刘兰琴,吴毅. 光束波前畸变的契伯格-山克斯顿测量方法探讨[J]. *光学学报*, 2000, **20**(9):1259~1562
- 10 T. E. Gureyev. Composite techniques for phase retrieval in the Fresnel region [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **220**:49~58
- 11 Wenxiang Cong, Nanxian Chen, Benyuan Gu. Recursive algorithm for phase retrieval in the fractional Fourier transform domain [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(29):6906~6910