

文章编号: 0258-7025(2005)06-0798-05

# 波像差与光束质量 $\beta$ 因子的关系

李新阳, 鲜 浩, 王春鸿, 姜文汉

(中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209)

**摘要** 分析了光学系统的波像差与对应的光束质量  $\beta$  因子间的关系, 推导了光束质量  $\beta$  因子的近似计算公式。用数值计算方法建立了各种泽尼克多项式的波像差均方根值(RMS)与  $\beta$  因子间的拟合关系式。在此基础上, 分析了科尔莫哥诺夫大气湍流引起的波像差与对应光束质量  $\beta$  因子间的关系。数值计算结果验证了推导的近似计算公式在相当大的像差范围内是准确的。

**关键词** 大气光学; 光束质量; 波像差;  $\beta$  因子; 泽尼克多项式; 大气湍流

**中图分类号** TN012 **文献标识码** A

## Relationship between Beam Quality Factor $\beta$ and Wavefront Error

LI Xin-yang, XIAN Hao, WANG Chun-hong, JIANG Wen-han

(Institute of Optics and Electronics, The Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sichuan 610209, China)

**Abstract** The relationship between beam quality factor  $\beta$  and wavefront error was analyzed in this paper. Approximate formulas to calculate  $\beta$  from room-mean-square (RMS) of wavefront error were deduced. The relationship between  $\beta$  and several Zernike polynomials was obtained by numerical calculation through fast Fourier transform (FFT) method. The approximate formula to estimate  $\beta$  from atmosphere disturbed wavefront error was given too. These approximate formulas were compared and verified well with the results of numerical calculation.

**Key words** atmospheric optics; beam quality; wavefront error; factor  $\beta$ ; Zernike polynomials; atmosphere turbulence

### 1 引 言

在激光大气传输等应用领域中, 激光能量传输效率是人们非常关心的一个问题。传输过程中由于光学系统的波像差和大气湍流等因素会引起光束能量弥散, 在有限靶目标面积上能够接收到的能量与靶上光斑的环围能量分布特性有关<sup>[1~4]</sup>。对于无像差的圆孔径衍射成像系统, 一倍衍射极限直径内包含约 84% 的总能量<sup>[5~7]</sup>。当存在像差时光斑弥散, 在同样的直径范围内包含的能量下降, 或在更宽的直径范围内才可能包含同样多的能量。光束质量下降的程度可以用光束质量  $\beta$  因子反映。光束质量  $\beta$  因子, 即包含与衍射极限光斑一倍衍射极限直(半)径内同样多的能量条件下, 有像差系统的远场光斑的环围能量直径与衍射极限直(半)径之比, 是评价光学系统能量传输性能的重要指标之一<sup>[1~3]</sup>。

在光学系统的设计和分析中, 经常需要知道波像差和光束质量  $\beta$  因子的关系。但波像差与光束质量因子  $\beta$  之间的关系比较复杂, 很难得到准确的解析结果。鲜浩等<sup>[2]</sup>研究了波像差和光束质量  $\beta$  因子的关系, 通过对不同类型泽尼克像差及其组合的均方根值  $\sigma$  和光束质量  $\beta$  因子进行数值计算和二阶多项式拟合, 得到一组  $\beta$  因子的近似计算公式。实际应用中发现, 文献给出的  $\beta$  因子近似计算公式在小像差条件下比较准确, 在波像差较大时存在较大误差。由于波像差和光束质量  $\beta$  因子的关系问题在理论研究中和实际工作中都比较重要, 所以还有必要对此问题进行仔细的研究。

### 2 波像差与光束质量 $\beta$ 因子的关系

根据统计光学的原理, 随机像差的远场光斑形

收稿日期: 2004-03-12; 收到修改稿日期: 2004-06-03

基金项目: 国家 863 计划资助项目。

作者简介: 李新阳(1971—), 男, 四川资阳人, 博士, 副研究员, 主要从事自适应光学、大气光学等方面的理论和应用研究。

E-mail: xyli@ioe.ac.cn

状可以用圆对称高斯函数表示<sup>[4~7]</sup>。环围能量归一化后的远场光斑剖面表示为<sup>[4]</sup>

$$I(a) = \left(\frac{d}{2}\right)^{-2} \exp\left[-\pi\left(\frac{2a}{d}\right)^2\right], \quad (1)$$

其中  $a$  为角坐标, 单位为  $\lambda/D$ ,  $\lambda$  为成像波长,  $D$  为通光孔径直径。参量  $d$  的单位也是  $\lambda/D$ , 决定光斑的宽度和峰值亮度。在研究光斑环围能量特性时将遇到大量积分运算, 而高斯函数具有积分简洁的优点。在以光斑中心为圆心、角半径为  $b$  (单位  $\lambda/D$ ) 的环内, 高斯光斑的归一化环围能量分布为

$$F(b) = 2\pi \int_0^b I(a) a da = 1 - \exp\left(\frac{-4\pi b^2}{d^2}\right), \quad (2)$$

可见(2)式定义的高斯光斑具有能量总和归一化的特点。根据(2)式, 环围能量占总能量比例为  $\eta$  对应的环围半径为

$$b(\eta) = [-\ln(1-\eta)/\pi]^{1/2} d/2, \quad (3)$$

根据光束质量  $\beta$  因子的定义:

$$\beta = b(\eta)/b_0(\eta) = d/d_0, \quad (4)$$

其中  $d_0$  和  $b_0$  分别是衍射极限光斑的等效高斯宽度和衍射极限半径。对于一定的成像波长和光学系统口径,  $d_0$  和  $b_0$  都是常数。例如对于圆口径光学系统, 一倍衍射极限半径为  $1.22(\lambda/D)$ , 一倍衍射极限半径内的环围能量与总能量的比是 0.838。由(4)式可见光束质量  $\beta$  因子与光斑的高斯等效宽度  $d$  成正比。

根据文献[6,7]的分析, 有像差系统的远场光斑可以看作一个衍射“核”与一个弥散“晕”两部分的叠加, 而光斑的总高斯等效直径为<sup>[8]</sup>

$$d^2 \approx d_0^2 + d_T^2, \quad (5)$$

其中  $d_T$  是由于像差造成的光斑加宽。从几何光学考虑, 像面上的远场光斑是孔径上各个位置处光线追迹的总和。有像差条件下, 各个光线处的局部波前倾斜引起光线方向偏离, 造成像面上光斑展宽。光斑展宽的幅度, 即光线的偏移量大小与局部波前倾斜量大小成正比。对于某一种像差, 各点的波前倾斜量大小与孔径上波像差均方根值  $\sigma$  成正比。所以像差造成的光斑弥散直径  $d_T$  与像差的均方根值  $\sigma$  的大小成正比

$$d_T \approx w\sigma, \quad (6)$$

像差的类型不同, 光斑加宽的程度不同, 系数  $w$  的大小将不同。将(6)式代入(5)式, 并利用(4)式光束质量  $\beta$  因子的定义, 得到光束质量  $\beta$  因子与波像差均方根值之间的关系为

$$\beta^2 \approx 1 + A\sigma^2, \quad (7)$$

其中  $A = w^2$  是比例系数。对于某一种特定的像差类

型, 比例系数  $A$  是常数。如果可以事先得到某一种像差类型的均方根值与光束质量  $\beta$  因子间近似关系中的比例系数  $A$ , 就可以根据波像差均方根值大小用(7)式计算对应的光束质量  $\beta$  因子。在小像差条件下, 可以对(7)式做级数展开, 得到光束质量  $\beta$  因子与波像差均方根值之间的多项式表达式。例如文献[2]中的近似公式可以看作是(7)式在小像差条件下的二阶级数展开近似, 所以在大像差条件下的计算误差较大。当波像差较大时几何效应起主要作用, 衍射效应的影响可以忽略不计, (7)式可以进一步简化为

$$\beta^2 \approx A\sigma^2, \quad (8)$$

通常只需  $\beta$  大于 3 就可以用(8)式近似计算。实际工作中经常遇到的一种情况是: 光学系统的总像差由几部分组成, 各部分的波像差与光束质量  $\beta$  因子的关系各不相同, 即

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2, \quad (9)$$

$$\beta_k^2 \approx 1 + A_k \sigma_k^2, \quad (10)$$

那么这时总像差  $\sigma$  造成的光束质量与  $\beta$  因子也与各部分引起的光束质量变化有关。一个合理的推论是这时的比例系数  $A$  应该是各部分像差比例系数  $A_k$  的加权和形式, 即

$$A = \sum_{k=1}^N \eta_k A_k = \sum_{k=1}^N A_k \sigma_k^2 / \sigma^2, \quad (11)$$

其中权重系数  $\eta_k = \sigma_k^2 / \sigma^2$ 。综合(8)~(11)式, 可以得到总像差引起的  $\beta$  因子与各部分像差引起的  $\beta$  因子间的关系为

$$\beta^2 - 1 = A\sigma^2 = \sum_{k=1}^N A_k \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^N (\beta_k^2 - 1), \quad (12)$$

这是一个非常有用的关系式。如果各部分波像差引起的  $\beta$  因子均较大, 或总像差引起的  $\beta$  因子足够大, 衍射效应可以忽略, (12)式还可以进一步简化为

$$\beta^2 \approx \sum_{k=1}^N \beta_k^2, \quad (13)$$

这是一个在实际工作中更加有用的估算光束质量  $\beta$  因子的近似公式。它表明在小像差条件下, 光束质量  $\beta$  因子是衍射扩展效应和波像差几何扩展效应的综合。在大像差条件下, 孔径衍射效应可以忽略, 波像差的几何扩展效应起主要作用, 这时的光束质量  $\beta$  因子与波像差的均方根值成正比, 光学系统总光束质量  $\beta$  因子的平方可以近似根据各部分像差  $\beta$  因子的平方和得到。在应用(13)式时需要注意它的大像差限制条件, 否则需要用(12)式进行计算。

### 3 泽尼克像差与光束质量 $\beta$ 因子的关系

光学系统的波像差组成一般比较复杂。泽尼克多项式是一组定义在单位圆上的二维正交函数<sup>[9,10]</sup>。圆孔径上的任意像差  $\varphi$  都可以用泽尼克多项式来拟合

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k Z_k(r, \theta), \quad (14)$$

其中  $r$  表示极轴,  $\theta$  表示极角,  $a_k$  是泽尼克多项式系数,  $Z_k(r, \theta)$  是第  $k$  项泽尼克多项式

$$\begin{cases} Z_{\text{even}k}(r, \theta) = \sqrt{2(n+1)}R_n^m(r)\cos(m\theta) \\ Z_{\text{odd}k}(r, \theta) = \sqrt{2(n+1)}R_n^m(r)\sin(m\theta) \end{cases} \quad m \neq 0$$

$$Z_k(r, \theta) = \sqrt{n+1}R_n^0(r) \quad m = 0 \quad (15)$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s![(n+m)/2-s]![(n-m)/2-s]!} r^{(n-2s)}$$

其中角向频率数  $m$ , 径向频率数  $n$  满足关系

$$\begin{cases} m \leq n, \\ n - |m| = \text{even} \end{cases}$$

根据傅里叶光学原理, 通过傅里叶变换方法可以计算出波像差对应的远场光斑, 从而进一步分析波像差与  $\beta$  因子的关系。本文利用快速傅里叶变换 (FFT) 方法对 3~35 阶泽尼克像差分别计算了不同像差下的  $\beta$  因子, 并根据 (7) 式得到了各项泽尼克像差对应的系数, 如表 1 中所列。其中几个典型泽尼

克像差的计算结果如图 1, 图 2 所示。表 1 中拟合系数对应的波像差单位是波长。前 2 项泽尼克像差即整体倾斜不需要考虑, 并且具有相同的径向和角向空间频率仅方向不同的那些泽尼克项的拟合系数相同。

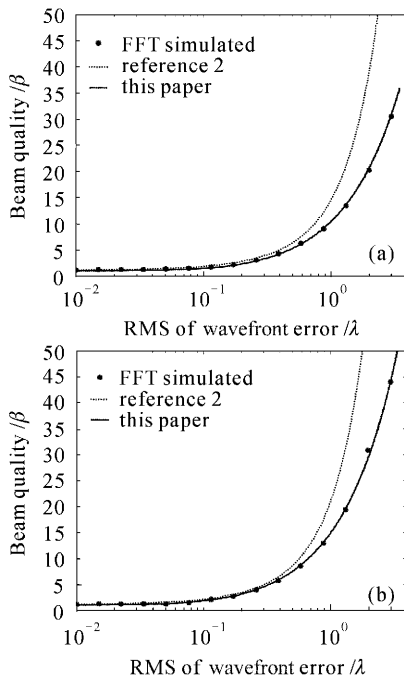


图 1 两个典型泽尼克像差 (a)  $k=3$  离焦, (b)  $k=6$  慧差的光束质量  $\beta$  因子与波像差均方根值的关系  
Fig. 1 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefornt RMS Zernike polynomials. (a)  $k=3$  defocus, (b)  $k=6$  coma

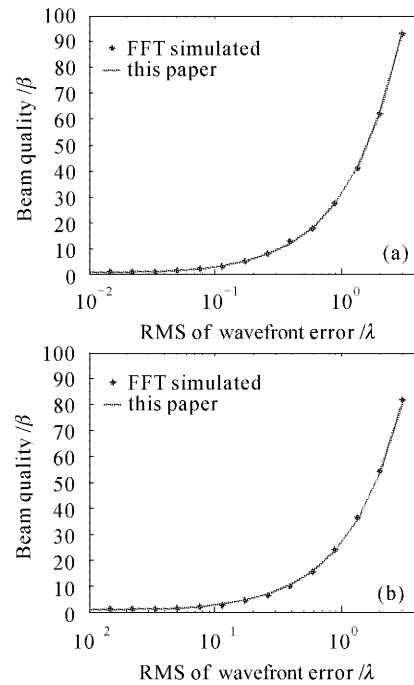


图 2 两个高阶泽尼克像差 (a)  $k=21$ , (b)  $k=34$  的光束质量  $\beta$  因子与波像差均方根值的关系  
Fig. 2 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefornt RMS of Zernike polynomials. (a)  $k=21$ , (b)  $k=34$

由图 1, 图 2 可见, 本文得到的近似计算公式在相当大的像差范围内都可以得到较精确的计算结果, 而根据文献[2]的近似计算公式得到的拟合结果

在波像差均方根值小于0.5波长时比较准确,随着波像差继续增大将存在较大的计算误差。因为各种泽尼克像差的径向和角向空间频率不同,所造成的光斑弥散程度不同,因此波像差与光束质量  $\beta$  因子的拟合系数值差异很大。大致趋势是泽尼克多项式阶数越高,拟合系数值越大。这意味着高空间频率像差对  $\beta$  因子的作用更加显著。在各种像差类型中,多项式阶数  $k=3, 10, 21$  等对应的球差类像差对  $\beta$  因子的影响尤其显著。

表1 各阶泽尼克多项式对应的光束质量  $\beta$  因子拟合系数及科尔莫哥诺夫大气湍流中各阶泽尼克多项式的方差

Table 1 Fitting coefficients  $A_k$  of beam quality  $\beta$  factor for Zernike polynomials and the variances of Zernike polynomials in atmosphere turbulence with Kolmogorov spectrum

Radial frequency	Azimuth frequency	Zernike order	Variances $C_k \times (D/r_0)^{5/3}$	Fitting coefficients $A_k$
$n$	$m$	$k$		
2	0	3	$2.32 \times 10^{-1}$	105.8
2	$\pm 2$	4, 5	$2.32 \times 10^{-1}$	54.2
3	$\pm 1$	6, 7	$6.19 \times 10^{-3}$	217.1
3	$\pm 3$	8, 9	$6.19 \times 10^{-3}$	129.5
4	0	10	$2.45 \times 10^{-3}$	702.6
4	$\pm 2$	11, 12	$2.45 \times 10^{-3}$	511.8
4	$\pm 4$	13, 14	$2.45 \times 10^{-3}$	238.9
5	$\pm 1$	15, 16	$1.19 \times 10^{-3}$	583.0
5	$\pm 3$	17, 18	$1.19 \times 10^{-3}$	676.1
5	$\pm 5$	19, 20	$1.19 \times 10^{-3}$	382.6
6	0	21	$6.55 \times 10^{-4}$	979.8
6	$\pm 2$	22, 23	$6.55 \times 10^{-4}$	626.4
6	$\pm 4$	24, 25	$6.55 \times 10^{-4}$	787.9
6	$\pm 6$	26, 27	$6.55 \times 10^{-4}$	547.4
7	$\pm 1$	28, 29	$3.93 \times 10^{-4}$	992.7
7	$\pm 3$	30, 31	$3.93 \times 10^{-4}$	732.3
7	$\pm 5$	32, 33	$3.93 \times 10^{-4}$	861.2
7	$\pm 7$	34, 35	$3.93 \times 10^{-4}$	725.3

大气湍流引起的波前像差畸变是一种典型的泽尼克组合像差,可以表示为各阶泽尼克像差的加权和。那么大气湍流畸变造成的光束质量  $\beta$  因子也与各阶泽尼克像差引起光束质量变化的加权和有关。对于符合科尔莫哥诺夫功率谱统计规律的大气湍流,各阶泽尼克像差的方差分布如表1所示<sup>[7,10]</sup>。不考虑整体倾斜时,科尔莫哥诺夫大气湍流造成的波像差的方差为

$$\sigma^2 = 0.134(D/r_0)^{5/3}, \quad (16)$$

其中  $D$  为光学系统直径,  $r_0$  为大气相干长度。注意这

里  $\sigma$  的单位是相位弧度,1 波长等于  $2\pi$  相位弧度。将表1中各阶泽尼克像差的拟合系数  $A_k$  乘以其在大气湍流畸变像差中的方差分布系数  $C_k$ , 加权求和后除以总的波像差方差就可以得到湍流畸变波前的  $\beta$  因子拟合系数。我们在计算总波像差方差时没有直接用(16)式,而是考虑到前3~35阶泽尼克像差占不包括整体倾斜的全部大气湍流波像差方差的约93%,即在(16)式基础上乘上这个系数。这样得到的近似关系式为

$$\beta^2 \approx 1 + 0.62(D/r_0)^{5/3}, \quad (17)$$

我们按表1的泽尼克多项式方差分布和文献[10]的方法产生了一组用泽尼克多项式表示的湍流畸变波前序列,并用快速傅里叶变换方法计算出每帧波像差对应的远场光斑和光束质量  $\beta$  因子,并与文献[2]和本文得到的拟合公式计算结果对比,其结果如图3所示。可以看出,文献[2]的拟合公式在湍流较强时计算结果偏大,而本文的拟合公式和仿真结果吻合得相当好。

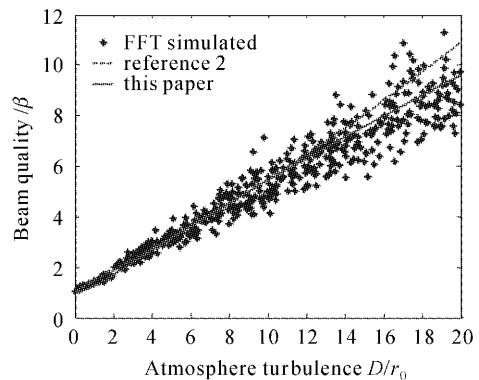


图3 科尔莫哥诺夫大气湍流畸变波像差与光束质量因子  $\beta$  的关系

Fig. 3 Relationship between beam quality  $\beta$  factor and wavefront RMS of atmosphere turbulence with Kolmogorov spectrum

需要说明的是,虽然本文是在实心圆口径条件下,采用83.8%环围能量定义的光束质量  $\beta$  因子基础上展开研究的,但研究方法不失一般性。如果光束非圆孔径,或孔径上存在遮拦,或采用其他的光束质量  $\beta$  因子定义方式,仍然可以用(7)式来拟合光束质量  $\beta$  因子与波像差的近似计算公式,只是得到的拟合系数会与本文不同。

## 4 结 论

分析了光学系统的波像差与对应的光束质量  $\beta$  因子间的关系,推导了根据波像差的均方根值估算

光束质量  $\beta$  因子的计算公式。研究表明,某种特定类型像差的均方根值大小与光束质量  $\beta$  因子间存在相对固定的拟合关系,如各阶泽尼克多项式像差。由各种单一类型像差随机组合得到的组合像差的均方根值大小与光束质量  $\beta$  因子间的关系由各部分单一类型像差在组合像差中所占成分比例统计结果的加权和决定,如大气湍流引起的波像差。本文用快速傅里叶变换数值计算方法建立了各种泽尼克多项式的波像差均方根值与  $\beta$  因子间的拟合关系式,并在此基础上建立了科尔莫哥诺夫大气湍流引起的波像差与对应光束质量  $\beta$  因子间的拟合关系式。数值计算结果验证了本文得到的拟合公式在很大的像差范围内都是成立的。

### 参 考 文 献

- 1 Du Xiangwan. Factors for evaluating beam quality of a real high power laser on the target surface in far field [J]. *Chinese J. Lasers*, 1997, **A24**(4): 327~332  
杜祥琬. 实际强激光远场靶面上光束质量的评价因素 [J]. *中国激光*, 1997, **A24**(4): 327~332
- 2 Xian Hao, Jiang Wenhan. The relation between wavefront aberration and beam quality factor [J]. *Chinese J. Lasers*, 1999, **A26**(5): 415~419  
鲜浩,姜文汉. 波像差与光束质量指标的关系 [J]. *中国激光*, 1999, **A26**(5): 415~419
- 3 Jiang Shaoen, Sun Jinwen. The effect of light beam quality  $\beta$  factor on thermal blooming [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 1993, **20**(3): 1~5  
江少恩,孙景文. 光束质量  $\beta$  因子对热晕的影响 [J]. *光电工程*, 1993, **20**(3): 1~5
- 4 M. R. Whiteley. Compensation efficiencies of conventional tracking and high-order beam control in extended turbulence [C]. *SPIE*, 2000, **4125**: 21~101
- 5 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. 7<sup>th</sup> edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 439~443
- 6 J. W. Goodman. Statistical Optics [M]. Beijing: Science Press, 1992. 331~346  
J. W. Goodman. 统计光学 [M]. 北京: 科学出版社, 1999. 331~346
- 7 J. W. Hardy. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes [M]. New York: Oxford University Press, 1998. 104~134
- 8 H. T. Yura. Short-term average optical-beam spread in a turbulent medium [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1973, **63**(5): 567~572
- 9 R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1977, **67**(8): 1065~1072
- 10 N. Roddier. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials [J]. *Optical Engineering*, 1990, **29**(10): 1174~1180