

文章编号: 0258-7025(2006)11-1547-05

# 激光陀螺随机漂移的数字滤波方法比较

王省书, 黄宗升, 周 朴, 秦石乔

(国防科技大学光电科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要** 激光陀螺的随机漂移噪声类似于白噪声,它是影响激光陀螺精度的重要因素,采用数字滤波的方法可以减小随机漂移对激光陀螺精度的影响。采用常见的“AR(2)模型”、“卡尔曼滤波”、“小波分析”和“小波包分析”这四种数字滤波方法对激光陀螺的随机漂移进行分析研究,并利用功率谱和 Allan 方差的分析方法对这几种滤波效果进行了比较。仿真结果表明,对于激光陀螺的随机漂移的滤除,基于 AR 模型的卡尔曼滤波法的效果最好,基本上消除了陀螺的随机误差,而小波分析法和小波包分析法只能在一定程度上消除高频段的漂移。所得结果对激光陀螺的应用有较好的参考价值。

**关键词** 测量;激光陀螺;随机漂移;数字滤波;Allan 方差

**中图分类号** V 241.5<sup>+</sup>58 **文献标识码** A

## Comparative Study on Digital Filtering on the Random Drift of Laser Gyro

WANG Xing-shu, HUANG Zong-sheng, ZHOU Pu, QIN Shi-qiao

(College of Opto-electronics Science and Engineering, National University of  
Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract** As white noise, random drift is a key essential affecting the precision of laser gyro. Digital filtering can reduce the effect of the random drift. Some familiar digital filtering methods are studied in the article, i. e. the AR (2) model, Kalman filtering, wavelet analysis and wavelet packet analysis. The effects of different filtering methods are analyzed and compared with both power spectrum and Allan variance. Experiments indicate that Kalman filtering can achieve best performance as to filtering the random drift of ring laser gyro, and high frequency noise can be filtered to some extent by using wavelet analysis and wavelet packet analysis. These results are useful to the applications of laser gyro.

**Key words** measurement; laser gyro; random drift; digital filtering; Allan variance

## 1 引 言

激光陀螺是基于萨格奈克效应的新型陀螺。它与传统的机械陀螺相比有许多突出的优点,如精度高、耐冲击、测量范围大等,在国内外已经得到广泛的应用。但高精度激光陀螺的成本也较高,如何采用一定的技术措施,在激光陀螺精度不够高的情况下,提高系统的精度是当前要解决的重要课题。激光陀螺的漂移主要包括常值漂移、量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性等。采用实时补偿的方法可有效地去除常值漂移,但对量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性构成的随机噪声却无能为力。

1980 年加拿大科学家采用液浮陀螺仪研制的惯性测量系统,若用零速修正,系统的定位误差为 556 m/h;若采用卡尔曼滤波技术,对陀螺仪漂移进行实时估计和补偿,系统的定位误差可达到 6 m/h,即在同样的陀螺仪硬件条件下,只改进软件,定位精度就可提高两个量级<sup>[1]</sup>。因此采用数字滤波技术减小惯性器件的随机误差对提高系统的精度具有十分重要的意义。

## 2 滤波方法简介

目前对激光陀螺输出的随机误差进行滤波的方

收稿日期:2005-11-02;收到修改稿日期:2006-05-30

作者简介:王省书(1963—),女,浙江永康人,国防科技大学光电科学与工程学院副教授,硕士,主要从事光电检测技术和光电系统方面的研究。E-mail:gfdwxs@yahoo.com.cn

法主要有以下几种:时间序列建模滤波法、卡尔曼滤波法、小波分析法和小波包分析法。

### 2.1 时间序列建模滤波法

激光陀螺的零漂是一个非平稳随机过程,可以采用一阶自回归模型 AR(1)或二阶自回归模型 AR(2)<sup>[2,3]</sup>来描述。

设激光陀螺的输出信号为  $y(k)$ , 利用 AR(2)模型拟合输出数据可得

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + r_k, r_k \sim (0, \sigma^2), \quad (1)$$

式中  $y_k$  是 AR 模型的输出;  $r_k$  是均值为 0, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声。将激光陀螺  $k$  时刻的输出信号  $y_k$  减去该时刻的噪声  $r_k$  即可完成对激光陀螺信号随机噪声的滤除。

### 2.2 Kalman 滤波法

Kalman 滤波的方法<sup>[4,5]</sup> 可用于滤除激光陀螺漂移中的随机噪声。该方法是建立在式(1)所示的激光陀螺随机漂移的 AR(2)模型上的。

从系统的观点出发,可以认为零漂是白噪声为输入时的系统输出。设系统的状态为

$$\mathbf{X}(k) = [y(k) \quad y(k-1)]^T, \quad (2)$$

过程噪声为

$$\mathbf{V}(k) = [r_k \quad 0]^T, \quad (3)$$

则系统的状态方程可写为

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{V}_k, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

设  $\mathbf{W}_k$  为 AR(2)模型的估计误差,则有  $\mathbf{Y}_k = y_k + \mathbf{W}_k$ 。

设系统的输出为  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{Y}_k$ , 则系统的观测方程可写为

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{C}\mathbf{X}_k + \mathbf{W}_k, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$ 。

$\mathbf{V}_k, \mathbf{W}_k$  的统计特性为:

- 均值:  $E(\mathbf{V}_k) = E(\mathbf{W}_k) = 0$ ;
- 自相关函数:  $\varphi_{vw} = R\delta_{kj}, \varphi_{uw} = Q\delta_{kj}$ ;
- 互相关函数:  $\varphi_{vw}(k, j) = 0$ 。

根据系统方程(4), (5), 对陀螺输出信号进行 Kalman 滤波。建立的 Kalman 滤波算法为:

状态一步估计:  $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}_{k-1}$ ;

协方差阵一步预测:  $\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T$ ;

滤波增益:  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1} + \mathbf{R})^{-1}$ ;

协方差阵估计:  $\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_{k|k-1}$ ;

状态估计:  $\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{Z}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})$ ;

滤波器输出:  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}_k$ ,

其中,  $\mathbf{R}$  为系统量测噪声方法, 其值为 AR(2)模型的估计误差的方差;  $\mathbf{Q}$  为系统的过程噪声方差, 其值为  $\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{P}$  的初值选为单位阵,  $\mathbf{I}$  为单位阵,  $\mathbf{X}$  的初值选为  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

### 2.3 小波分析法

小波变换是近年来兴起的信号分析手段。由于小波技术特别适用于时变信号的处理, 而且具有很好的消噪效果, 因此可以用小波技术来建立随机漂移模型。

用小波分析法对陀螺随机信号进行滤波的原理<sup>[6~8]</sup>为:

对于有用信号  $f(k_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 观测获得的相应数据为  $y(k) = f(k) + \sigma \times z(k)$ , 其中  $z(k)$  为白噪声,  $\sigma$  为噪声强度。则其滤波步骤为:

1) 对  $y(k)$  进行多尺度(设尺度为  $M$ ) 正交小波分解, 获得各尺度的小波分解系数  $W_{m,n}, m = 1, 2, \dots, M, n = 0, 1, 2, \dots, 2^{M-1}$ ;

2) 取阈值  $t = \sigma \times \sqrt{2\log(n)}$ , 用非线性阈值函数  $\eta_i(W) = \text{sgn}(W)(|W| - t)$  作用于小波分解系数  $W_{m,n}$ , 得到新的小波系数  $W'_{m,n}$ ;

3) 用新的小波系数  $W'_{m,n}$  进行信号重构, 得到去噪的信号  $f'(k)$ 。

### 2.4 小波包分析法

小波包分析法是从小波分析中延伸出来的一种对信号进行更加细致的分析与重构的方法。与小波分析不同的是, 小波包分析不仅对信号的低频部分进行分解, 而且对高频部分也作了二次分解。它的主要优点是可以对信号的高频部分进行更加细致的刻画, 对信号的分析能力更强, 当然对信号分析的计

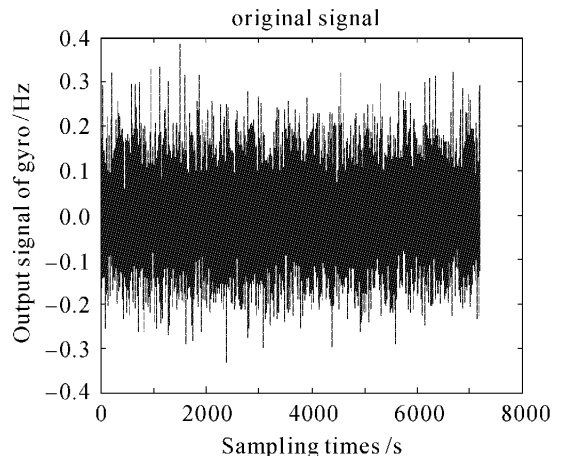


图 1 激光陀螺输出信号

Fig. 1 Output signal of laser gyro

算量将显著上升。小波包分析可以用来对信号进行消噪处理,有 4 个基本步骤:信号的小波包分解、确定最优小波包基、小波包分解系数的阈值量化和信号的小波包重构。

### 3 仿真实验结果

图 1 为某型激光陀螺的输出信号。

Matlab 的 Signal Processing 工具箱具有随机

信号处理的库函数,调用其中的“ar”函数即可对随机平稳信号进行 AR 建模。利用该函数对图 1 所示的信号建模,得到的模型参数为

$$y_k = -0.0340y_{k-1} + 0.0252y_{k-2} + r_k。 (6)$$

利用 Matlab 编程,对陀螺输出信号分别进行 AR 滤波和 Kalman 滤波,并选择 db8 小波基和 bior3.7 小波包基分别对信号进行小波滤波和小波包滤波,滤波结果如图 2 所示。

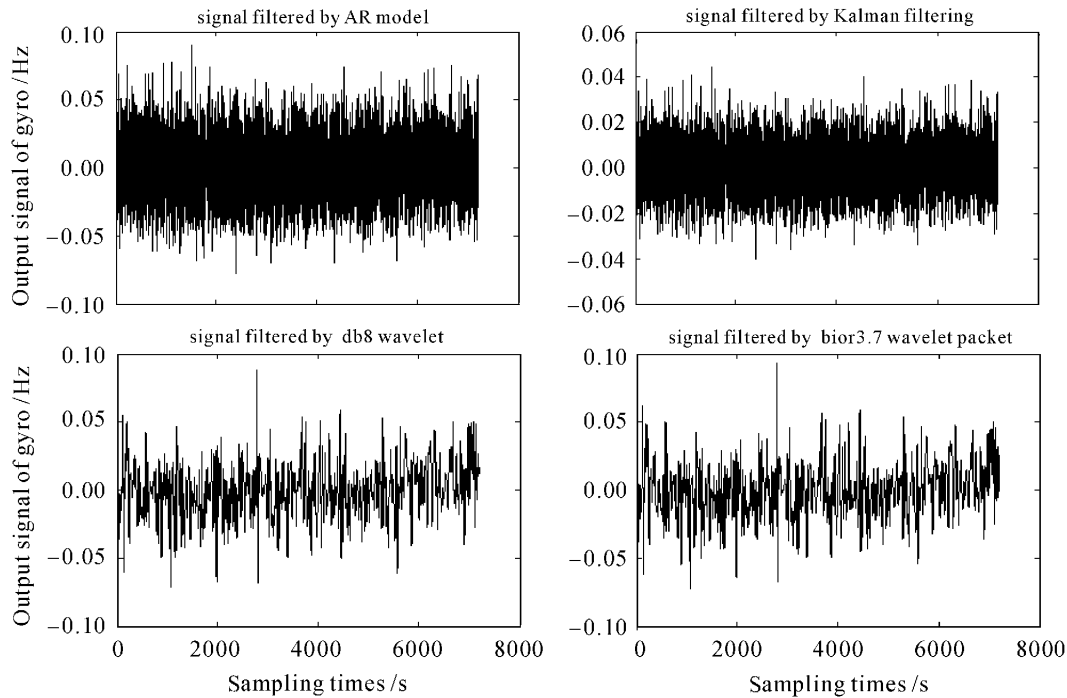


图 2 滤波前后信号的对比

Fig. 2 Signals before and after filtering

由图 2 可以看出,采用第 2 节所述的 4 种滤波方法均能起到滤除激光陀螺的随机漂移噪声的作用,其中 Kalman 滤波方法效果最好。

图 3 和图 4 是滤波前后信号的功率谱图

(PSD)。从图中可以看出,AR 滤波法和 Kalman 滤波法对分布在所有频带的噪声都能在一定程度上给予消除,而利用小波分析和小波包分析进行的信号消噪,对信号的高频部分起了较大程度的抑制。

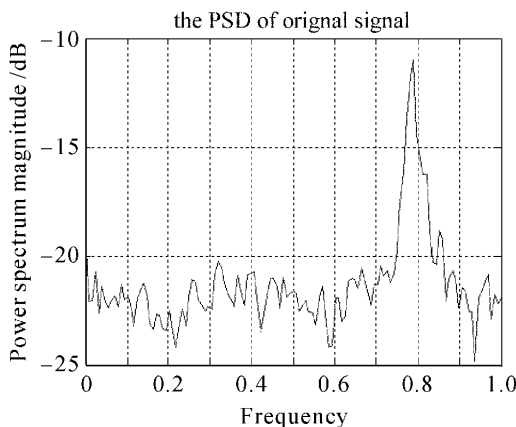


图 3 原始信号的功率谱

Fig. 3 Power spectrum of original signal

### 4 Allan 方差分析法评价滤波效果

为了比较不同滤波方法的滤波效果,采用 Allan 方差法对滤波后的数据进行分析<sup>[9~12]</sup>。Allan 方差法最大的优点是可以辨识激光陀螺的各项误差,同时确定各误差源对总误差的贡献。激光陀螺的随机误差主要包括:量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性,Allan 方差法为分离上述各项误差提供了有利的手段。

#### 4.1 基本原理

Allan 方差法基本原理为:

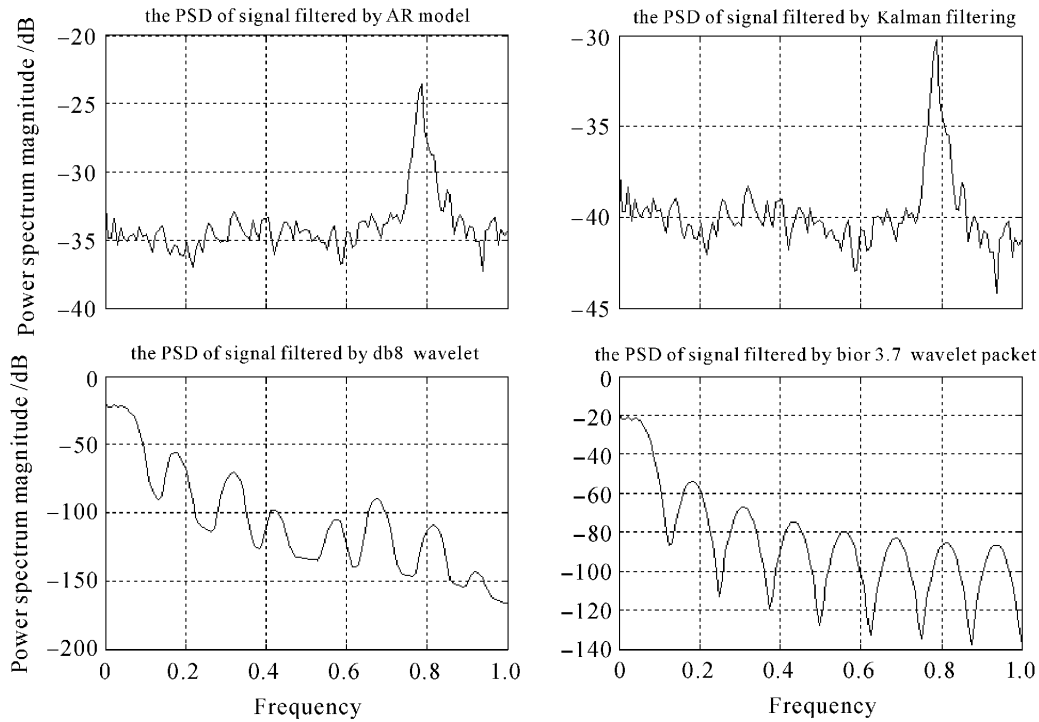


图 4 滤波后信号的功率谱

Fig. 4 Power spectra of signal after filtering

1) 以一个固定的采样频率  $f$  采集激光陀螺的角速度信号, 设得到整个样本  $X$  的长度为  $N$ 。

2) 将整个样本  $X$  分为每  $M$  个样本为一组, 得到  $K$  组,  $K = \lfloor \frac{N}{M} \rfloor$ 。对每组取平均值

$$\bar{p}_k^M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p_{(k-1)M+i}^M, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

得到新的样本序列  $\{\bar{p}_k^M\}, k = 1, 2, \dots, K$ 。

3) 对新的样本序列  $\{\bar{p}_k^M\}$ , 定义 Allan 方差为

$$\sigma_A^2(\tau_M) = \frac{1}{2} E[(\tilde{w}_{k+1}^M - \tilde{w}_k^M)^2] \cong \frac{1}{2(K-1)} \sum_{k=1}^{K-1} (\tilde{w}_{k+1}^M - \tilde{w}_k^M)^2, \quad (7)$$

其中  $E$  表示总体均值,  $\tau_M = M/f$  为相关时间。

4) 通过选取不同的数组长度(或相关时间), 可以得到相应的 Allan 方差, 从而得到  $\sigma^2 \sim \tau$  曲线图。

Allan 方差对应的频域表达式为

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} [(\tilde{w}_{k+1} - \tilde{w}_k)^2] =$$

$$4 \int_0^\infty S_w(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df,$$

其中  $S_w(f)$  为信号功率谱密度。由频域分析结果<sup>[8]</sup>可以得到 Allan 标准差模型

$$\sigma(\tau) = A_0 + A_{-1}/\sqrt{\tau} + A_{-2}/\tau, \quad (8)$$

式中  $A_0, A_{-1}, A_{-2}$  分别反映陀螺的零偏稳定性  $B$ , 随机游走  $N$  和量化噪声  $Q$  的拟合方程系数。经换算可得到它们的误差估值分别为

$$Q = \frac{A_{-2}}{\sqrt{3}}, \quad N = \frac{A_{-1}}{60}, \quad B = \frac{A_0}{0.6648}$$

### 4.2 滤波结果分析

用 Allan 方差法分析激光陀螺输出的原始信号以及滤波后的信号的  $Q, N, B$  值, 并计算出各信号的标准差, 结果如表 1 所示。

表 1 激光陀螺随机漂移的不同滤波结果比较

Table 1 Comparison of different filtered signals

Signal of laser gyro	$Q / (^\circ)$	$N / ((^\circ)/\sqrt{h})$	$B / ((^\circ)/h)$	STD / ((^\circ)/h)
Laser gyro original signal	0.0035	0.0012	0.0794	0.0962
Signal filtered by db8 wavelet	0.0069	$4.8548 \times 10^{-4}$	0	0.0201
Signal filtered by bior3.7 wavelet packet	0.0069	$4.9396 \times 10^{-4}$	0	0.0203
Signal filtered by AR model	$8.7679 \times 10^{-4}$	$2.6560 \times 10^{-4}$	0.0193	0.0226
Signal filtered by Kalman filtering	$4.9429 \times 10^{-4}$	$1.6080 \times 10^{-4}$	0.0069	0.0113

## 5 结 论

由表 1 可以看出,采用数字滤波技术可以较好地抑制陀螺的随机漂移噪声。由于基于 AR 模型的 Kalman 滤波法对陀螺的随机噪声进行建模,并采用最优估计法对信号进行了最佳估计,因此在本文所述的几种滤波方法中,它的滤波效果最好,基本上消除了陀螺的随机误差。利用 Kalman 滤波法可以提高陀螺输出信号的重复性,使得输出数据更加平稳,大幅度地减小了不同测量结果的方差值。小波分析和小波包分析法虽然能在某种程度上消除随机误差,但对于陀螺漂移噪声的滤除,它只适用于光纤陀螺而不适合于激光陀螺,因为它们对信号进行了不同层次的分解后针对信号的高频部分做了某种量化处理,再进行重构,归根结底还是低通滤波技术,这从滤波后信号的功率谱也可以看出。而激光陀螺的随机噪声类似于白噪声,噪声分布在每一个频带上,因此这两种方法并不能很好地消除噪声。

### 参 考 文 献

- Gu Yingling, Xu Jiangning, Bian Hongwei. Building-up of the gyro random drift error model [J]. *Journal of Navel University of Engineering*, 2000, (1):80~82,96  
顾颖玲,许江宁,卞鸿巍. 陀螺随机漂移误差模型建模方法研究[J]. 海军工程大学学报, 2000, (1):80~82,96
- Wang Kedong, Gu Qitai. The influence of random noise on output of ring laser gyroscope [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(12):1479~1483  
王可东,顾启泰. 随机噪声对激光陀螺输出特性的影响[J]. 光学学报, 2003, **23**(12):1479~1483
- Pan Hongfei, Yang Baijun, Wang Liqiang. Measurement of random gyro drift and establishment of mathematical model [J]. *Aerospace Shanghai*, 2003, **20**(3):20~23  
潘鸿飞,杨柏军,王立强. 陀螺仪随机漂移的测量及其数学模型的建立[J]. 上海航天, 2003, **20**(3):20~23
- Zhang Shunxia, Yan Wei. The modeling and filtering of laser gyro drift data [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 1999, **7**(4):70~72  
张树侠,闫威. 激光陀螺漂移的数据建模和滤波[J]. 中国惯性技术学报, 1999, **7**(4):70~72
- Jiang Hong, Yang Weiqin, Yang Youtang. State space modeling of random drift rate in high-precision gyro [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, 1996, **32**(3):1138~1142
- Zhang Chuanbin, Deng Zhenglong. Study on wavelet filtering for signal of ring laser gyro [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, **32**(1):125~127  
张传斌,邓正隆. 激光陀螺信号的小波滤波方法研究[J]. 电子学报, 2004, **32**(1):125~127
- Xu Lina, Deng Zhenglong. Wavelet analysis on gyro drift rate [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2001, **9**(3):58~61  
徐丽娜,邓正隆. 陀螺仪漂移特性的小波分析[J]. 中国惯性技术学报, 2001, **9**(3):58~61
- David L. Donoho. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans. on I. T.*, 1995, **41**:613~627
- Sang Man Seong, Jang Gyu Lee, Chan Gook Park. Equivalent ARMA model representation for RLG random errors [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, 2000, **36**(1):286~290
- Miao Lingjuan, Zhang Fangsheng, Shen Jun *et al.*. Data analysis and modeling of fiber optic gyroscope drift [J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2002, **11**(1):50~55
- Ling Mingxiang, Zhang Shuxia. Ring laser gyro random noise analysis and its performance characterization [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 1998, **6**(4):51~55  
凌明祥,张树侠. 激光陀螺随机噪声分析及其性能评价[J]. 中国惯性技术学报, 1998, **6**(4):51~55
- Zheng Ludi, Tang Quan'an, Zhang Yanshen. Error testing and estimating of ring laser gyro [J]. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*, 2001, **22**(1):57~60  
郑露滴,汤全安,章燕申. 环形激光陀螺误差测试及估计[J]. 航空学报, 2001, **22**(1):57~60