

文章编号: 0258-7025(2006)12-1621-05

基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复算法

曾发¹, 谭峭峰¹, 魏晓峰², 向勇², 严瑛白¹, 金国藩¹

(¹ 清华大学精密测试技术与仪器国家重点实验室, 北京 100084)
(² 中国工程物理研究院 激光聚变研究中心, 四川 绵阳 621900)

摘要 给出了一种基于多个分数阶次的复杂光场相位恢复迭代算法。首先利用输入面和两个较高分数阶输出面上的强度信息, 恢复出输入面相位分布的轮廓, 然后再利用输入面和两个较低分数阶输出面, 进一步恢复出相位分布的细节。分别针对具有缓变相位、随机相位分布的光场, 进行了二维相位分布的恢复, 都得到了良好的恢复结果。最后在一维情形下分析了探测噪声和光路位置调整误差对算法稳定性的影响。

关键词 光计算; 相位恢复; 迭代算法; 分数傅里叶变换; 复杂光场

中图分类号 O 174.22 **文献标识码** A

Complex Optical Field Retrieved from Intensity Distributions on Several Fractional Fourier Transform Planes

ZENG Fa¹, TAN Qiao-feng¹, WEI Xiao-feng²,
XIANG Yong², YAN Ying-bai¹, JIN Guo-fan¹

¹ State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments,
Tsinghua University, Beijing 100084, China

² Research Center of Laser Fusion, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, China

Abstract An iterative phase retrieval algorithm is put forward, which makes use of intensity distributions on the input plane and several fractional Fourier transform planes. The intensity distributions on the input plane and other two fractional Fourier transform planes with relatively high orders are utilized to retrieve the phase profile, then the phase detail is retrieved by using other two fractional Fourier transform planes with relatively low orders. Good retrieval performances are obtained for two-dimensional slowly varying phase distribution and random phase distribution. Finally, the influences of the measurement noise and the fractional order error to the stability of this algorithm are analyzed in one-dimensional case, respectively.

Key words optical computing; phase retrieval; iterative algorithm; fractional Fourier transform; complex optical field

1 引言

相位恢复问题的研究, 对天文, X 射线成像及衍射光学等诸多领域具有重要意义^[1]。基于光场的强度信息, 采用迭代数值算法进行相位恢复, 已经成为主要的研究思路之一, 并被运用到实践中。

GS(Gerchberg-Saxton)算法是最早出现的相位恢复迭代算法之一, 在此基础上出现了误差减少算法(RE)^[2]、输入输出算法(IO)^[3]以及杨顾(YG)算法^[4]等改进算法。根据两个垂轴面(输入面和一个输出面)上的强度信息, 对输入面的相位进行恢复。只利用两个面进行恢复时, 存在迭代不确定性、抗噪

收稿日期: 2006-01-11; 收到修改稿日期: 2006-06-29

基金项目: 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金(10276021)和国家高技术(2005AA849027)资助项目。

作者简介: 曾发(1982—), 男, 湖南省芷江县人, 清华大学精密仪器与机械学系硕士研究生, 主要从事光场模拟和重构方面的研究。E-mail: cengf04@mails.tsinghua.edu.cn

导师简介: 谭峭峰(1974—), 男, 江西人, 清华大学副教授, 硕士生导师, 主要从事二元光学和光学信息处理方面的研究。E-mail: tanqf@tsinghua.edu.cn

性能差、收敛速度慢等缺点,有人提出采用三个垂轴面或更多垂轴面上的强度信息进行相位恢复^[5~7]。

分数傅里叶变换于上世纪 20 年代提出,并于上世纪 90 年代被引入到光学领域。相比传统的傅里叶变换而言,分数傅里叶变换更具一般性,处理起来更为灵活、方便,还与菲涅耳积分存在一定的联系^[8,9]。分数傅里叶变换的研究近年来取得了较大的进展,为光学信息处理技术的发展带来了新的契机。基于分数傅里叶变换的相位恢复算法,目前主要包括以下三类:1) 基于多分数阶次的 phase-space tomography 算法^[10~12],采用该类算法时,需测量一系列不同阶次输出面上的强度分布,信息冗余度较大^[8],为了恢复出光场的二维相位分布,还必须在两正交方向上构造彼此独立的分数阶次^[11,12],增加了光学实现的难度;2) 基于分数傅里叶变换的递归算法,利用两个面的强度信息进行相位恢复,恢复结果不依赖于初始值的选取,且与传统的迭代方法相比,计算量大为减少^[13~15];3) 基于分数傅里叶变换的 GS, YG 等迭代算法^[4,16]。

在上述所有文献所讨论的情况中,输入面光场通常比较简单,相位变化缓慢,或变化幅度较小;输入面的强度分布一般也比较简单。而在实际情况中,输入面上的光场可能比较复杂,强度分布及相位分布都具有一定的随机性。因此,必须设计出能对复杂光场进行恢复的算法,以提升算法的适用性。

文献[5]指出,输入面相位的高频成分(即相位变化剧烈的部分,构成相位分布的细节),对近菲涅耳衍射区的光场影响较大,而输入面相位的低频成分(即相位的缓变部分,构成相位分布的轮廓),则对远菲涅耳衍射区的光场影响较大。文献[7]参考了 GS 算法和文献[5]的思想,提出了一种利用多个菲涅耳衍射面对复杂光场进行相位恢复的算法,将相位恢复划分为“轮廓恢复”和“细节恢复”两个阶段。先利用输入面和三个位于远菲涅耳衍射区的输出面,恢复出输入面相位分布的轮廓,再利用输入面和两个位于近菲涅耳衍射区的输出面恢复出输入面相位分布的细节。

为了进一步减少所用面的个数,本文将文献[7]提出的算法与分数傅里叶变换相结合。首先利用输入面和两个较高分数阶次(阶次接近或等于 1)的输出面恢复出相位分布的轮廓,将得到的相位轮廓作为新的迭代初始值,再利用输入面和两个较低分数阶次(阶次接近于 0)的输出面,进一步恢复出相位分布的细节。

2 算法流程

如图 1 所示的 Lohmann-I^[17]型光路可实现光学分数傅里叶变换。若 F 为透镜焦距, d 为输入面与透镜之间的距离(透镜到输出面之间的距离也等于 d),且 $d = F(1 - \cos\alpha)$, $\alpha = p\pi/2$,则输出面上的光场分布对应输入面光场的 p 阶分数傅里叶变换,即

$$U_2(x_2, y_2) = f_p\{U_1(x_1, y_1)\} = A_p \iint U_1(x_1, y_1) \exp \left[i\pi \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2)}{\tilde{\lambda} f \tan\alpha} - i2\pi \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{\tilde{\lambda} f \sin\alpha} \right] dx_1 dy_1, \quad (1)$$

其中 $\tilde{f} = F \sin\alpha$, $U_1(x_1, y_1)$, $U_2(x_2, y_2)$ 分别表示输入、输出面上的光场分布, λ 为激光波长, A_p 为与阶次有关的系数。已有快速算法计算分数傅里叶变换^[8,18,19]。算法流程如图 2 所示。在该算法中,各输出面对应阶次均位于 0~1 之间,可采用 Lohmann-I 型光路实现。其中 Σ_0 为输入面; Σ_1, Σ_2 为阶次接近于 0 的输出面, Σ_3, Σ_4 为阶次接近或等于 1 的输出面,阶次分别为 $p_k, k = 1, 2, 3, 4$ 。各面光强分布 I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 可测量得到,对应的振幅分布为 $\rho_k = \sqrt{I_k}, k = 0, 1, 2, 3, 4$ 。

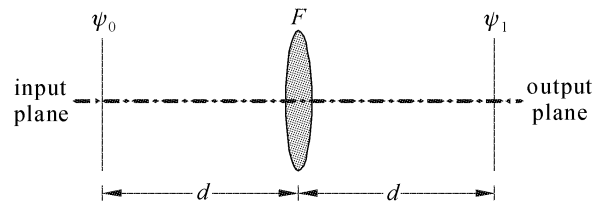


图 1 Lohmann-I 型光路

Fig. 1 Lohmann's type I setup

3 数值模拟实验及结果分析

在二维情况下进行数值模拟实验。实验一,待恢复光场的相位分布具有缓变特征;实验二,待恢复光场的相位分布为随机分布。实际测量各面强度分布时,总会引入一定的探测噪声,光路位置的调整也必然存在一些误差。因此,有必要研究噪声及误差对算法稳定性的影响,考虑到计算量的关系,仅在一维情况下对上述影响进行分析。

采用均方根误差(RMSE)指标定量评价相位恢复效果,对 RMSE 定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^N (\varphi'_m - \varphi_m - a)^2}{N}},$$

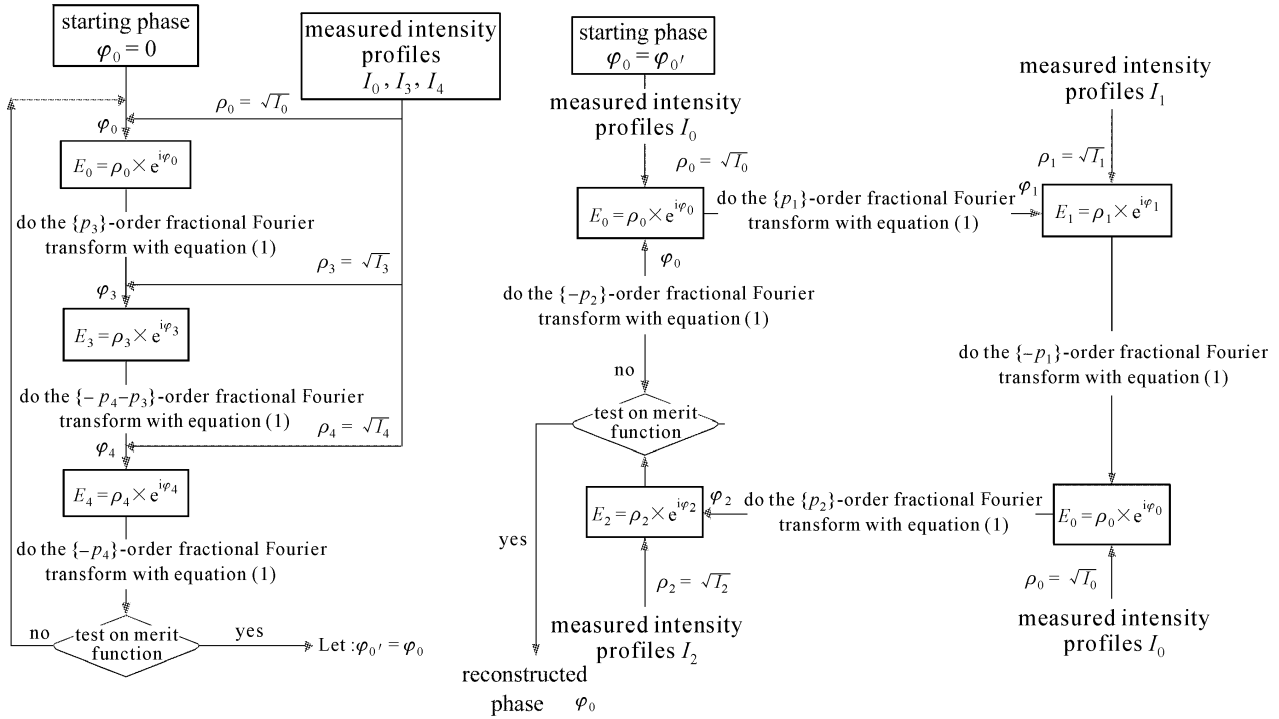


图 2 算法流程

Fig. 2 Schematic of the proposed algorithm

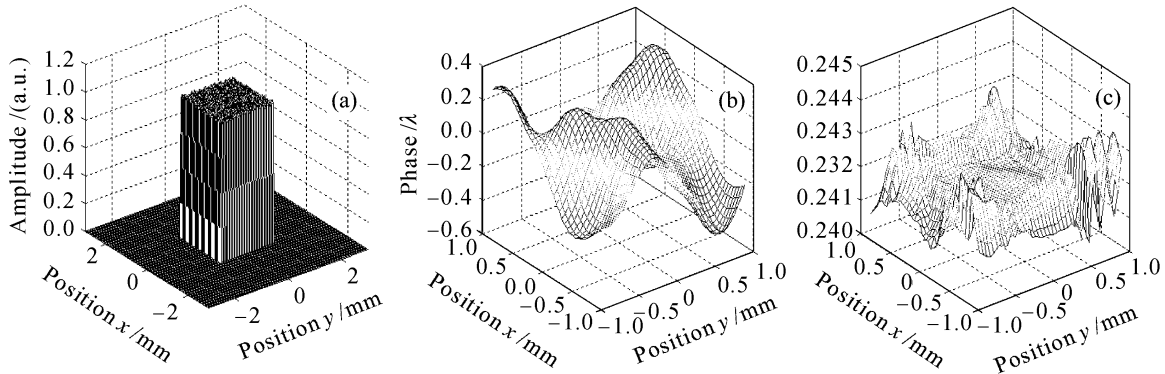


图 3 缓变相位的恢复

(a) 输入面振幅分布; (b) 相位分布; (c) 恢复结果与给定相位分布之间的差值

Fig. 3 Retrieval of slowly varying phase distribution

(a) amplitude; (b) phase distributions on the input plane; (c) difference between the retrieved phase and the given phase

$$a = \frac{\sum_{m=1}^N (\varphi'_m - \varphi_m)}{N}, \quad (2)$$

其中 φ' , φ 分别表示输入面的恢复相位与给定相位分布, a 为二者之间的直流平移分量, 下标 m 依次对应待比较的各个采样点。

实验一 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 面对应的分数阶次分别为 0.25, 0.3, 0.95, 0.98。输入面振幅分布如图 3(a) 所示, 振幅分布由一矩形窗函数与少量随机噪声叠加得到; 振幅非零区域的相位分布如图 3(b) 所示, 以低频成分为主, 变化幅度为 0.85λ 。随机选取初始值, 轮廓恢复及细节恢复所用的迭代次数分别设为

800 次, 200 次。恢复结果与给定相位之间的差值如图 3(c) 所示, 其“峰谷”值小于 $5 \times 10^{-3}\lambda$, RMSE 为 $4.2 \times 10^{-4}\lambda$ 。

实验二 考虑对相位分布的高频成分进行恢复具有现实意义, 进行了如下数值模拟。输入面振幅分布与实验一相同, 振幅非零区域的相位分布如图 4(a) 所示, 服从均匀随机分布, 幅度为 0.15λ 。各面对应的分数阶次分别为 0.25, 0.3, 0.95, 1。迭代初始值取为零相位分布, 轮廓恢复及细节恢复所用的迭代次数分别设为 200 次, 6000 次。

恢复结果与给定相位之间的差值如图 4(b) 所

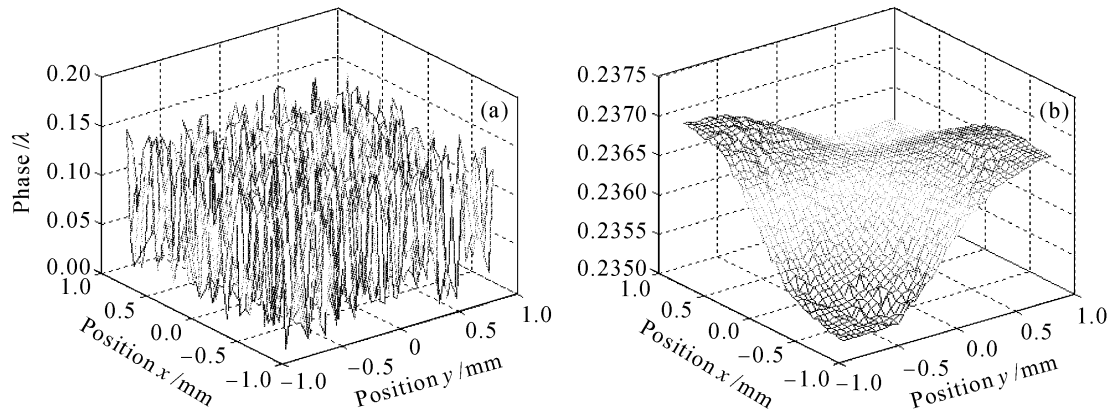


图 4 随机相位的恢复

(a) 相位分布;(b) 恢复结果与给定相位分布之间的差值

Fig. 4 Retrieval of random phase distribution

(a) phase distribution on the input plane; (b) difference between the retrieved result and the given phase

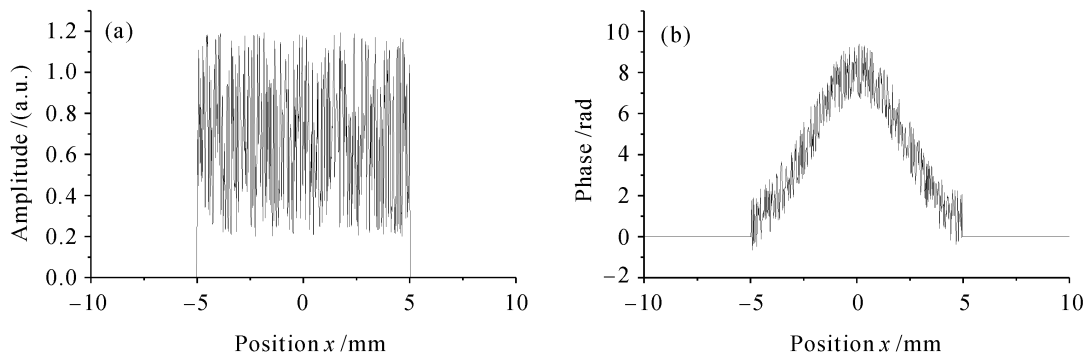


图 5 一维输入面复振幅分布

(a) 振幅分布;(b) 相位分布

Fig. 5 Complex amplitude distribution in the input plane

(a) amplitude distribution; (b) phase distribution

示,其“峰谷”值小于 $2.5 \times 10^{-3} \lambda$, RMSE 为 $4.6 \times 10^{-4} \lambda$ 。

多次模拟实验发现,理想情况下,二维相位恢复的收敛性基本上不受迭代初始值的影响,表明该算法具有良好的稳定性。在一维情况下分析光强探测噪声及光路调整位置误差对算法稳定性的影响,虽对实际问题(二维相位恢复)进行了简化,且只分析了一种输入面复振幅分布,但得到的误差宽容度有一定参考意义。

一维情形下,各面对应的分数阶次分别为0.25, 0.3, 0.95, 1, 输入面的复振幅分布如图 5 所示,其中相位分布由一高斯函数和均匀随机分布叠加产生(随机分布的变化幅度为 2.8 rad), 相位取值位于 $-1.4 \sim 9.4 \text{ rad}$ 之间。

在此采用信噪比(SNR)作为探测噪声大小的评价指标,若将信号、探测噪声功率分别记为 P_s, P_n , 则有 $\text{SNR} = 10 \log(P_s/P_n)$ (单位: dB)。恢复相位

分布轮廓、细节所用迭代次数均设为 3000 次,对上述各面的振幅分布数据均引入均匀白噪声(各面的 SNR 相等),在不同 SNR 条件下分别进行多次实验(15 次),取 RMSE 对应的最大值,得到表 1。

表 1 探测噪声对算法稳定性的影响

Table 1 Influence of the measurement noise to the stability of the algorithm

SNR /dB	RMSE (λ)	SNR /dB	RMSE (λ)
15	0.20	30	0.0084
17.5	0.074	32.5	0.0061
20	0.028	35	0.0042
22.5	0.020	37.5	0.0035
25	0.014	40	0.0023
27.5	0.011		

为简化分析,将光路位置调整误差等效成一定大小的分数阶次误差。恢复相位分布轮廓、细节所用迭代次数均设为 1500 次,在各面对应一定阶次误

差的情形下进行多次实验(15次),同样取 RMSE 对应的最大值,得到表 2。

表 2 分数阶次误差对算法稳定性的影响

Table 2 Influence of the fractional order error to the stability of algorithm

Fractional order error				RMSE (λ)
Σ_1 plane	Σ_2 plane	Σ_3 plane	Σ_4 plane	
0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.0028
-0.00005	0.00005	0.00005	-0.00005	0.0026
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0059
-0.0001	0.0001	0.0001	-0.0001	0.0053
0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.011
-0.0002	0.0002	0.0002	-0.0002	0.012
0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.023
-0.0004	0.0004	0.0004	-0.0004	0.025

实际情况中,探测噪声和光路位置调整误差是同时存在的。假定 SNR = 30 dB,当各输出面对应的阶次误差在 ± 0.0001 以内时,恢复相位的 RMSE 的最大值为 0.0093λ 。根据 Lohman-I 型光路的参数关系, F 和阶次误差值给定时,阶次 p 越小,对光路位置调整的精度要求越高。当透镜焦距取为 1000 mm, 0.25 阶输出面存在 ± 0.0001 阶误差时,对应的光路位置调整误差约为 $60 \mu\text{m}$ 。

4 结 论

已有各种迭代算法均难以对复杂光场进行相位恢复。本文给出了一种基于多个分数阶次的高精度的复杂光场相位恢复迭代算法,利用输入面和两个较高分数阶次的输出面恢复出相位分布的轮廓,再利用输入面和两个较低分数阶次的输出面,进一步恢复出相位分布的细节。在二维情形下分别针对具有缓变相位分布和随机相位分布的光场,进行了相位恢复的数值模拟实验,恢复波前与给定波前间的 RMSE 优于万分之五个波长。在一维情形下分析了光强探测噪声和光路调整位置误差对算法稳定性的影响。相比文献[7],本算法使用的面数减少了一个,若进一步减少面的个数,将会出现收敛不确定性。后续研究中,将考虑阶次之间的相关性,改进算法,以期进一步减少所用面的个数,增大可恢复复杂波前的变化幅度。

参 考 文 献

- 1 H. A. Ferwerda. The Phase Reconstruction Problem for Wave Amplitudes and Coherence Functions [M]. H. P. Baltes ed. Inverse Source Problems in Optics. New York: Springer-Verlag, 1978, 13~192
- 2 R. W. Gerchberg, W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. *Optik*, 1972, **35**(2):237~250
- 3 J. R. Fienup. Phase retrieval algorithms; A comparison [J]. *Appl. Opt.*, 1982, **21**(15):2758~2769
- 4 Bizhen Dong, Yan Zhang, Benyuan Gu *et al.*. Numerical investigation of phase retrieval in a fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, **14**(10):2709~2714
- 5 Laurent Bruel. Numerical phase retrieval from beam intensity measurements in three planes [C]. *SPIE*, 2003, **4932**:590~598
- 6 V. Yu. Ivanov, V. P. Sivokon. Phase retrieval from a set of intensity measurements; theory and experiment [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1992, **9**(9):1515~1524
- 7 Zeng Fa, Tan Qiaofeng, Wei Xiaofeng *et al.*. A phase retrieval algorithm for complex optical field [J]. *Chinese J. Lasers*, 2006, **33**(3):339~342
曾 发,谭峭峰,魏晓峰等.一种可对复杂光场进行相位恢复的算法[J]. *中国激光*, 2006, **33**(3):339~342
- 8 Haldun M. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. A. Kutay. The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing [M]. New York: Wiley, 2001
- 9 Haldun M. Ozaktas, David Mendlovic. Fractional Fourier optics [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, **12**(4):743~751
- 10 D. F. McAlister, M. Beck, L. Clarke *et al.*. Optical phase retrieval by phase-space tomography and fractional-order Fourier transforms [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(10):1181~1183
- 11 M. G. Raymer, M. Beck, D. F. McAlister. Complex wave-field reconstruction using phase-space tomography [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1994, **72**(8):1137~1140
- 12 X. Liu, K. H. Brenner. Reconstruction of two-dimensional amplitudes from intensity measurements [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **225**(1):19~30
- 13 Wenxiang Cong, Nanxian Chen, Benyuan Gu. Recursive algorithm for phase retrieval in the fractional Fourier transform domain [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(29):6906~6910
- 14 Wenxiang Cong, Nanxian Chen, Benyuan Gu. A new method for phase retrieval in the optical system [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 1998, **15**(1):24~26
- 15 丛文相,陈难先,顾本源. Fourier 变换系统中相位恢复的递推方法[J]. *科学通报*, 1998, **42**(24):2614~2618
- 16 M. Gunhan Ertosun, Haluk Ath, Haldun M. Ozaktas *et al.*. Complex signal recovery from two fractional Fourier transform intensities; order and noise dependence [J]. *Opt. Commun.*, 2005, **244**:61~70
- 17 Adolf W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10):2181~2186
- 18 Javier Garcia, David Mas, Rainer G. Dorsch. Fractional-Fourier-transform calculation through the fast-Fourier-transform algorithm [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(35):7013~7018
- 19 Adhemar Bultheel, Héctor E. Martínez Sulbaran. Computation of the fractional Fourier transform [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2004, **16**(3):182~202