

文章编号: 0258-7025(2005)06-0782-05

大剪切量干涉的二维波前重建

曾 新, 梁佩莹, 丁剑平*

(南京大学物理系, 江苏 南京 210093)

摘要 提出一种基于模式展开和最小二乘拟合的算法, 可以从大剪切量差分波前快捷地重建原始的二维波前。在傅里叶模式展开理论的基础上, 从横向剪切干涉获得的差分波前, 通过最小二乘拟合, 可以计算出待测波前的傅里叶变换系数, 重建出原始波前。针对大剪切量带来的差分相位数据维数减小的问题, 提出了数据预处理方法。这个算法解决了已有的傅里叶模式估计理论中要求剪切量等于采样间隔的限制, 可以应用于大剪切量干涉条件下的二维波前重建。

关键词 傅里叶光学; 剪切干涉; 波前重建; 傅里叶变换

中图分类号 TN247 **文献标识码** A

Two-Dimensional Wavefront Reconstruction of Shearing Interferograms with Big Shears

ZENG Xin, LIANG Pei-ying, DING Jian-ping

(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210093, China)

Abstract A novel technique is proposed based on Fourier modal expansion and least-square fitting to reconstruct a two-dimensional wavefront from phase difference resulting from large shear. By using Fourier expansion, the Fourier coefficients of two-dimensional wavefront are computed from two one-dimensional difference wavefronts which are acquired by shearing interferometer. A recipe for data pre-processing is presented to solve information leakage resulting from large shear. This technique is applicable to situation where the shear amount is larger than one sampling interval, and can alleviate the limitation on the shear amount imposed by conventional algorithm. Investigation into the influences of shear amount and noise level on reconstruction accuracy is made.

Key words Fourier optics; shearing interferometry; wavefront reconstruction; Fourier transform

1 引 言

在横向剪切干涉测量中, 从相互垂直方向上的剪切干涉图获得的差分波前可以恢复待测的二维波前^[1~11]。已有的二维波前重建算法中, 泽尼克多项式拟合是最常用的一种技术^[2,3]。对于透镜的波面检测, 泽尼克多项式是精确有效的算法, 因为只需要取有限项多项式即可拟合待测波面, 例如泽尼克多项式的前 15 项已经包含了透镜的 1 级和 2 级像差, 因此通常的透镜只需要 15 项多项式进行计算, 计算量不大。但是对于复杂光学元件, 如光刻制作的二元光学元件, 复杂的波面要在大量的多项式基底上展开, 所要求的大计算工作量和长计算时间使得泽尼克多项式拟合方法不适合于复杂光学元件的干涉

测量。K. R. Freischlad 等^[5]曾提出了基于傅里叶级数展开的方法, 可以用于复杂波面的检测。利用快速傅里叶算法, 计算过程快速简捷, 但这种方法要求剪切量 s 等于采样间隔, 因而限制了该技术的应用范围^[6]。例如对于采样点数为 256 的波面数据, 剪切量为 1 这样小的剪切量对于绝大多数剪切干涉装置是困难的。

本文提出了一种基于傅里叶基函数展开的大剪切量二维波前重建方案。从两个垂直方向上的差分波前出发, 通过傅里叶变换计算出待测波前在 x 和 y 方向的估计分布, 再利用最小二乘法, 可以精确地恢复出待测波前。该算法对剪切量的唯一要求是剪切量能够整除采样点数。

收稿日期: 2004-05-19; 收到修改稿日期: 2004-10-21

基金项目: 国家自然科学基金(10474043)资助项目。

作者简介: 曾 新(1978—), 男, 南京大学物理系光学专业硕士研究生, 主要从事光学干涉计量方面的研究。

* 通信联系人。E-mail: jpding@nju.edu.cn

2 原 理

对于一个离散化表示的波前 $\varphi(m, n)$, 其中 $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1, N$ 为沿 x 或 y 方向采样的单元总数, 总是可以利用一套完备正交的基模函数 $Z_{pq}(m, n)$ 将它展开成下列形式

$$\varphi(m, n) = \sum a_{pq} Z_{pq}(m, n), \quad (1)$$

如果已知系数 a_{pq} , 则原函数 $\varphi(m, n)$ 可以被重构出来。如果选取复幂指数函数作为上述模式展开的基函数, 即

$$Z_{pq}(m, n) = \frac{1}{N} \exp\left[\frac{i2\pi}{N}(pm + qn)\right], \\ p, q = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

则(1)式的模式展开形式实际成为二维的离散傅里叶变换, 而系数 a_{pq} 成为波前 $\varphi(m, n)$ 的傅里叶展开系数。

在横向剪切干涉测量中, 通过相移技术或者傅里叶变换条纹图方法可以获得待测波前 $\varphi(m, n)$ 分别沿 x 和 y 方向剪切后的差分波前 $D_x(m, n)$ 和 $D_y(m, n)$ 。 $D_x(m, n)$ 和 $D_y(m, n)$ 与 $\varphi(m, n)$ 的理论关系是

$$D_x(m, n) = \varphi(m, n) - \varphi(m-s, n), \quad (3)$$

$$D_y(m, n) = \varphi(m, n) - \varphi(m, n-s), \quad (4)$$

其中 s 是剪切量。那么, $D_x(m, n)$ 和 $D_y(m, n)$ 的模式展开表示为

$$D_x(m, n) = \sum a_{pq} Z_{pq}(m, n) \left[1 - \exp\left(\frac{i2\pi ps}{N}\right)\right], \quad (5)$$

$$D_y(m, n) = \sum a_{pq} Z_{pq}(m, n) \left[1 - \exp\left(\frac{i2\pi qs}{N}\right)\right], \quad (6)$$

用 $D'_x(m, n)$ 和 $D'_y(m, n)$ 表示实际干涉测量值, 与理论表示值 $D_x(m, n), D_y(m, n)$ 的偏差被定义为

$$F = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \{ [D'_x(m, n) - D_x(m, n)]^2 + [D'_y(m, n) - D_y(m, n)]^2 \}, \quad (7)$$

显然, 待测的真实波前所生成的差分分布应该最接近于测量的差分值。依据最小二乘法原理, 当 F 取最小值时, 可调参数 a_{pq} 最接近于待测波前函数的傅里叶展开式系数。 F 的极小值条件为

$$\partial F / \partial a_{pq} = 0, \quad (8)$$

将(5)式, (6)式代入(7)式, 通过方程(8)推导可得

$$a_{pq} = \frac{1}{4[\sin^2(\pi ps/N) + \sin^2(\pi qs/N)]} \times \\ \left\{ \left[1 - \exp\left(\frac{i2\pi ps}{N}\right)\right] \cdot FT_{pq}\{D'_x(m, n)\} + \left[1 - \exp\left(\frac{i2\pi qs}{N}\right)\right] FT_{pq}\{D'_y(m, n)\} \right\}, \quad (9)$$

其中 $FT_{pq}\{\}$ 表示对 $D'_i(m, n)$ ($i = x, y$) 作二维离散傅里叶变换, p 和 q 为傅里叶频谱空间的频率变量。只要能够求得差分相位的频谱, 就可由(9)式求出傅里叶系数 a_{pq} , 代入(1)式和(2)式计算逆傅里叶变换, 从而重建出待测的波前函数 $\varphi(m, n)$ 。Freischlad 等^[5] 已提出了上述思想, 但他们的算法中有限制条件, 即 $s = 1$ 。我们研究认为, 如果满足一定的条件, (9)式中的剪切量 s 可以大于 1, 而且可以允许相当大。下面的分析将给出对这一问题的具体解决方案。

(9)式表明, $s > 1$ 时, 在 ps/N 和 qs/N 同时为整数时的空间频率 p 和 q 上, 其分母为零, 傅里叶频谱 a_{pq} 在这些频率处无法算出。对于这些缺失的频谱, 一种处理方法是将这些频率处的频谱置为零值^[12], 当剪切量 s 不大时, 去除的频谱值较少, 对波

前重构的影响不大。但是当剪切量较大时, 误差比较显著。因此在大剪切量的场合下, 频谱值置零是不合适的。我们采用的频谱插补方法是: 考虑到绝大部分情况下物波的频谱是连续分布的, 可以用邻近位置的频谱的平均值代替该处的频谱值。这样处理的优点是, 即使剪切量较大时, 误差仍可控制在较低水平上, 后面的数值结果验证了这个结论。

在(9)式的计算中, 波前差分值是通过测量获得的数据。实际上, 如果待测波前是分布在由 $m \in [0, N-1]$ 和 $n \in [0, N-1]$ 规定的区域内, 差分波前 $D_x(m, n)$ 的取值只能在 $m \in [s, N-1]$ 和 $n \in [0, N-1]$ 的矩形范围内。因此在利用(1)式重建 $N \times N$ 个波前函数值 $\varphi(m, n)$ 的傅里叶变换运算中, 缺少了 $N \times s$ 个差分数据, 对 $D_y(m, n)$ 有同样的限制。为解决这个差分数据维数减少的问题, 可以

设想将待测波前在二维平面上沿 x 和 y 方向进行周期性延拓,这样,如果数据的维数为剪切量的整数倍时,可以得到下列关系式^[13]

$$\sum_{p=0}^{N/s-1} D_x(m+ps, n) = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{q=0}^{N/s-1} D_y(m, n+qs) = 0, \quad (11)$$

这样,未知的差分数据可通过下式进行补充

$$D_x(m, n) = -\sum_{p=1}^{N/s-1} D_x(m+ps, n), \quad (12)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, s-1; n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$D_y(m, n) = -\sum_{q=1}^{N/s-1} D_y(m, n+qs), \quad (13)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, s-1; m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

从而得到了 $N \times N$ 个离散化的差分波前值,可以满足算法的实际要求。

3 波前重建的数值结果

目前还没有现成的剪切干涉实验数据可用,为了检验本文提出的理论的可行性和准确性,采取了数值

实验的方法,通过模拟剪切干涉数据,评价该算法的性能。数值模拟实验具有灵活多变性,可以模拟一些极端条件下的数据(如大强度噪声和大剪切量干涉),可以分析该算法在恶劣条件下的表现。

选取一个函数 $\varphi(x, y) = -\sqrt{5}[(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) + 1/6] + 3xy + x$ [三维取值分布如图 1(a) 所示]作为相位分布进行波前重建的数值模拟,该函数中包含了离焦、球差、像散和倾斜等像差分布,在 $x \in [-1, 1]$ 和 $y \in [-1, 1]$ 的定义域内被采样为 256×256 个数据阵列。剪切量为 $s=32$ 模拟得到的差分相位分布如图 1(b) 和 (c) 所示,相比于原始相位分布的维数,模拟的剪切数据分别减少了 32 行或 32 列。为便于仍然在 256×256 的区间上图示,将缺少的数据区用零值进行了填补。在进行重建前,按照 (12) 式和 (13) 式对差分数据进行延拓补值,使差分数据的维数保持为 256×256 。图 1(d) 是从差分波前恢复出的原始波前。此例中剪切量的大小相当于整个数据的八分之一,剪切量较大,但重建的波前分布仍然精确地再现出原始函数,证明本文提出的算法可以适用剪切量较大场合下的波前重建。

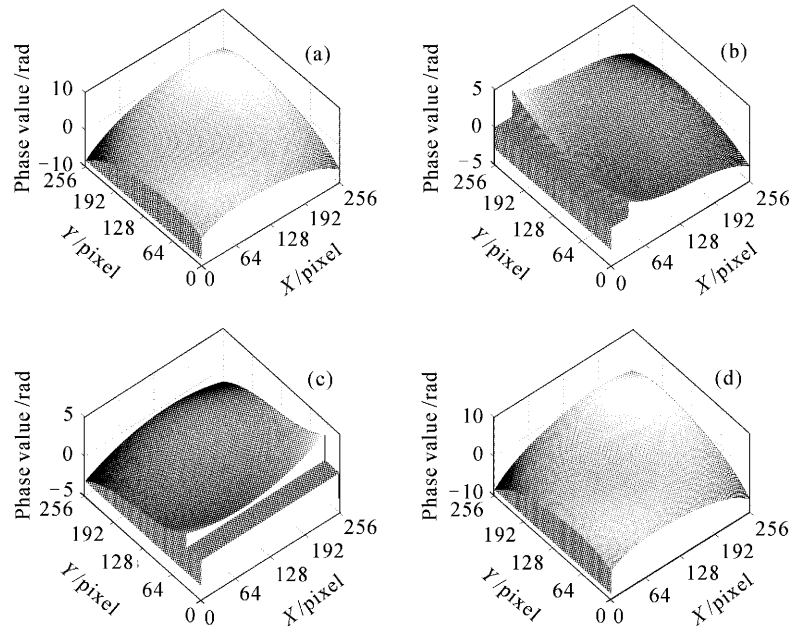


图 1 相位分布函数 $\varphi(x, y) = -\sqrt{5}[(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) + 1/6] + 3xy + x$ 的重建
(a) 原函数; (b) x 方向的差分相位分布; (c) y 方向的差分相位分布; (d) 再现的相位分布

Fig. 1 Reconstruction of a phase function $\varphi(x, y) = -\sqrt{5}[(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) + 1/6] + 3xy + x$
(a) Original phase function; (b) x -directional phase difference distribution; (c) y -directional phase difference distribution; (d) reconstructed phase distribution

为了考察剪切量的大小对重建精度的影响,选取了一系列不同剪切量的差分波前,进行波前重建。

表 1 给出了不同剪切量下的重建函数与原函数的均方差和偏差的峰谷值 ($P-V$ 值)。显然,随着剪切量

的增加,再现误差也在增加。原函数的取值在 $[-9, 2]$ 之间,如果将该取值的动态范围等效于 2π ,表格中的数据说明,在这个例子里,剪切量为 32 时的重建均方差 σ 在理论上相当于 $<\lambda/10000$, $P-V$ 值 $<\lambda/100$ 。实际上,对多种其他函数进行的数值实验都得到了类似的结果。因此对于剪切量较大的情形,提出算法的精度是比较高的。

由(3),(4)式可知,本质上差分值的维数要小于

表 1 再现的相位函数与原函数的均方差 σ 及 $P-V$ 偏差值随剪切量 s 的变化情况

Table 1 Root mean square σ and $P-V$ (peak-to-valley) value of deviation of the reconstructed to the original function versus shear amount s

| s | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| σ | 8.13×10^{-4} | 8.13×10^{-4} | 8.13×10^{-4} | 8.13×10^{-4} | 8.15×10^{-4} | 8.40×10^{-4} | 1.12×10^{-3} |
| $P-V$ | 5.00×10^{-7} | 3.47×10^{-4} | 1.39×10^{-3} | 5.57×10^{-3} | 8.95×10^{-2} | 3.68×10^{-1} | 1.51 |

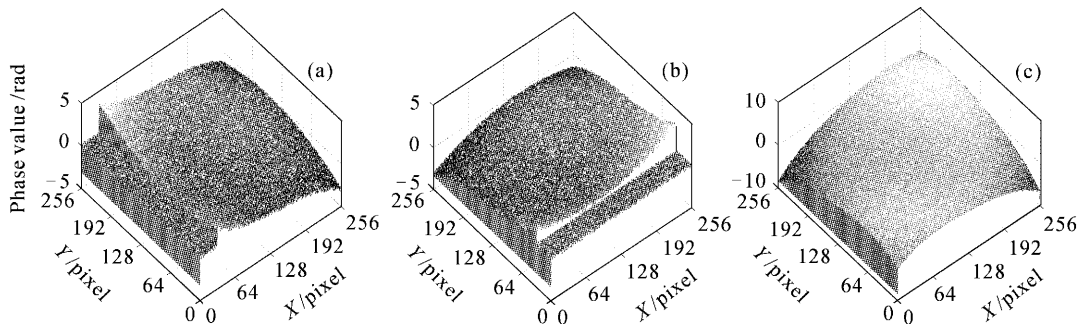


图 2 含均匀分布随机噪声的差分相位分布(随机噪声的标准差与信号绝对值的平均值的比为 0.40)

(a) x 方向的差分相位分布; (b) y 方向的差分相位分布; (c) 再现出的相位分布

Fig. 2 Phase difference corrupted by uniformly random noise; standard deviation of noise is 40% of average absolute value of phase difference

(a) x -directional phase difference distribution; (b) y -directional phase difference distribution; (c) reconstructed phase distribution

干涉测量中获得的差分相位不可避免地含有一定程度的噪声,会影响波前重建精度。为了研究该算法对噪声的敏感性,在差分相位上加上了强度不同的模拟随机噪声,噪声模型为均匀的随机分布。

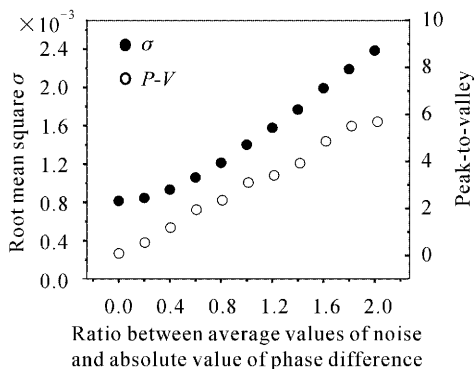


图 3 波前重建误差随噪声强度的变化关系

Fig. 3 Deviation of the reconstructed phase to the original phase versus strength of noise

原始待测波前的维数,重建时的信息并不完全,因此从差分波前重构待测波前会产生误差。显然剪切量越大,缺失的信息越多,因而重建精度会有所降低,表 1 的结果反映了这种性质。但是在我们进行的多种波前重建的数值实验中,如果剪切量不大于原始波前的八分之一,则 $P-V$ 值 $<\lambda/100$,这是在绝大多数干涉计量中能够接受的精度要求。

图 2 给出了噪声强度的均值为差分信号强度的 40% 时的波前重建结果,数值结果表明,该算法对噪声有很好的抵抗能力。

图 3 给出了重建误差随噪声变化的情况,显然随着噪声的增加,波前重建的误差也大致成线性增大,这是因为施加的是相加性噪声(即非相干性的白噪声),所以误差基本上仅决定于噪声的大小。如果有相干性噪声如探测器的非线性响应等,则噪声与重建误差之间可能呈非线性关系,但是随噪声增强,误差总是呈增大的趋势。

4 结 论

原有的基于傅里叶模式分解的二维剪切波面重建算法只允许剪切量等于采样间隔的剪切干涉图,本文提出的新算法解决了这个困难。数值模拟结果表明,提出的算法可以精确地重建二维波前,即使剪

切量较大时,再现误差仍然相当小,并且该方法对噪声有较强的免疫力。本项工作有助于推动二维剪切波面的傅里叶模式重建算法在实际剪切干涉测量中获得更广泛的应用。我们正在建设双光栅剪切干涉系统,希望用于微光学元件的显微干涉测量。理论研究为正在进行的实验工作打下了基础。

参 考 文 献

- 1 L. Erdmann, R. Kowarschik. Testing of refractive silicon microlenses by use of a lateral shearing interferometer in transmission [J]. *Appl. Opt.*, 1998, **37**(4): 676~682
- 2 H. Sickinger, O. Falkenstörfer, N. Lindlein *et al.*. Characterization of microlenses using a phase-shifting shearing interferometer [J]. *Opt. Eng.*, 1994, **33**(8): 2680~2686
- 3 G. Harbers, P. J. Kunst, G. W. R. Leibbrandt. Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials [J]. *Appl. Opt.*, 1996, **35**(31): 6162~6172
- 4 X. Tian, M. Itoh, T. Yatagai. Simple algorithm for large-grid phase reconstruction of lateral-shearing interferometry [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(31): 7213~7220
- 5 K. R. Freischlad, C. L. Koliopoulos. Modal estimation of wave front from difference measurements using the discrete Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986, **3**(11): 1852~1861
- 6 C. Elster, I. Weingartner. Exact wave-front reconstruction from two lateral shearing interferograms [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1999, **16**(9): 2281~2285
- 7 Bai Jian, Yang Guoguang. Infinite element model for the reconstruction of two-dimensional shearing wavefront [J]. *Acta Optica Sinica*, 1998, **18**(6): 726~731
白 剑,杨国光. 二维剪切波面重建的有限元模型 [J]. 光学学报, 1998, **18**(6): 726~731
- 8 Luan Zhu, Liu Liren, Liu Dean *et al.*. Double-shearing wavefront testing [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(10): 1417~1420
栾 竹,刘立人,刘德安 等. 剪切波面干涉测量方法 [J]. 光学学报, 2004, **24**(10): 1417~1420
- 9 Chen Bingquan. Study of stroboscopic shearing speckle interferometry [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(11): 1566~1570
陈炳泉. 频闪剪切散斑干涉术的研究 [J]. 光学学报, 2004, **24**(11): 1566~1570
- 10 Li Dahai, Chen Huaixin, Chen Zhenbei *et al.*. Algorithm and accuracy study of wavefront reconstruction with different amplification ratio based on the cyclic radial shearing interferometer [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(6): 503~508
李大海,陈怀新,陈祯培 等. 径向剪切干涉波前重建算法和不同倍数下重建精度的研究 [J]. 中国激光, 2002, **A29**(6): 503~508
- 11 Fu Lei, Xing Jianguo, Shi Hongming *et al.*. Optical-path-splitting 2-D shearing interferometer system for deformation study of high power laser resonator mirrors [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(12): 1667~1674
傅 雷,辛建国,史红民 等. 分光路二维剪切干涉强激光腔镜变形检测系统 [J]. 光学学报, 2000, **20**(12): 1667~1674
- 12 Xu Wendong, Xie Yuanying, Li Xishan. A new method for recovering the original wave-front in lateral-shearing interferometry [J]. *Chinese J. Lasers*, 1999, **A26**(11): 982~986
徐文东,谢元营,李锡善. 恢复横向剪切干涉原始波面的新方法 [J]. 中国激光, 1999, **A26**(11): 982~986
- 13 Xu Xianjun, Lu Qisheng, Jiang Zongfu *et al.*. Mathematics and numerical simulation of shear interference with prolongation of wavefront [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(2): 214~218
许晓军,陆启生,姜宗福 等. 波前延拓剪切干涉的数学原理和数值模拟 [J]. 光学学报, 2000, **20**(2): 214~218