

文章编号: 0258-7025(2005)07-0908-05

双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶 变换特性研究

陈天禄^{1,2}, 吴 平¹

(¹ 西南交通大学应用物理系, 四川 成都 610031; ² 西藏大学电子信息系, 西藏 拉萨 850000)

摘要 基于分数傅里叶变换(FRFT)与维格纳分布函数(WDF)旋转等效的性质, 推导出了双曲余弦-高斯(ChG)光束在分数傅里叶变换面上光强分布和束宽的解析公式, 研究了双曲余弦-高斯光束光强和束宽随分数傅里叶变换阶数的变化规律, 分析了偏心参量对双曲余弦-高斯光束分数傅里叶变换特性的影响, 并对数值计算结果进行了分析和讨论。结果表明, 对给定偏心参量的双曲余弦-高斯光束, 可以使其经过一定阶数的分数傅里叶变换来获得平顶光束。

关键词 激光技术; 分数傅里叶变换; 双曲余弦-高斯光束; 维格纳分布函数; 平顶光束

中图分类号 O 435; TN 241 **文献标识码** A

Fractional Fourier Transforms for Cosh-Gaussian Beams

CHEN Tian-lu^{1,2}, WU Ping¹

(¹ *Department of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China*)
(² *Department of Electronic Information, Tibet University, Lhasa, Tibet 850000, China*)

Abstract The analytical formulae of the beam width and the intensity distribution for fractional Fourier transform (FRFT) of cosh-Gaussian (ChG) beams are derived based on the characteristic of the equality between the rotation of the Wigner distribution function (WDF) and the FRFT. By using the derived formulae, the influences of the fractional order and the decentered parameter on the transformation properties of ChG beams in the fractional Fourier plane are studied in detail. Numerical calculation examples have been presented to illustrate the propagation properties of ChG beams through FRFT optical system. It was shown that for given decentered parameter, a flatted beams can be obtained by FRFT with suitable order. The derived formulae provide a simple and convenient way to study the FRFT of ChG beams.

Key words laser technology; fractional Fourier transforms; cosh-Gaussian beams; Wigner distribution function; flatted beams

1 引 言

分数阶傅里叶变换(FRFT)于 1993 年由 D. Mendlovic 等引入光学^[1]。A. W. Lohmann 利用维格纳分布函数(WDF)定义了分数傅里叶变换, 并给出了实现分数阶傅里叶变换的光学系统^[2]。分数傅里叶变换是传统傅里叶变换在分数域上的推广, 它与传统傅里叶变换和菲涅耳变换有着紧密的联系, 同时又具有许多新的特性, 国内外对分数傅里叶

变换的性质、光学实现和应用进行了广泛的研究^[3~5]。

上世纪末, 由 L. W. Carsperson 等^[6,7]给出了近轴近似直角坐标下亥姆霍兹(Helmholtz)方程的一类特解, 即所谓厄米-正弦类-高斯(HSG)光束。迄今, 研究者已经对此类光束进行了广泛的研究^[7~14]。厄米-正弦类-高斯光束是具有较为广泛代表性意义的光束, 其中包含了厄米-双曲余弦(余弦)-高斯、厄米-双曲正弦(正弦)-高斯, 余弦-高斯

收稿日期: 2004-05-11; 收到修改稿日期: 2004-10-09

基金项目: 四川省应用基础研究基金(03JY029-063-1)和西南交通大学校科学研究基金资助项目。

作者简介: 陈天禄(1979—), 男, 甘肃省天祝藏族自治县人, 西南交通大学硕士研究生, 主要从事激光光束的传输与变换方面的研究。E-mail: ct_l071@163.com

(CsG)等光束,双曲余弦-高斯(ChG)光束也是其中之一,双曲余弦-高斯光束因在适当选择偏心参量后可在特定截面上获得具有平顶的场强分布而尤其引人注目^[8],因此,研究双曲余弦-高斯光束有重要的理论及实际意义。本文利用分数傅里叶变换与维格纳分布函数旋转等效的性质,推导出了双曲余弦-高斯光束在分数傅里叶变换面上光强分布和束宽的解析传输公式,研究了双曲余弦-高斯光束光强和束宽随分数傅里叶变换阶数变化的规律。

2 余弦-高斯光束的分数傅里叶变换

一个函数的分数傅里叶变换可等效为其维格纳分布函数的旋转, p 阶分数傅里叶变换对应维格纳分布函数旋转角度 φ ^[2]

$$\varphi = (\pi/2) \cdot p \quad (1)$$

文献[2]指出,维格纳分布函数的旋转可以通过光束经过自由空间和球面薄透镜传输来实现。实现维格纳分布函数旋转角度 φ 的光学系统有如图1所示的两种。图中 $R = \tan(\varphi/2)$, $Q = \sin\varphi$, f_1 称为标准焦距,是与分数傅里叶变换的定标因子有关的一个参量,它的选取有一定的任意性。本文不讨论定标因子对双曲余弦-高斯光束分数傅里叶变换的影响,可将 f_1 视为常数。 P_1 为输入面, P_2 为输出面,其结构参量如图1所示。

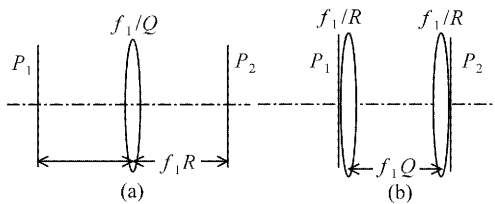


图1 实现分数傅里叶变换的光学系统

(a) 单透镜系统;(b) 双透镜系统

Fig. 1 Optical system for performing the FRFT

(a) one-lens system; (b) two-lens system

一维情况下,在 $z=0$ 面上双曲余弦-高斯光束的场分布函数表示为^[8]

$$E(x,0) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0 x), \quad (2)$$

其中 w_0 表示基模高斯光束在 $z=0$ 面上的束腰宽度, Ω_0 为与 \cosh 项相关的参量。将 $\cosh(\Omega_0 x)$ 写成指数形式,经整理,(2)式可表示为

$$E(x',0) = \frac{1}{2} \{ \exp[-(x'^2 - ax')] + \exp[-(x'^2 + ax')] \}, \quad (3)$$

其中 $a = \Omega_0 w_0$ 为偏心参量, $x' = x/w_0$ 。

函数 $f(x)$ 的维格纳分布函数定义为^[2]

$$F(x,\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{\xi}{2}\right) f^*\left(x - \frac{\xi}{2}\right) \times \exp\left[-\frac{j2\pi}{\lambda f_1}(\xi\mu)\right] d\xi, \quad (4)$$

其中 $f(x)$ 在本文中为光场分布函数,对应文中的 $E(x')$, $*$ 表示取共轭, μ 为空间频率, λ 为入射光波长。

由(4)式经积分运算可得 $z=0$ 面上双曲余弦-高斯光束的维格纳分布函数为

$$F_0(x',\mu') = \sqrt{\frac{\pi}{2}} w_0 \exp(-2x'^2) \exp\left(-\frac{2Z_0^2 \mu'^2}{f_1^2}\right) \times \left[\cosh(2ax') + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \cos\left(\frac{2aZ_0}{f_1} x'\right) \right], \quad (5)$$

式中 μ' 为 x' 对应的空间频率, $Z_0 = \pi w_0^2/\lambda$ 为基模高斯光束的瑞利长度。

维格纳分布函数旋转角 φ 后可表示为^[2]

$$F_p(x',\mu') = F_0(x' \cos\varphi - \mu' \sin\varphi, \mu' \cos\varphi + x' \sin\varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} w_0 \exp[-2(x' \cos\varphi - \mu' \sin\varphi)^2] \times \exp\left[-\frac{2Z_0^2(\mu' \cos\varphi + x' \sin\varphi)^2}{f_1^2}\right] \times \left\{ \cosh[2a(x' \cos\varphi - \mu' \sin\varphi)] + \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \cos\left[\frac{2aZ_0}{f_1}(x' \cos\varphi - \mu' \sin\varphi)\right] \right\}, \quad (6)$$

对于光束光强分布函数 $I(x')$,可由维格纳分布函数积分得到^[2]

$$I(x') = \int_{-\infty}^{\infty} F_p(x',\mu') d\mu'.$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2 x^2 \pm qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right). \quad (7)$$

经过繁冗的积分运算,并整理后求得双曲余弦-高斯光束经过 p 阶分数傅里叶变换后,光强分布函数为

$$I(x') = \frac{Z_0}{f_1 \sqrt{m}} \exp\left(\frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2m}\right) \exp\left(-\frac{2Z_0^2}{mf_1^2} x'^2\right) \times [\cosh^2(sx') + \cos^2(tx') - 1], \quad (8)$$

其中 $m = \sin^2 \varphi + \frac{Z_0^2}{f_1^2} \cos^2 \varphi$, $s = \frac{aZ_0^2 \cos \varphi}{mf_1^2}$, $t =$

$$\frac{aZ_0 \sin\varphi}{mf_1}.$$

由公式(8)可知,双曲余弦-高斯光束经过分数傅里叶变换后变为双曲余弦-高斯(ChG)光束、余弦-高斯(CsG)光束以及高斯光束的叠加。当 $\varphi = \pi$, 由(1)式知 $p = 2$, 此时, $I(x') = \exp(-2x'^2) \cosh^2(ax')$, 光束为双曲余弦-高斯光束; 当 $\varphi = \pi/2$, 由(1)式知 $p = 1$, 此时, $I(x') = \frac{Z_0}{f_1} \exp\left(\frac{a^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{2Z_0^2}{f_1^2} x'^2\right) \cos^2\left(\frac{aZ_0}{f_1} x'\right)$, 光束为余弦-高斯光束。

令 $x = 0$, 从公式(8)可以得到双曲余弦-高斯光束轴上光强分布随分数傅里叶变换阶数 p (或 $\varphi = (\pi/2) \cdot p$) 变化的公式

$$I(0) = \frac{Z_0}{f_1 \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{Z_0^2}{f_1^2} + 1 \right) + \left(\frac{Z_0^2}{f_1^2} - 1 \right) \cos(p\pi) \right]}} \times \exp\left\{ (a^2/2) \cdot \left\{ 1 + \frac{Z_0^2 [1 + \cos(p\pi)]}{f_1^2 [1 - \cos(p\pi)]} \right\}^{-1} \right\}. \quad (9)$$

由公式(9)可知,在 $Z_0 \geq f_1$ 的条件下,当 $p = 1$ 时,轴上光强取最大值, $I_{\max}(0) = \frac{Z_0}{f_1} \exp\left(\frac{a^2}{2}\right)$; 当 $p = 2$ 时,轴上光强取最小值, $I_{\min}(0) = 1$ 。在 $Z_0 < f_1$ 的条件下,当 $p = 2$ 时,轴上光强取最大值, $I_{\max}(0) = 1$; 当 $p = 1$ 时,轴上光强取最小值, $I_{\min}(0) = \frac{Z_0}{f_1} \exp\left(\frac{a^2}{2}\right)$ 。从(9)式可知,轴上光强取值不仅与分数傅里叶变换阶数 p 有关,而且与基模高斯光束的瑞利长度 Z_0 , 偏心参量 a 以及标准焦距 f_1 有关。

按二阶矩方法,光束束宽的定义为

$$w_x^2 = 4\langle x^2 \rangle = \frac{4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x, \mu) dx d\mu}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \mu) dx d\mu}, \quad (10)$$

利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2) \cos(qx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(-\frac{q^2}{4p}\right), \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-p^2 x^2) \cos(qx) dx = 2\sqrt{\pi} \frac{2p^2 - q^2}{8p^5} \exp\left(-\frac{q^2}{4p^2}\right), \quad (12)$$

经复杂的积分运算可得到双曲余弦-高斯光束经过 p 阶分数傅里叶变换后,在 p 阶分数傅里叶变换面上光束束宽 w_x 的解析计算公式为

$$w_x = 2 \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left\{ \left[\sigma^2 + \frac{f_1^2}{Z_0^2} (\sigma^2 - a^2 w_0^2) \right] + \left[\sigma^2 - \frac{f_1^2}{Z_0^2} (\sigma^2 - a^2 w_0^2) \right] \cos(p\pi) \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

其中 $\sigma = \sqrt{\frac{1 + a^2 + \exp(-a^2/2)}{1 + \exp(-a^2/2)}} w_0$ (σ 为 $z = 0$ 处双曲余弦-高斯光束在二阶矩定义下的束宽)。

从(13)式可知,双曲余弦-高斯光束在 p 阶分数傅里叶变换平面上光束束宽 w_x 取值不仅与分数傅里叶变换阶数 p 有关,而且还与基模高斯光束的瑞利长度 Z_0 和偏心参量 a 以及标准焦距 f_1 有关。在 $Z_0 \geq f_1 \sqrt{1 - (a^2 w_0^2 / \sigma^2)}$ 的条件下,当 $p = 2$ 时,光束束宽取最大值, $w_{x\max} = \sigma$; 当 $p = 1$ 时,光束束宽取最小值, $w_{x\min} = \frac{f_1}{Z_0} \sqrt{\sigma^2 - a^2 w_0^2}$ 。在 $Z_0 \leq f_1 \sqrt{1 - (a^2 w_0^2 / \sigma^2)}$ 的条件下,当 $p = 2$ 时,光束束宽取最小值, $w_{x\min} = \sigma$; 当 $p = 1$ 时,光束束宽取最大值, $w_{x\max} = \frac{f_1}{Z_0} \sqrt{\sigma^2 - a^2 w_0^2}$ 。

3 分数傅里叶变换平面上双曲余弦-高斯光束的变换特性

利用公式(8)进行数值计算,可得到不同偏心参量 a 的双曲余弦-高斯光束在分数傅里叶变换面上光强的分布,如图2所示。图中,偏心参量 $a = 0.5, 1.44, 1.72, 5.0$ 。计算用光束参数为: $w_0 = 1.0 \text{ mm}$, $\lambda = 623.8 \text{ nm}$, $f_1 = 1600 \text{ mm}$, 此时,瑞利长度为: $Z_0 = \pi w_0^2 / \lambda = 3.14 f_1 > f_1$ 。图2中纵坐标为归一化光强 $I'(x') = I(x') / I_N$, 其中 $I_N = \int_{-\infty}^{\infty} I(x') dx'$ 。

从图2可以看到,双曲余弦-高斯光束在分数傅里叶变换面上光强的分布随分数傅里叶变换阶数 p 和偏心参量 a 变化。当 a 很小(如 $a = 0.5$) 时,双曲余弦-高斯光束的分布与高斯光束分布近似,随着偏心参量 a 的增大,双曲余弦项对光强分布的影响逐渐加大,光束出现不同程度的调制, a 越大,调制越严重。

从图2也可以看出,分数傅里叶变换的阶数 p 对双曲余弦-高斯光束的光强分布有很大影响,而且偏心参量 a 越大,光强分布图的变化越大。当 $p = 1$ 时,如图2(c)所示,此时光束为余弦-高斯光束。由图2(b)可以看出当 $p = 0.6$ 时偏心参量 $a = 1.72$ 的光束出现平顶分布,而且计算表明,对给定偏心参量 a 的双曲余弦-高斯光束,可以通过调节合适的分

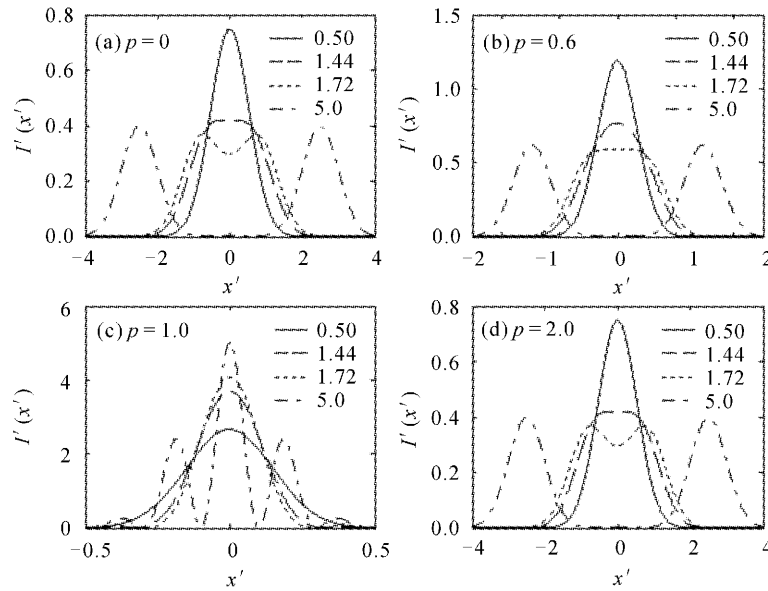


图 2 当偏心参量不同时不同阶数的分数傅里叶变换面上双曲余弦-高斯光束归一化光强的分布图

Fig. 2 Normalized intensity distributions of ChG beam with different decentered parameter at the FRFT plane with different fractional order

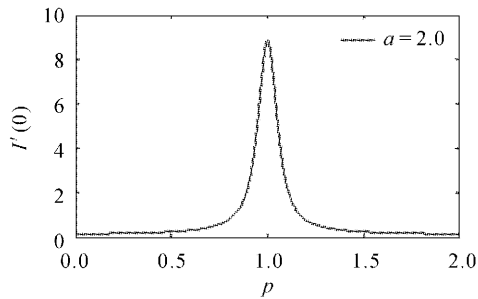


图 3 当 $a=2.0$ 时双曲余弦-高斯光束轴上归一化光强分布随分数傅里叶变换阶数的变化规律

Fig. 3 Evolution of the on-axis normalized intensity distributions of ChG beam with $a=2.0$ on the FRFT plane versus the fractional order p

数傅里叶变换阶数 p 来实现平顶,这在实际操作中是很容易实现的,因此,这种获得平顶光束的方法有实际的应用价值。

由公式(9)可以对双曲余弦-高斯光束的轴上光强随分数傅里叶变换阶数 p 变化规律进行数值分析,得到如图 3 所示的分布图,图中偏心参量 $a=2.0$ 。由图 3 看出轴上相对光强随分数傅里叶变换阶数呈现一定规律的变化,当 $p=2$ 时,轴上光强达到最小值;当 $p=1$ 时,轴上光强达到最大值,在 $p=1$ 附近轴上光强急剧变化。数值计算结果与理论分析一致。

4 结 论

研究表明,分数傅里叶变换阶数对双曲余弦-高斯光束的光强分布有明显影响,双曲余弦-高斯光束的轴上光强随分数傅里叶变换阶数呈现一定规律的变化,偏心参量 a 对于双曲余弦-高斯光束的分数傅里叶变换特性有很大影响, a 较小时(如 $a=0.5$),双曲余弦-高斯光束的变换接近高斯光束的传输特性, a 较大时(如 $a=5$),双曲余弦-高斯光束经过分数傅里叶变换光学系统后光强分布有明显的变化。计算结果表明,当分数傅里叶变换阶数 p 一定时,取适当的偏心参量 a 可以得到较好平顶的光强分布。平顶光束是实际应用中常用的一种光束,通过适当选取偏心参量 a ,可以使双曲余弦-高斯光束经过一定阶数的分数傅里叶变换来获得平顶光束。

参 考 文 献

- 1 David Mendlovic, Haldun M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9):1875~1881
- 2 Addt W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10):2181~2186
- 3 Liu Shutian, Xu Jiandong, Zhang Yan *et al.*. Optical implementations of the fractional Fourier transform using lens [J]. *Acta Optica Sinica*, 1995, **15**(10):1044~1048
刘树田,徐建东,张岩等.透镜组合实现分数傅里叶变换[J].*光学学报*, 1995, **15**(10):1044~1048
- 4 Tan Qiaofeng, Yan Yingbai, Jin Guofan *et al.*. Precise design of diffractive optical element for beam smoothing in fractional

- Fourier transform domain [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(7):609~613
谭峭峰,严瑛白,金国藩等. 分数傅里叶变换衍射光学束匀滑器件的精细化设计[J]. *中国激光*, 2003, **30**(7):609~613
- 5 Zeng Yangsu, Guo Yongkang, Xie Shiwei *et al.*. Computer generated hologram of double fractional Fourier transforms [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(2):155~158
曾阳素,郭永康,谢世伟等. 双重分数傅里叶变换计算全息[J]. *光学学报*, 2003, **23**(2):155~158
- 6 Lee W. Carsperson, Anthony A. Tovar. Hermite-sinusoidal-Gaussian beams in complex optical systems [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1998, **15**(4):954~963
- 7 Hongjie Liu, Daomu Zhao, Haidan Mao *et al.*. Studies of beam propagation characteristics on apertured fractional Fourier transforming systems[J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2004, **2**(4):206~209
- 8 Baida Lü, Hong Ma, Bin Zhang. Propagation properties of cosh-Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 1999, **164**:165~170
- 9 Song Yu, Hong Guo, Xiquan Fu *et al.*. Propagation properties of elegant Hermite-cosh-Gaussian laser beams [J]. *Opt. Commun.*, 2002, **204**:59~66
- 10 Wu Ping, Lü Baida. Transformation of Hermite-cosh-Gaussian beams through an optical symmetrizing system [J]. *Laser Technology*, 2002, **26**(5):398~400
吴平,吕百达. 厄米-双曲余弦-高斯光束通过对称化光学系统的变换[J]. *激光技术*, 2002, **26**(5):398~400
- 11 Luo Shirong, Lü Baida. Pointing stability of Hermite-cosh-Gaussian beams [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(6):692~696
罗时荣,吕百达. 厄米-双曲余弦-高斯光束的瞄准稳定性[J]. *光学学报*, 2002, **22**(6):692~696
- 12 Song Yu, Wanyi Gu, Hong Guo. Optical resonator with hyperbolic-cosine-Gaussian modes [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **221**:241~247
- 13 Yunli Qiu, Hong Guo, Xuzong Chen *et al.*. Propagation properties of an elegant Hermite-cosh-Gaussian beam through a finite aperture [J]. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 2004, **6**(11):210~215
- 14 Wu Ping, Zhuang Jian, Lü Baida. A new method for producing flat-topped beams: Hermite-Gaussian beam combination [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(1):48~52
吴平,庄建,吕百达. 一种产生平顶光束的新方法:厄米-高斯光束的合成[J]. *中国激光*, 2004, **31**(1):48~52