

文章编号: 0258-7025(2005)03-0336-05

# 基于小波分析的光栅信号质量评估方法

王远干, 喻洪麟, 黄良明

(重庆大学光电技术及系统国家教育部重点实验室, 重庆 400044)

**摘要** 依据谐波分析法给出的评定信号质量指标的准则, 提出了基于小波分析的光栅信号质量评估方法, 并讨论了此方法的特征与优点。与谐波分析法相比较, 小波分析在时域和频域同时具有良好的局部化性质, 每次小波变换所取的都是原信号的最大可能近似值, 信号的失真度小, 通过变更尺度, 可以对信号更细微的瞬态特征进行研究, 并最大可能地除去噪声, 较快地得到理想的质量评定效果(通常只需 3 至 5 次变换即可)。在此基础上, 给出了相应的小波分析评定光栅信号质量的实验方法。

**关键词** 衍射与光栅; 谐波分析; 质量评估; 小波分析; 小波脊线

**中图分类号** TP 212 **文献标识码** A

## Grating Signal Quality Assessment Based on Wavelet Analysis

WANG Yuan-gan, YU Hong-lin, HUANG Liang-ming

(Key Laboratory of Opto-Electronic Technology and System,  
Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract** On the basis of the signal quality standard given by the harmonic analysis method, an quality assessment of grating signal based on wavelet analysis is put forward and its characteristics are discussed. Compared with the harmonic analysis method, wavelet analysis characterize its local excellence both in time and frequency domain for every time of the wavelet transformation, with the wavelet analysis method the transient characteristic of the grating signal can be analyzed more subtly by changing the scale, and all possible noise can be filtered. The most possible approximation of the original signal and the least signal distortion are get with three to five times transformation, the ideal result is then quickly obtained. The corresponding experiment of grating signal quality assessment is given with wavelet analysis.

**Key words** diffraction and gratings; harmonic analysis; quality assessment; wavelet analysis; wavelet ridge

## 1 引 言

对光栅信号质量进行综合评定的常用方法是谐波分析法<sup>[1]</sup>, 它能够给出光栅信号质量全部评定指标的综合测试结果。小波分析是近几年来飞速发展的数学方法, 它已成功地应用到了工程中的许多领域。小波变换是在傅里叶变换的基础上发展起来的, 它是空间(时间)和空频域(频率)的局部变换, 因而能有效地从光学信号中提取信息, 通过伸缩和平移等运算功能对光学信号进行多尺度细化分析, 信号将代之以相应尺度上所能提取到的最可能的近似

值, 通过从大尺度到精细尺度的移动, 获得对信号越来越精确的描述, 解决了傅里叶变换不能解决的许多困难问题。国外已有较多用小波变换进行光学信号处理及相位检测的报道<sup>[2~5]</sup>, 文献中采用直接从时间-尺度表征中提取信号幅值、相位等有用信息, 或构造谐波小波变换, 从变换中获取原始信号的特征信息。本文从小波系数的幅角参数中提取小波脊线, 再由小波脊线提取信号的瞬时特征量, 该方法可准确地提取分析信号瞬时特性。

文中提出了一种新的基于小波分析的光栅信号质量评估方法, 并从理论上进行了详细推导, 最后也

收稿日期: 2003-09-30; 收到修改稿日期: 2004-06-10

基金项目: 国家自然科学基金(50079032)资助项目。

作者简介: 王远干(1974—), 男, 广西人, 重庆大学硕士研究生, 主要从事小波及分数傅里叶光学方面的研究。E-mail: wangyuangan@tom.com

给出了小波分析的实验方法,并将实验结果与传统的谐波分析法进行了比较,可以得出用小波分析法评定光栅信号的质量具有其优点。

## 2 谐波分析法

由光栅莫尔原理可知,光栅输出的光电信号  $f(x)$  为周期信号,所以  $f(x)$  可展开成如下傅里叶级数

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

式中的各系数  $a_0, a_n, b_n$  由下式确定

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases} \quad (2)$$

另外(1)式可写成

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n), \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n} \end{cases} \quad (4)$$

谐波分析法的主要原理就是应用各次谐波幅值  $A_n$  和相位角  $\varphi_n$  来对信号的各项指标进行评定。依据  $A_i, \varphi_i$  便可对光栅信号和质量进行评估,具体评估方法如下:

1) 标尺光栅全量程范围内值的变动情况,可表征莫尔条纹信号直流电平漂移;

2)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为莫尔条纹信号中各次谐波的幅值,对多相输出信号,其中各相信号的  $A_1$  之间的差别,表征多相信号的等幅性;

3)  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  为莫尔条纹信号中各次谐波的相角,对多相输出信号,相邻两信号的  $\varphi_i$  相角之差偏离要求值的数值,可用来表征多相信号的正交性;

4)  $A_2, A_3, \dots, A_n$  与基波  $A_1$  的比值,可用来表征信号中各次谐波的含量;

5) 以上数值在标尺光栅范围内的变动情况,可对信号质量的稳定程度作出估计。

## 3 小波分析法的基本原理

利用光栅信号质量谐波分析测定法来评定信号质量,最主要的是要求出各次谐波幅值  $A_i$  及相位

$\varphi_i$ 。若利用小波分析在时域和频域同时具有良好的局部化性质的特点,就能对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长,从而可以聚焦到对象的任意细节,求出更细微的各次谐波的幅值  $A_i$  及相位  $\varphi_i$ ,从而能对光栅信号的质量进行更细致的评定,提高光栅信号质量的评定精度。

小波是函数空间  $L^2(R)$  中满足下述条件的一个函数或者信号  $\psi(x)$ <sup>[6]</sup>

$$C_\psi = \int_{R^*} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (5)$$

式中  $R^* = R - \{0\}$  表示非零实数全体,  $\hat{\psi}(\omega)$  为  $\psi(x)$  的傅里叶变换,  $\psi(x)$  常称为小波母函数<sup>[7]</sup>。称如下形式的函数为小波函数,简称小波

$$\psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (6)$$

定义小波变换

$$W_f(a,b) = \int_{R^*} f(x) \overline{\psi_{(a,b)}(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{R^*} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx. \quad (7)$$

定义小波反变换

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \iint_{R^* \times R^*} W_f(a,b) \psi_{(a,b)}(x) \frac{da db}{a^2}. \quad (8)$$

设  $g, h \in H^2(R)$ , 它们满足

$$0 < |C_{g,h}| = \left| \frac{\int_0^{+\infty} \hat{g}^*(\omega) \hat{h}(\omega)}{\omega} \right| < +\infty, \quad (9)$$

这里  $H^2(R) = \{f \in L^2(R), f(\omega) = 0, \text{if } \omega \leq 0\}$  为实 Hardy 空间<sup>[8]</sup>。  $g$  为分析小波,  $h$  为重构小波。记由伸缩和平移构成的小波基为

$$\begin{cases} g_{b,a}(t) = \frac{1}{a} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \\ h_{b,a}(t) = \frac{1}{a} h\left(\frac{t-b}{a}\right) \end{cases}, \quad (10)$$

记瞬时小波变换为

$$T_s(b,a) = \langle s, g_{b,a} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{b,a}^*(t) dt, \quad (11)$$

$T_s(b,a)$  为小波系数,  $g_{b,a}^*$  为  $g_{b,a}$  的共轭。则信号由小波系数得到的时间尺度可表征为<sup>[9]</sup>

$$s = \frac{1}{C_\psi} \cdot \left[ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_s(b,a) \psi_{b,a} da db \right] \cdot a^{-1}, \quad (12)$$

小波系数可以用幅值和相位表示为

$$T_s(b,a) = \{ |T_s(b,a)|, \varphi_s(b,a) = \arg[T_s(b,a)] \}. \quad (13)$$

下面求其各级小波系数对应的单频信号的频率  $\nu_s(b,a)$ 。

设任一单频信号为  $s(t) = A(t) \cos \varphi(t)$ 。利用希

尔伯特变换<sup>[10]</sup> 得到其解析信号为

$$Z_s(t) = (1 + jH)s(t) = A_s(t)\exp[j\varphi_s(t)], \quad (14)$$

则有

$$\langle s, g_{b,a} \rangle = \langle Z_s, g_{b,a} \rangle, \quad (15)$$

由式(11), (14), (15)可得信号的渐近小波系数为

$$\begin{cases} T_s(b, a) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} M_{b,a}(t) \exp[j\varphi_s(b, a)(t)] dt \\ M_{b,a}(t) = A_s(t) A_g^* \left( \frac{t-b}{a} \right) \\ \varphi_s(b, a)(t) = \varphi_s(t) - \varphi_g \left( \frac{t-b}{a} \right) \end{cases}. \quad (16)$$

若  $\varphi_s(b, a)(t)$  关于  $t$  只有一个一阶驻点  $t_s = t_s(b, a)$ , 并且  $\varphi'_s(b, a) = 0, \varphi''_s(b, a) \neq 0$ . 则  $T_s(b, a)$  的渐近展开可以记为<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} T_s(b, a) = \frac{Z_s(t_s) g^* \left( \frac{t_s-b}{a} \right)}{\text{Corr}(b, a)} \\ \text{Corr}(b, a) = \frac{2/\pi a^2 |\varphi''_{b,a}(t_s)| \times \exp\{-j\pi/4 \text{sgn}[\varphi''_{b,a}(t_s)]\}} \end{cases}, \quad (17)$$

定义小波脊线

$$R = \{(b, a) \in H^2(R), t_s(b, a) = b\}, \quad (18)$$

在小波脊线上有

$$\varphi'_{b,a}(t_s) |_{b=a} = 0, \varphi'_g(0)/\varphi'_s(0) = a_r(b), \quad (19)$$

因此小波脊线可以由  $a_r(b)$  来表示, 它代表了信号的瞬时频率。

小波脊线上的那部分小波系数为<sup>[12]</sup>

$$T_s[b, a_r(b)] = \{g(0)/\text{Corr}[b, a_r(b)]\} Z_s(b), \quad (20)$$

当小波脊线  $a_r(b)$  提取出来以后, 由小波系数  $T_s[b, a_r(b)]$  可得到原始信号, 从而可得信号的频率为

$$\nu_s(b) = \frac{1}{2\pi} \varphi'_s(b) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi'_g(0)}{a_r(b)}, \quad (21)$$

所以由式(11), (13), (21) 就可以得到式(8) 中组成信号  $f(x)$  的各级子波的幅值、频率及相位。与(4) 式对应有

$$\begin{cases} A_s(b) = |T_s[b, a_r(b)] \text{Corr}[b, a_r(b)]/g^*(0)| \\ \varphi_s(b, a) = \arg[T_s(b, a)] = \arg \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{b,a}^*(t) dt \right] \end{cases}, \quad (22)$$

从而依据信号质量评定标准就可以对光栅信号的质量进行评定。

对如何求得各级小波系数作了理论上的分析, 而具体求(11)中的小波系数可用 Mallat 算法<sup>[13]</sup>, 选

定  $V_m, \varphi$ , 且  $\varphi_{0n}$  是规范正交的,  $\{\psi_{nm}; m, n \in Z\}$  也是规范正交的。对于  $c^0 = (c_n^0)_n \in l^2(Z)$ <sup>[14]</sup>, 令

$$f = \sum_n c_n^0 \varphi_{0n}, \quad (23)$$

则  $f$  可以用多分辨率分析工具计算它的近似信息  $P_h f$  和差别信息  $Q_h f$ 。由于  $V_0 = V_1 + W_1$ ,  $f$  可以分解成  $V_1$  和  $W_1$  中的元素

$$f = P_1 f + Q_1 f, \quad (24)$$

它们可以用规范正交基展开

$$\begin{cases} P_1 f = \sum_k c_k^1 \varphi_{1k} \\ Q_1 f = \sum_k d_k^1 \psi_{1k} \end{cases}, \quad (25)$$

上述过程可以进行任意次, 第  $h$  次可表示为

$$P_{h-1} f = P_h f + Q_h f = \sum_k c_k^h \varphi_{h,k} + \sum_k d_k^h \psi_{h,k}, \quad (26)$$

其中  $c^h$  表示的是原始信号的低频成分,  $d^h$  表示的是原始信号的高频成分。

综合(24) ~ (26) 式就可以得到原始信号  $f(x)$  的分解表达式。也就是说利用  $c^h$  及  $d^h$  ( $h = 1, 2, \dots, \infty$ ) 就可以了解原信号的各个频率成分的谐波信号含量, 对原始信号各个频率特征进行分析, 从而达到对光栅信号的质量进行评定。

## 4 光栅信号评定方法对比实验

设测得的光栅信号为

$$S_1(x) = \sin(x) + \text{sawtooth}(10x) + \text{pulstran}(1000x), \quad (27)$$

其中  $\sin(x)$  可视为是理想的正弦光栅信号,  $\text{sawtooth}(10x)$  是由于振动而产生的锯齿波信号,  $\text{pulstran}(1000x)$  为频率 1 kHz, 带宽为 1 的高斯噪声。在实验中, 求得信号  $S_1(x)$  的各级小波系数  $c^h$  和  $d^h$  如图 1 所示, 其中  $d_1, d_2, d_3, d_4$  为每次小波分解求得的高频系数,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为每次小波分解去掉高频系数后得到的低频成分。

同样可将信号  $S_1(x)$  作快速傅里叶变换 (FFT), 并进行频谱分析<sup>[15]</sup>, 得到的各次谐波的幅值、含量如图 2 所示。图中给出了基波 ( $S_1$ ) 和六次谐波 ( $S_2, \dots, S_7$ ), 从图可以看出  $S_1$  及  $S_2$  的含量大, 且各次谐波下降趋势较为缓慢。对小波变换而言, 每次变换所取的都是原信号的最大可能近似值, 并最大可能地除去噪声, 信号的失真度小, 去噪速度快。从图 1 中可看出只需作 4 次小波变换就可以较好地去掉高频噪声, 得到的  $c_4$  已接近理想的正弦光栅信号, 且 4 次谐波  $d_4$  的含量已很少。

又取

$$S_2(x) = \cos(x) + \text{sawtooth}(10x) + \text{pulstran}(1000x), \quad (28)$$

则  $S_1(x)$  与  $S_2(x)$  为两个带有相同噪声且相位差为  $90^\circ$  的信号。现对  $S_1(x)$  与  $S_2(x)$  分别作小波变换与快速傅里叶变换,对两种方法保持信号的正交性作

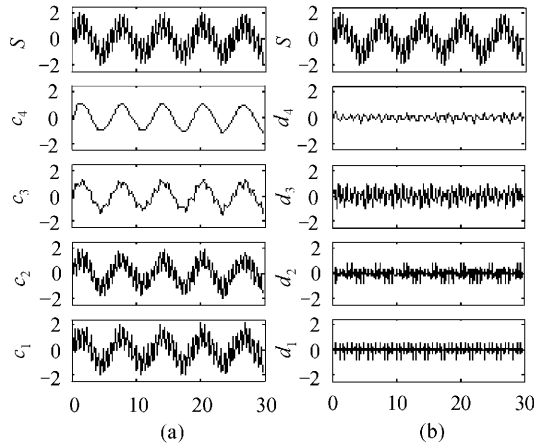


图 1 信号各级小波系数分解图

(a) 原信号及各级低频部分; (b) 原信号及各级高频部分

Fig. 1 Levels decomposed wavelet coefficients of the signal

(a) original signal and all levels of the low frequency;  
(b) original signal and all levels of the high frequency

比较。表 1 记录了  $S_1(x)$  与  $S_2(x)$  作快速傅里叶变换后得到的各次谐波的相位,从表中可得出,信号作小波变换后  $S_1(x)$  与  $S_2(x)$  的各次谐波信号的相位差在  $90^\circ$  左右,而作快速傅里叶变换后得到的各次谐波的相位差在  $90^\circ$  左右波动较大。因为每次小波变换滤去的都是高频的信号,对低频原始信号  $\sin(x)$  及  $\cos(x)$  基本上是全额保留的,所以  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$  分解后得到的低频信号  $c_1, c_2, c_3, c_4$  的正交性保持得比较好。

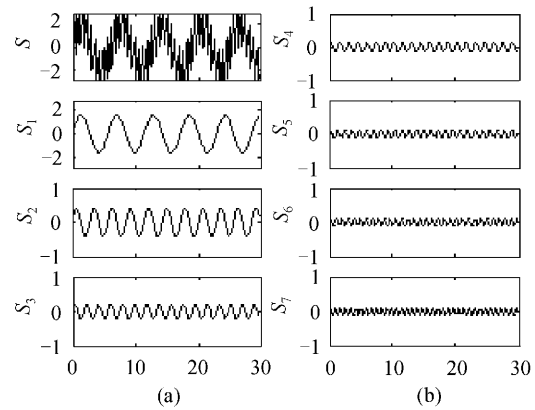


图 2 信号及快速傅里叶变换后的各级谐波

Fig. 2 Original signal and all levels harmonic after FFT

表 1 谐波相位角( $^\circ$ )比较

Table 1 Comparison of harmonic phase angle ( $^\circ$ )

Transform	$n$	1	2	3	4	5
FFT	$S_1(x)$	84.4	287.75	82.81	112.34	325.21
FFT	$S_2(x)$	181.78	3.03	359.17	348.75	45.38
Phase compare		7.38	-24.72	-6.36	33.57	-9.83
Wavelet	$S_1(x)$	88.36	269.35	89.21	269.95	89.78
Wavelet	$S_2(x)$	182.45	1.87	181.45	359.17	180.63
Phase compare		4.09	2.52	2.24	-0.78	0.85

## 5 结 论

由于小波分析在不同的尺度下具有不同的时频分辨率,使用小波分析可以很有效地分辨不同频率成分的信号,与谐波分析法评定光栅信号质量的方法相比,小波分析法能更快求出信号的各个频率的谐波成分,通过变更尺度可求出任意频率谐波的幅值  $A_i$  及相位  $\varphi_i$ ,通过分析各次谐波的幅值  $A_i$  及相位  $\varphi_i$  就可得光栅信号中噪声含量,从而可对光栅信号的质量进行更细致的评定,提高评定的质量。另根据不同频率谐波成分,采用相应的小波滤波方法,去掉相应噪声,更可改善和提高光栅信号的质量。

## 参 考 文 献

- Zhang Shanzhong. Metrological Technique by Grating [M]. Beijing: Mechanical Industry Publishing House, 1985. 123~127  
张善钟. 计量光栅技术[M]. 北京:机械工业出版社, 1985. 123~127
- H. Zhang, C. M. Cartwright, M. S. Ding *et al.*. Optical implementation of a photorefractive joint transform correlator with wavelet filters [J]. *Opt. Commun.*, 2000, **181**(7):223~230
- Digant P. Davé, Taner Akkin, Thomas E. Milner *et al.*. Phase-sensitive frequency-multiplexed optical low-coherence reflectometry [J]. *Opt. Commun.*, 2001, **193**(6):39~43
- Zhang Jing, Kong Fanrang, Zhang Sheng. Harmonic wavelet phase map and it's application in fault diagnosis [J]. *Mechanical & Electrical Engineering Magazine*, 2003, **20**(4):

- 62~64  
张 静,孔凡让,张 盛. 谐波小波相位谱研究及其在设备故障诊断中的应用[J]. 机电工程, 2003, **20**(4):62~64
- 5 Chai Xiaodong, Wei Sui. Computing digital grating based on acousto-optic modulator [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(12): 1109~1112  
柴晓冬,韦 穗. 基于声光调制器的数字光栅的计算[J]. 中国激光, 2003, **30**(12):1109~1112
- 6 Cui Jintai, Cheng Zhengxing, Bai Juxian. An Introduction to Wavelets [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Publishing House, 1997. 4~10  
崔锦泰,程正兴,白居宪. 小波分析导论[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1997. 4~10
- 7 Hu Haiping, Mo Yulong. Construction of biorthogonal wavelet based on human visual system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(7):846~849  
胡海平,莫玉龙. 基于人的视觉特征的双正交小波基的构造[J]. 光学学报, 2001, **21**(7):846~849
- 8 A. Pascal, R. Emmanuel. Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of  $R^n$  [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2003, **201**(6):148~184
- 9 Xu Peixia, Sun Gongxian. Wavelet Analysis and Application Example [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Publishing House, 2001. 100~104  
徐佩霞,孙功宪. 小波分析与应用实例[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2001. 100~104
- 10 Zhang Gongqing, Lin Yuanqu. Broad Function Analysis Teaching Materials [M]. Beijing: Peking University Publishing House, 1995. 53~64  
张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京:北京大学出版社, 1995. 53~64
- 11 I. Daubechies. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis [J]. *IEEE Trans. on Information and Theory*, 1990, **36**(5):991~1006
- 12 E. Fishler, J. Friedman, H. Messer. Order statistics approach to estimation of the dimension of the noise subspace [J]. *IEEE Signal Process*, 1999, **6**:281~285
- 13 Xu Qinghong, Zhong Yuexian, You Zhifu. Study on phase demodulation technique based on wavelet transform [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(12):1617~1622  
许庆红,钟约先,由志福. 基于小波变换的解相技术研究[J]. 光学学报, 2000, **20**(12):1617~1622
- 14 Ran Qiwen, Tan Liying. Wavelet Analysis and Fractional Fourier Transform and Applications [M]. Beijing: National Defence Industry Publishing House, 2002. 22~34  
冉启文,谭立英. 小波分析与分数傅里叶变换及应用[M]. 北京:国防工业出版社, 2002. 22~34
- 15 Li Hongjun, Wu Fan, Liu Enhai. A comprehensive estimating system for signal quality of metrological grating [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2002, **29**(4):35~38  
李红军,吴 凡,刘恩海. 计量光栅信号质量综合评价系统[J]. 光电工程, 2002, **29**(4):35~38