

文章编号: 0258-7025(2005)01-0067-05

TE 矢量高斯光束的二阶矩传输

周国泉^{1,2}, 王绍民¹

(¹ 浙江大学物理系, 浙江 杭州 310027; ² 浙江林学院信息物理系, 浙江 临安 311300)

摘要 运用光束传输的非傍轴矢量矩理论,对 TE 矢量高斯光束的传输进行了研究,给出了束腰、横向发散角和光束传输因子的积分表达式。基于能流二阶矩定义的横向光束宽度在传输过程中服从简单的双曲线变化规律。数值计算表明,在高度非傍轴情形下,由于 TE 偏振导致两个横向存在不同的光束传输特性,且最大的横向发散度超过了非傍轴标量高斯光束的发散度极限 63.43° ,接近于 90° ,这与波动光学理论相符合,其中 x 方向上的发散度略比 y 方向上的大。而对于傍轴情形,在非傍轴标量高斯光束傍轴化条件下,TE 矢量高斯光束的传输可简化为横基模傍轴标量高斯光束,稍有区别的是其光束传输因子始终保持略大于 1,且永远不能精确地等于 1。

关键词 激光光学;矢量高斯光束;光束传输;非傍轴;二阶矩

中图分类号 O 436 文献标识码 A

Second Order Moment Propagation of TE Vector Gaussian Beam

ZHOU Guo-quan^{1,2}, WANG Shao-min¹

(¹ Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang 310027, China
² Department of Information Physics, Zhejiang Forestry University, Lin'an, Zhejiang 311300, China)

Abstract Based on the nonparaxial vectorial moment theory of light beam propagation, the propagation of TE (transverse electric) vector Gaussian beam has been investigated, and the integral expressions of beam waist, transversal divergence angle and beam propagation factor have been presented. The results reveal that both the transversal beam widths defined as second order moment of energy flux follow a very simple hyperbolic law upon propagation. The numerical calculations show that TE polarization results in different propagating characteristic in the two transversal directions for highly nonparaxial case, and the maximum transverse divergences exceed the divergence angle limit of nonparaxial scalar Gaussian beam 63.43° and are close to 90° , which is in accordant with the theory of wave optics. Moreover, the divergence in the x direction is slightly larger than that in the y direction. Under paraxial condition of nonparaxial scalar Gaussian beam, the propagation of TE vector Gaussian beam is reduced to that of transversal fundamental mode paraxial scalar Gaussian beam for paraxial case. However, the beam propagation factor will always be greater than unity and cannot accurately equal to unity forever.

Key words laser optics; vector Gaussian beam; beam propagation; nonparaxial; second order moment

1 引 言

M^2 因子最早用于描述和评估任意傍轴标量激光束的传输^[1~4],后来, M^2 因子概念拓展到了非傍轴标量激光束^[5],但是二阶矩中光强的表述必须采用横截面上光强的精确表示^[6]。这样定义的 M^2 因

子也克服了以往表征衍射光束传输时所面临的积分发散问题^[7]。在倏逝波效应可忽略的前提下,非傍轴标量激光束的 M^2 因子存在一个只能无限趋近而永远都不能达到的下限 $1^{[8]}$ 。同时, M^2 因子也延伸用于描述非傍轴矢量激光束的传输^[9]。对典型的一维 TE 矢量高斯光束和均匀截取矢量光束的光束传输

收稿日期:2003-07-11;收到修改稿日期:2003-12-05

基金项目:国家自然科学基金(60276035),浙江林学院科技发展基金(69178)和浙江省教育厅科研基金(20030571)资助项目。

作者简介:周国泉(1970—),男,浙江桐乡人,浙江林学院副教授,博士后,主要从事光束传输和超光速方面的研究。E-mail:zhouguoquan178@sohu.com

理论分析,显示最大的发散度为 63.43° 。现在 M^2 因子已逐步应用于描述半导体激光束等实际非傍轴矢量激光束的传输^[10]。

本文基于非傍轴光束传输的矢量矩理论,对全空间 TE 矢量高斯光束的传输进行了理论分析和数值计算,发现在极限情形下,横向的最大发散度接近于 90° ,这和波动光学理论相符合。

2 理论分析

直角坐标系中边界条件为

$$\begin{cases} E_x(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \\ E_y(x, y, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

基于平面波谱表示的 TE 矢量高斯光束的电场为^[11,12]

$$\vec{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}^E(\xi, \eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta + z\zeta)] d\xi d\eta, \quad (2)$$

其中

$$\vec{A}^E(\xi, \eta) = \pi w_0^2 \exp[-\pi^2 w_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] \left(\vec{i} - \frac{\xi}{\zeta} \vec{k} \right), \quad (3)$$

ξ 和 η 为横向空间频率, $\zeta = \sqrt{1/\lambda^2 - \xi^2 - \eta^2}$ 为纵向空间频率。而 $\lambda = 2\pi/(\omega \sqrt{\mu\epsilon})$ 为波长, ϵ 和 μ 分别为均匀介质的电容率和磁导率, ω 为圆频率。

由麦克斯韦方程组,可得 TE 矢量高斯光束的磁场为

$$\vec{H}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}^H(\xi, \eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta + z\zeta)] d\xi d\eta, \quad (4)$$

其中

$$\vec{A}^H(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \pi w_0^2 \lambda \exp[-\pi^2 w_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] \left(\frac{-\xi\eta}{\zeta} \vec{i} + \frac{1/\lambda^2 - \eta^2}{\zeta} \vec{j} - \eta \vec{k} \right). \quad (5)$$

在式(2)和(4)中,省略了时间因子 $\exp(-i\omega t)$ 。

为了便于后面的计算,令

$$\xi = \frac{r \cos\theta}{\lambda}, \quad \eta = \frac{r \sin\theta}{\lambda}, \quad (6)$$

其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r < 1$ 的值对应于和 z 轴成角度 $\arcsin r$ 传输的均匀平面波;而 $r > 1$ 的值对应于倏逝波。

由傅里叶变换的基本性质可得,TE 矢量高斯光束通过任一 z 为常数的平面的总功率为

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\vec{A}^E(\xi, \eta) \times \vec{A}^{H*}(\xi, \eta)]_z \exp(-4\pi z \text{Im}\zeta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \pi^2 w_0^4 \lambda \exp[-2\pi^2 w_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] (1/\lambda^2 - \eta^2) \text{Re}\left(\frac{1}{\zeta^*}\right) \exp(-4\pi z \text{Im}\zeta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (7)$$

式中星号表示取复共轭, Re 表示取实部, Im 表示取虚部。对于 $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} > 1/\lambda$, $1/\zeta^*$ 为纯虚数;而对于 $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1/\lambda$, $1/\zeta^*$ 为实数。所以(7)式的积分限可由无穷严格变更为有限

$$P = \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1/\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \pi^2 w_0^4 \lambda \exp[-2\pi^2 w_0^2 (\xi^2 + \eta^2)] \frac{(1/\lambda^2 - \eta^2)}{\xi} d\xi d\eta = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\pi^3 w_0^4}{\lambda^2} \int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r - r^3)}{\sqrt{1 - r^2}} dr, \quad (8)$$

其中 $c = \frac{2\pi^2 w_0^2}{\lambda^2}$ 。显然,功率 P 与 z 无关,在传输过程中保持守恒。

由光束传输的非傍轴矢量矩理论,在任一 z 为常数的平面上光束中心的横坐标定义为坡印亭矢量 z 分量的一阶矩^[9]

$$\begin{pmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = \frac{w_0^2}{\lambda} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(1 - r^2 \sin^2\theta)}{\sqrt{r^2 - 1}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} r^2 dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r - r^3)}{\sqrt{1 - r^2}} dr} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

所以,基于中心坐标二阶矩定义的光束宽度可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_z \rangle \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{pmatrix} dx dy, \quad (10)$$

选取 $z = 0$ 的平面为参考面, 则光束宽度随光束传播方向 z 轴的变化满足双曲线规律

$$\begin{pmatrix} W_x^2(z) & W_{xy}^2(z) \\ W_{xy}^2(z) & W_y^2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x^2(0) & W_{xy}^2(0) \\ W_{xy}^2(0) & W_y^2(0) \end{pmatrix} + 2z \begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} & \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} \\ \frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} & \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} \begin{pmatrix} x \langle S_x \rangle & \frac{1}{2}(x \langle S_y \rangle + y \langle S_x \rangle) \\ \frac{1}{2}(x \langle S_y \rangle + y \langle S_x \rangle) & y \langle S_y \rangle \end{pmatrix} dx dy, \quad (12)$$

为 $z = 0$ 平面处的曲率矩阵, 而

$$\begin{pmatrix} \tan^2 \theta_x & \tan^2 \theta_{xy} \\ \tan^2 \theta_{xy} & \tan^2 \theta_y \end{pmatrix} = \frac{4}{P} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < 1/\lambda} d\xi d\eta \times \begin{pmatrix} (\xi/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_x & \frac{1}{2} [(\xi/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_y + (\eta/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_x] \\ \frac{1}{2} [(\xi/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_y + (\eta/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_x] & (\eta/\zeta) \{ \vec{A}^E \times \vec{A}^{H*} \}_y \end{pmatrix}, \quad (13)$$

为发散度矩阵。

根据(10)式, 经数学运算后得到 $z = 0$ 平面处 x 和 y 方向的光束宽度分别为

$$W_x^2(0) = \frac{\lambda^2}{\pi^2 c} \frac{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{[2r - (1+c)r^3 + cr^5/4]}{\sqrt{1-r^2}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr}, \quad (14)$$

和

$$W_y^2(0) = \frac{\lambda^2}{\pi^2 c} \frac{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{[2r - (1+c)r^3 + 3cr^5/4]}{\sqrt{1-r^2}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr}. \quad (15)$$

类似地, 可以得到 $z = 0$ 平面处交叉光束宽度为

$$W_{xy}^2(0) = -\frac{\lambda^2}{\pi^3 c^2} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(1-r^2 \sin^2 \theta) r^3 \sin 2\theta}{2\sqrt{1-r^2}} dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr} = 0. \quad (16)$$

根据(12)式, 利用傅里叶变换的性质得到 $z = 0$ 平面处 x 方向的曲率为

$$\frac{W_x^2(0)}{R_x(0)} = \frac{4}{P} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} x \langle S_x \rangle dx dy = \frac{4w_0^2}{\lambda} \frac{\text{Im} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-cr^2) \frac{(1-r^2 \sin^2 \theta)}{r^2 - 1} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \right]}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr} = 0. \quad (17)$$

同理可得

$$\frac{W_{xy}^2(0)}{R_{xy}(0)} = 0; \quad \frac{W_y^2(0)}{R_y(0)} = 0. \quad (18)$$

x 和 y 方向上的发散度由(13)式经运算最后分别为

$$\tan^2 \theta_x = 4 \frac{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(r^3 - r^5/4)}{(1-r^2)^{3/2}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr}, \quad (19)$$

和

$$\tan^2 \theta_y = 4 \frac{\int_0^1 \frac{\exp(-cr^2)(r^3 - 3r^5/4)}{(1-r^2)^{3/2}} dr}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr} \quad (20)$$

而交叉发散度为

$$\tan^2 \theta_{xy} = \frac{4}{\pi} \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-cr^2) \cos\theta \sin\theta (1-r^2 \sin^2\theta)}{(1-r^2)^{3/2}} r^3 dr d\theta}{\int_0^1 \exp(-cr^2) \frac{(2r-r^3)}{\sqrt{1-r^2}} dr} = 0. \quad (21)$$

因此, (11)式可简化为

$$W_x^2(z) = W_x^2(0) + z^2 \tan^2 \theta_x, \quad (22)$$

$$\text{和} \quad W_y^2(z) = W_y^2(0) + z^2 \tan^2 \theta_y. \quad (23)$$

所以, 基于二阶矩定义的两个横向光束宽度随光束传播满足简单的双曲线变化规律。根据非傍轴光束传输因子的定义^[7,9], TE 矢量高斯光束两横向上的传输因子为

$$M_x^2 = \frac{\pi}{\lambda} W_x(0) \tan \theta_x, \quad M_y^2 = \frac{\pi}{\lambda} W_y(0) \tan \theta_y. \quad (24)$$

显然当 $\frac{w_0}{\lambda} \gg 1$, 可以作傍轴近似, 此时两横向上的束腰为

$$W_x(0) = W_y(0) = w_0, \quad (25)$$

同时, 两横向上的发散角可直接给出

$$\theta_x = \theta_y = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (26)$$

所以两横向上的传输因子为

$$M_x^2 = M_y^2 = 1. \quad (27)$$

3 数值计算

图 1 是根据式(14), (15), (19), (20)和(24)经数值计算给出的两个横向上的发散度、束腰和光束传输因子随初始高斯半宽度 w_0 的变化关系。

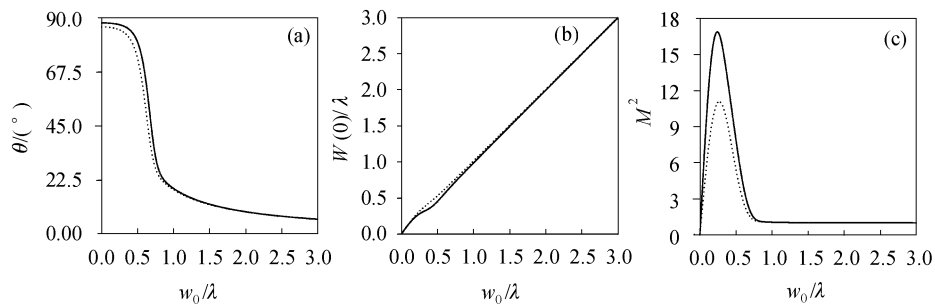


图 1 发散角(a), 束腰(b)和光束传输因子(c)与高斯半宽度 w_0 的变化关系

其中实线和虚线分别表示 x 和 y 方向

Fig. 1 Divergence angles (a), beam waists (b), and beam propagation factors (c) are depicted as a function of w_0

The solid and the dotted curves denote x and y direction, respectively

由图 1, 可概括得如下几个要点:

1) 当 w_0 较小时, 两个横向上的发散度、束腰和传输因子均不相同, 其中 x 方向上的发散度略比 y 方向上的大, 这是由于偏振引起的^[13,14]。而束腰是 y 方向上的比 x 方向上的略大一些; 传输因子是 x 方向上的大于 y 方向上的。

2) 当 w_0 趋于零时, x 和 y 方向上的发散度分别趋于最大值 87.76° 和 86.14° , 说明此时 TE 矢量高斯光束向整个 $z \geq 0$ 的半空间传播。

3) 当 w_0 为 0.24 个波长时, x 方向上的光束传输因子达到最大值 16.9; 而 y 方向上的光束传输因子的最大值为 11.1, 条件是 w_0 为 0.27 个波长。

4) 当 w_0 为 0.90 个波长时, 两方向的光束传输因子均为 1.08。当 w_0 趋向于无限大时, 两方向上的光束传输因子均趋向于下限 1, 但是永远不能精确地等于 1。可以认为非傍轴标量高斯光束傍轴化条件 $w_0 \geq 2\sqrt{2}\lambda/\pi$ ^[15] 对 TE 矢量高斯光束仍是适用的。

4 结 论

通过对 TE 矢量高斯光束传输的理论分析,揭示基于能流二阶矩的横向光束宽度在传输过程中遵循简单的双曲线变化规律。在初始高斯半宽度 w_0 趋于零的极限情形下, x 方向和 y 方向的发散度分别达到了 87.76° 和 86.14° , 超过以往所认为的发散度极限 63.43° 。在非傍轴情形下, 两个横向上的光束传输特性是不相同的, 主要是由于 x 方向上的发散度要比 y 方向上的大。至于傍轴情形, TE 矢量高斯光束的传输可用横基模傍轴标量高斯光束代替。

参 考 文 献

- 1 A. E. Siegman. New development in laser resonance [C]. *SPIE*, 1990, **1224**:2~14
- 2 Hu Xueyuan, Deng Jian, Zhong Fangchuan *et al.*. Beam quality measurement and amendment of the ultrashort ultraintense laser system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2001, **A28**(5):407~411
胡雪原, 邓健, 钟方川等. 超强脉冲激光系统光束质量的测量和改善[J]. *中国激光*, 2001, **A28**(5):407~411
- 3 Luo Shirong, Lü Baida. Propagation properties of hard-edge diffracted super-Gaussian beams by using the self-convergent beam width method [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(9):821~825
罗时荣, 吕百达. 硬边衍射超高斯光束传输特性的自收敛束宽法研究[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(9):821~825
- 4 Jin Gang, Liu Shunfa, Li Shumin *et al.*. Laser thermal effects in beam control system on the emitted laser quality [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(10):895~899
金钢, 刘顺发, 李树民等. 激光热效应对光束控制系统发射光束质量的影响[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(10):895~899
- 5 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Optical beam quality factor of nonparaxial light beams. I. Definition [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(9):1217~1222
曹清, 邓锡铭, 郭弘. 非傍轴光束的光束质量因子. I. 定义[J]. *光学学报*, 1996, **16**(9):1217~1222
- 6 Cao Qing, Deng Ximing, Guo Hong. Accurate expression of light intensity at transverse plane [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(7):897~902
曹清, 邓锡铭, 郭弘. 横截面上光强的精确表述[J]. *光学学报*, 1996, **16**(7):897~902
- 7 Miguel A. Porrás. Finiteness and propagation law of the power density second-order moment for diffracted scalar light beams [J]. *Optik*, 1999, **110**(9):417~420
- 8 Cao Qing, Deng Ximing. Optical beam quality factor of nonparaxial light beams. II. Property analysis [J]. *Acta Optica Sinica*, 1996, **16**(10):1345~1349
曹清, 邓锡铭. 非傍轴光束的光束质量因子. II. 特性分析[J]. *光学学报*, 1996, **16**(10):1345~1349
- 9 Miguel A. Porrás. Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation [J]. *Opt. Commun.*, 1996, **127**(1~3):79~95
- 10 Guoquan Zhou, Daomu Zhao, Jinxin Xu *et al.*. Semiconductor laser with beam quality factor $M^2 < 1$ [J]. *Opt. Commun.*, 2001, **187**(4~6):395~399
- 11 D. R. Rhodes. On a fundamental principle in the theory of planar antennas [C]. *IEEE*, 1964, **52**:1013~1021
- 12 Carl G. Chen, Paul T. Konkola, Juan Ferrera *et al.*. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(2):404~412
- 13 A. V. Nesterov, V. G. Niziev. Propagation features of beams with axially symmetric polarization [J]. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 2001, **3**(2):S215~S219
- 14 A. V. Nesterov, V. G. Niziev. Laser beams with axially symmetric polarization [J]. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2000, **33**(7):1817~1822
- 15 Shojiro Nemoto. Nonparaxial Gaussian beams [J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(13):1940~1946