

文章编号: 0258-7025(2005)01-0021-05

# 体光栅二维耦合波方程解析解的再探讨

王 博<sup>1</sup>, 陶世荃<sup>1</sup>, 陈家璧<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 北京工业大学应用数理学院, 北京 100022; <sup>2</sup> 上海理工大学光电学院, 上海 200093)

**摘要** 针对完全重叠型的体光栅, 在布拉格衍射范畴内给出二维耦合波方程的完整推导, 并给出方程组的闭形式解析解。该解析解能够解决完全重叠型的均匀光栅的普遍衍射问题。研究了二维有限尺寸体光栅的衍射性质特别是衍射效率与光栅二维尺寸及介质吸收系数之间的关系。对于无吸收的光栅, 参考光束相对物光束越宽, 衍射效率将越高。当介质的吸收不可忽略时, 对于耦合较强的光栅, 参考光尺寸的增大反而会引引起衍射效率的下降。为了获得最优的衍射效率, 应当根据介质的吸收率合理地设计光栅的几何尺寸。

**关键词** 衍射与光栅; 二维耦合波理论; 黎曼方法; 有限尺寸体光栅; 衍射效率

**中图分类号** TB 877 **文献标识码** A

## Re-Investigation on the Solution to Two-Dimensional Coupled Wave Equations for Volume Holographic Gratings

WANG Bo<sup>1</sup>, TAO Shi-quan<sup>1</sup>, CHEN Jia-bi<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China  
<sup>2</sup> College of Optics and Electronics, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract** The complete derivation of two-dimensional (2-D) coupled wave equations is given for total overlap gratings in the Bragg regime. The analytical solution in closed mathematical form is also given. General diffraction properties of total overlap gratings, can be solved with the solution. Diffraction properties, especially effects of the grating dimension and absorption coefficient on the diffraction efficiency are researched based on the solution in this paper. The results show that diffraction efficiency of a lossless grating increases with the higher ratio of reference beam width to object beam width. However, for strongly-coupled gratings if the absorption of medium cannot be ignored, the diffraction efficiency decreases with widening of reference beam. It is suggested that for efficiency optimization of a lossy grating the geometrical dimension of the grating should be carefully designed.

**Key words** diffraction and gratings; two-dimensional coupled wave theory; Riemann's technique; volume grating with finite size; diffraction efficiency

## 1 引 言

在信息存储、处理和显示等许多领域以及波导、滤波器等许多光电子器件中, 已经越来越广泛地应用了作为衍射元件的体光栅和体积全息图<sup>[1~6]</sup>。Kogelnik 的耦合波理论<sup>[7]</sup>以近乎完美的形式给出了体光栅的衍射特性, 但由于其理论的一维本质, 原则上只适用于光栅输入输出面尺寸(与之相应的是

入射光束和衍射光束的尺寸)远大于光栅厚度的情况。这种情况下光栅可以分为透射型和反射型两类。但在现代体光栅的许多应用中, 光栅尺寸趋向于小型化, 使用方式也有了邻面入射式即所谓 90° 光路<sup>[8]</sup>。对这一类体光栅衍射特性(如衍射效率和角度及波长选择性)的分析需要更为精确的衍射理论, 二维理论因此受到极大的关注。

收稿日期: 2003-08-28; 收到修改稿日期: 2003-11-13

基金项目: 国家 973 计划(G19990330)和上海市科委光科技专项(012261018)资助项目。

作者简介: 王 博(1980—), 男, 山东济宁人, 北京工业大学应用数理学院硕士研究生, 主要从事光存储与光信息处理的研究。E-mail: wbwsx@emails.bjpu.edu.cn

所谓二维理论,是假定在垂直于光栅条纹平面( $x$ - $y$  平面)的方向上材料的性质和光波的性质均无变化,通常这一方向也被指定为光波电场矢量的方向。在 Solyman 等发展的二维耦合波理论<sup>[9,10]</sup>基础上,Russell 和 Solyman 研究了“完全重叠光栅”的衍射特性<sup>[11]</sup>。所谓完全重叠光栅是指有限宽度的两光束在记录介质中相交,在相交的全部区域中形成的全息光栅。他们给出的闭形式的解析解包含了非均匀的写入光振幅分布、介质吸收、相位光栅和振幅光栅、以及非布拉格入射等相当普遍的情况,应当可以成为研究有限尺寸体光栅衍射特性的重要依据。但是,正如文献[12]和[13]所指出的,文献[11]中的解(即本文附录中的(A1)式)存在诸多错漏,致使难以被其他学者所使用。而文献[12]和[13]也没有对此闭形式解给予更正。

本文针对完全重叠型的光栅,在布拉格衍射范畴内给出二维耦合波方程的完整推导,并给出方程的闭形式解。

## 2 二维耦合波方程的导出

### 2.1 折射率光栅的形成

如图 1(a)所示,宽度分别为  $W_R$  和  $W_S$  的参考光和信号光入射到介质中,在其内部干涉形成体光栅。选定坐标系使得两束光分别相对于  $x$  轴以角度  $\phi_0$  和  $-\phi_0$  入射。记录光场可以表示为

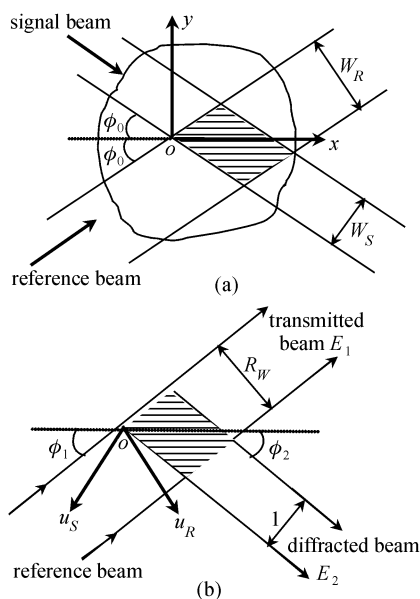


图 1 二维有限尺寸体光栅的形成(a)和读出(b)

Fig.1 Formation (a) and readout (b) of a 2-D restricted volume grating

$$E_{i0} = a_{i0} A_{i0} \exp(-\gamma_0 p_{i0}), \quad (1)$$

其中  $i = 1, 2$  分别代表参考光和信号光,  $\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$ ,  $\alpha_0$  为记录介质对光振幅的吸收系数,  $\beta_0$  为光在介质中的传播常数。 $a_{i0}$  为沿波阵面的归一化振幅分布,  $A_{i0}$  为一常数, 相应于两束记录光的光强,  $p_{i0}$  为光的波前相位函数, 它可以记为

$$p_{i0} = x \cos \phi_0 - (-1)^i y \sin \phi_0, \quad (2)$$

所形成的光栅表示为介质介电常数  $\epsilon_r$  的周期性变化

$$\epsilon_r = \epsilon_{r0} + \epsilon_{r1} a_{10} a_{20} \cos[\beta_0 (p_{10} - p_{20})], \quad (3)$$

其中  $\epsilon_{r0}$  表示平均介电常数,  $\epsilon_{r1}$  表示变化的幅值。 $\epsilon_{r0}$  和  $\epsilon_{r1}$  也可以是复值, 其虚部分别代表平均吸收率的改变和吸收光栅的形成。

### 2.2 光栅的布拉格衍射

当一束平面波以接近记录时参考波的方向入射到介质中, 由于体光栅的布拉格衍射特性, 介质中只有入射波  $E_1$  和衍射波  $E_2$  存在, 总的电场是  $E_1$  和  $E_2$  之和, 表达为

$$E = E_1 + E_2 = a_1 A_1 \exp(-\gamma p_1) + a_2 A_2 \exp(-\gamma p_2), \quad (4)$$

其中  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  为显影后介质的吸收系数,  $\beta$  为读出光波的传播常数。注意(4)式中光电场振幅  $A_i$  本身不含介质吸收引起的衰减, 这不同于文献[11]给出的表述。

光波的电场应满足标量波动方程

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \epsilon_0 \epsilon_r E = 0, \quad (5)$$

其中  $\epsilon_0$  为真空中的介电常数。

综合方程(3)~(5), 并采用文献[10,11]中同样的近似后, 可以得到

$$\begin{cases} \nabla A_1 \cdot \nabla p_1 + j\kappa \frac{a_{20} a_2 a_{10}}{a_1} \exp[-(G + jK)] A_2 = 0 \\ \nabla A_2 \cdot \nabla p_2 + j\kappa \frac{a_{20} a_{10} a_1}{a_2} \exp[(G + jK)] A_1 = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

其中  $G = \alpha(p_2 - p_1)$ ,

$$K = \beta_0 (p_{10} - p_{20}) - \beta(p_1 - p_2),$$

$$\kappa = \epsilon_{r1} \beta_0 / (4\epsilon_r), \quad (7)$$

应当指出, (6)式与文献[11]中给出的方程完全相同。利用[11]中相同的坐标变换, 即新坐标系  $(u_R, u_S)$  的基矢分别垂直于光波传播矢量(如图 1(b))

$$\begin{pmatrix} u_R \\ u_S \end{pmatrix} = \frac{1}{W_S} \begin{pmatrix} \sin \phi_0 & -\cos \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & -\cos \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (8)$$

在新的坐标系中, 光栅被定义在  $-1 < u_S < 0, 0 < u_R < R_W$  范围内, 其中  $R_W = W_R/W_S$  为参考光和信

号光的光束宽度比。振幅分布函数  $a_i$  成为单变量的函数  $a_1(u_R)$  和  $a_2(u_S)$ 。由于仅考虑布拉格衍射范畴,故除了相位失配因子  $K$  以外,通常可取  $\phi_1 = \phi_0$ ,  $\phi_2 = \phi_0$ ,则方程(6)变为

$$\frac{\partial A_1}{\partial u_S} = j\kappa' W_S \frac{a_{20} a_2 a_{10}}{a_1} \exp[-(G + jK)] A_2, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u_R} = -j\kappa' W_S \frac{a_{20} a_{10} a_1}{a_2} \exp[(G + jK)] A_1, \quad (9b)$$

其中  $\kappa' = \kappa/\sin 2\phi_0$ ,  $G = 2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 (u_R + u_S)$ ,  $\alpha' = \alpha/\sin 2\phi_0$ ,  $K = \delta W_S (u_R + u_S)$ ,  $\delta = \frac{1}{2} \beta \Delta \phi \sec^2 \phi_0 + \Delta \beta \tan \phi_0$ 。

### 3 耦合波微分方程的解

为了求解耦合波方程(9),首先在  $a_{20} = a_2$  的条件下,从方程(9)消去  $A_1$ ,并且引入变换

$$A = A_2 \exp[-(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S) u_S], \quad (10)$$

得到方程

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_R \partial u_S} - \kappa'^2 W_S^2 a_{20}^2 a_{10}^2 A = 0, \quad (11)$$

这是函数  $A$  关于变量  $u_R$  和  $u_S$  的标准双曲型二阶偏微分方程,采用黎曼(Riemann)方法<sup>[14]</sup>,在本问题中坐标为  $(u_R, u_S)$  的任意点  $P$  处的函数值  $A(P)$  可以用边界  $QOR$  上的函数的初值及其一阶偏导数的值求出(如图2)。根据此物理问题的初始条件( $u_R = 0$  时  $A_2 = 0$ ,  $u_S = 0$  时  $A_1 = 1$ )以及方程(9)和(10)求出所有必要的边界条件如下:

$$\text{当 } u_R = 0 \text{ 时, } A = 0, \text{ 且同时有 } \left. \frac{\partial A}{\partial u_S} \right|_{u_R=0} = 0;$$

$$\text{当 } u_S = 0 \text{ 时, } A = A_2(u_R, 0), \text{ 且同时有 } \left. \frac{\partial A}{\partial u_R} \right|_{u_S=0} = -j\kappa' W_S a_{10} a_1 \exp[(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S) u_R].$$

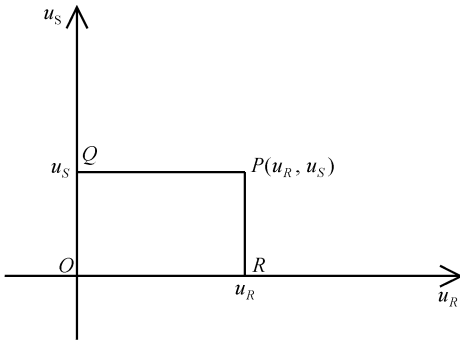


图2 黎曼方法的图示

Fig. 2 Schematic diagram of Riemann method

可以证明方程(11)的黎曼函数为  $v(u_R, u_S; \alpha, \beta) = J_0(2\kappa' W_S \sqrt{L_0 M_0})$  (证明略),其中  $J_0$  为零阶贝塞耳函数,  $L_0 = \int_{u_R}^{\alpha} a_{10}^2(\xi) d\xi$ ,  $M_0 = \int_{\beta}^{u_S} a_{20}^2(\xi) d\xi$ 。

$$\begin{aligned} \text{因为 } A(Q) = 0, A(R) = A_2(u_R, 0), \text{ 所以可得} \\ A(P) = A(u_R, u_S) = \\ -j\kappa' W_S \int_0^{u_R} a_{10} a_1 J_0(2\kappa' W_S \sqrt{LM}) \times \\ \exp[\tau(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S)] d\tau, \quad (12) \end{aligned}$$

其中  $L = \int_{\tau}^{u_R} a_{10}^2(\xi) d\xi$ ,  $M = \int_{\tau}^{u_S} a_{20}^2(\xi) d\xi$ 。进而可求出方程(11)的解为

$$\begin{aligned} A_2(u_R, u_S) = -j\kappa' W_S \times \\ \exp[(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S) u_S] \times \\ \int_0^{u_R} a_{10} a_1 J_0(2\kappa' W_S \sqrt{LM}) \times \\ \exp[\tau(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S)] d\tau, \quad (13) \end{aligned}$$

根据式(9b),微分  $\frac{\partial A_2}{\partial u_R}$  可得出  $A_1$  的解为

$$\begin{aligned} A_1 = 1 - \frac{a_{10}(u_R)}{a_1(u_R)} \kappa' W_S \times \\ \exp[-(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S) u_R] \times \\ \int_0^{u_R} a_{10}(\tau) a_1(\tau) \sqrt{\frac{M}{L}} J_1(2\kappa' W_S \sqrt{LM}) \times \\ \exp[\tau(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S)] d\tau, \quad (14) \end{aligned}$$

其中  $J_1$  为一阶贝塞耳函数。再根据(4)式,二光波电场的解分别为

$$\begin{aligned} E_1 = \exp(\alpha' W_S u_S) \times \\ \{ a_1(u_R) \exp(-\alpha' W_S \cos 2\phi_0 u_R) - \\ \kappa' W_S \exp[-(\alpha' W_S + j\delta W_S) u_R] a_{10}(u_R) \times \\ \int_0^{u_R} a_{10}(\tau) a_1(\tau) \sqrt{\frac{M}{L}} J_1(2\kappa' W_S \sqrt{LM}) \times \\ \exp[\tau(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S)] d\tau \}, \quad (15) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} E_2 = -j\kappa' W_S a_2(u_S) \times \\ \exp[-\alpha' W_S (u_R - u_S) + j\delta W_S u_S] \times \\ \int_0^{u_R} a_{10}(\tau) a_1(\tau) J_0(2\kappa' W_S \sqrt{LM}) \times \\ \exp[\tau(2\alpha' W_S \sin^2 \phi_0 + j\delta W_S)] d\tau. \quad (16) \end{aligned}$$

将附录(A1)式与式(15), (16)相比,除了积分式中指数函数的表达略有不同外,式(A1)还有两个显著的错误:一是吸收衰减指数项中  $u_S$  的符号,二是参量积分的上限。虽然这些可能只是印刷错误,却很难仅通过观察予以纠正,并使之丧失了可用性。例如吸收衰减项中  $u_S$  的符号问题,可以使得当  $\alpha$  较大时依据(A1)式计算出的衍射效率会远大于1。

## 4 衍射特性

光栅衍射效率可以定义为

$$\eta_{\text{diff}} = \frac{\int_{-1}^0 |E_2(R_w, u_s)|^2 du_s}{\int_0^{R_w} |E_1(u_R, 0)|^2 du_R}, \quad (17)$$

其中  $R_w$  为参考光和信号光的光束宽度比。利用(15)~(17)式,可以研究有限尺寸体光栅的衍射特性。下面针对一些典型问题进行讨论。

### 4.1 无吸收的平面波光栅在布拉格匹配条件下的衍射效率

此时  $\alpha = \delta = 0$ , 并且不失一般性, 可令  $a_{i0} = a_i = 1$ , 于是  $E_1$  和  $E_2$  简化为

$$\begin{cases} E_1(u_R, u_s) = J_0(2\kappa'W_s \sqrt{-u_R u_s}) \\ E_2(u_R, u_s) = -j \sqrt{-\frac{u_R}{u_s}} J_1(2\kappa'W_s \sqrt{-u_R u_s}) \end{cases}, \quad (18)$$

由于  $u_R$  恒为正值而  $u_s$  恒为负值, 故  $E_2$  与  $E_1$  有  $\pi/2$  的相位差。经过一定的数学运算, 可得

$$\eta_{\text{diff}} = 1 - J_0^2(2\kappa'W_s \sqrt{R_w}) - J_1^2(2\kappa'W_s \sqrt{R_w}), \quad (19)$$

其中  $R_w$  为光栅尺寸比。在(19)式中, 宗量  $\kappa'W_s \sqrt{R_w}$  可视为光栅的等效耦合强度。对于无吸收光栅, 衍射效率被光栅等效耦合强度唯一确定。另一方面, 也可以将  $\kappa'W_s$  看作光栅强度, 对于给定的  $\kappa'W_s$  值, 衍射效率将随光栅尺寸比  $R_w$  而变化。图3示出了对于几个不同的  $R_w$  值, 用(19)式计算出的衍射效率与光栅强度的关系, 可见衍射效率基本上随光栅强度而单调上升, 不会出现一维理论预期的无吸收透射型光栅衍射效率随光栅强度剧烈震荡<sup>[7]</sup>的情况。此外, 对于无吸收光栅, 参考光束相对物光束越宽, 衍射效率将越高。

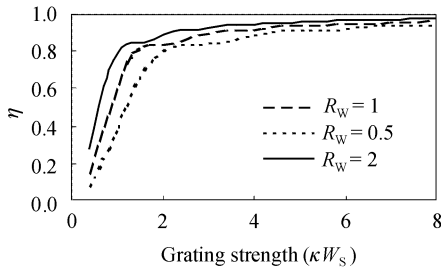


图3 在无吸收和布拉格角入射下, 衍射效率随光栅强度的变化曲线

Fig. 3 Without absorption and Bragg-matched diffraction efficiency versus grating strength ( $\alpha W_s = 0$ )

### 4.2 有吸收光栅的衍射效率与尺寸比的关系

当介质的吸收不可以忽略时, 解析式(19)失效, 但仍可以使用闭形式解(15)和(16)式来计算衍射效率。图4给出  $\alpha W_s = 0.5$  和  $\alpha W_s = 1$  两种情况下光栅衍射效率与光栅强度的关系曲线( $\phi_0 = 45^\circ$ )。不仅衍射效率随  $\alpha W_s$  的增大迅速下降, 而且对于耦合较强的光栅, 参考光尺寸的增大反而会引引起衍射效率的下降。由此可以得出, 为了获得最优的衍射效率, 应当根据材料的吸收合理地设计光栅的几何尺寸。

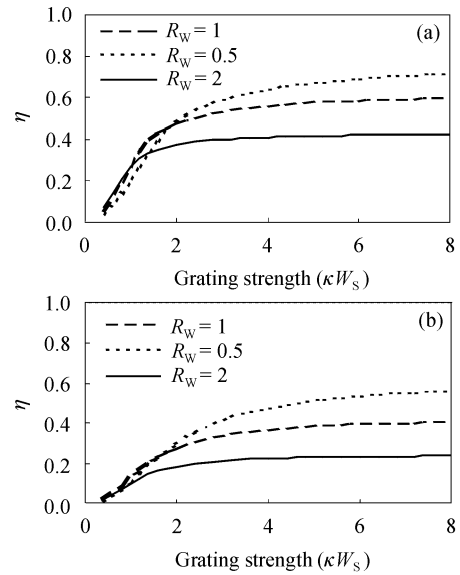


图4 在有吸收和布拉格角入射下, 衍射效率随光栅强度的变化曲线

Fig. 4 With absorption and Bragg-matched diffraction efficiency versus grating strength  
(a)  $\alpha W_s = 0.5$ ; (b)  $\alpha W_s = 1$

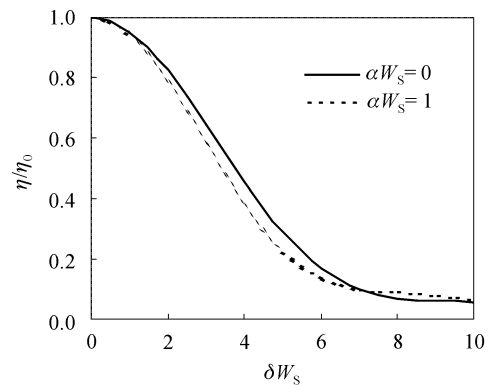


图5 归一化衍射效率随布拉格失配量的变化曲线

Fig. 5 Diffraction efficiencies (normalized to their values when  $\delta W_s = 0$ ) versus  $\delta W_s$

### 4.3 光栅布拉格选择性

光栅读出时的角度偏离  $\Delta\phi$  和波长偏离  $\Delta\beta$  所引

起的布拉格失配量为  $\delta = 1/2\beta\Delta\phi\sec^2\phi_0 + \Delta\beta\tan\phi_0$ 。利用式(16)和(17),可以计算在许多复杂条件下光栅的布拉格选择性。例如,图5给出  $\alpha W_S = 0$  和  $\alpha W_S = 1$  两种情况下光栅归一化衍射效率( $\eta_{\text{diff}}$ 与  $\delta = 0$  时的峰值衍射效率之比)与布拉格失配量  $\delta W_S$  的关系曲线,其中  $\phi_0 = 45^\circ$ ,  $\kappa W_S \sqrt{R_w} = 2$ (纯实数),  $R_w = 1$ 。从图中可以看到,介质吸收在使布拉格选择性略有提高的同时,趾部引起的光栅间串扰更不可忽略。

## 5 结 论

在完整推导并求解二维耦合波方程过程中,纠正了前人发表的工作的错漏之处,得到的闭形式解析解能够解决完全重叠型的均匀光栅( $\kappa = \text{常数}$ )的普遍衍射问题,即任意光栅写入角  $\phi_0$ ,非均匀写入光振幅分布  $a_{i0}$ ,非零介质吸收,相位和振幅光栅,非布拉格入射等。作为例子,研究了光栅衍射效率与吸收系数和尺寸比的关系以及典型的布拉格选择性曲线。对于非完全重叠型和非均匀的光栅,需要采用数值计算方法。

致谢 感谢与季晓梅的有益讨论。

## 参 考 文 献

1 George Barbastathis, Michal Balberg, D. J. Brady. Confocal microscopy with a volume holographic filter [J]. *Opt. Lett.*,

1999, **24**(12):811~813  
 2 J. Hukriede, I. Nee, D. Kip *et al.*. Thermally fixed reflection gratings for infrared light in LiNbO<sub>3</sub>:Ti:Fe channel waveguides [J]. *Opt. Lett.*, 1998, **23**(17):1405~1407  
 3 Geoffrey W. Burr, C. Michael Jefferson, Hans Coufal *et al.*. Volume holographic data storage at an areal density of 250 gigapixels/in.<sup>2</sup>[J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(7):444~446  
 4 Kebin Jia, Dapeng Yang, Shubo Dun *et al.*. Holographic storage scheme based on digital signal processing [J]. *Chin. Opt. Lett.*, 2003, **1**(10):579~582  
 5 Zhou Yan, Tao Shiquan, Wang Dayong *et al.*. Pattern recognition algorithms based on volume holographic image-databases [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(4):359~362  
 周 雁,陶世荃,王大勇 等. 基于体全息图像库的模式识别算法[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(4):359~362  
 6 Ouyang Chuan, He Qingsheng, Wang Fengtao *et al.*. Volume holographic correlation system with large capacity [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(9):1095~1098  
 欧阳川,何庆声,王凤涛 等. 大容量体全息相关系统[J]. *光学学报*, 2003, **23**(9):1095~1098  
 7 H. Kogelnik. Coupled wave theory for thick hologram gratings [J]. *Bell. Syst. Tech. J.*, 1969, **48**(9):2909~2947  
 8 F. H. Mok. Angle-multiplexed storage of 5000 holograms in lithium niobate [J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(11):915~917  
 9 L. Solymar. A general two-dimensional theory for volume holograms [J]. *Appl. Phys. Lett.*, 1977, **31**(12):820~822  
 10 L. Solymar, D. J. Cooke. Volume Holography and Volume Gratings [M]. New York: Academic Press, 1981. 164~207  
 11 P. St. J. Russell, L. Solymar. The properties of holographic overlap gratings [J]. *Optica Acta*, 1979, **26**(3):329~347  
 12 Mark L. Jones, Richard P. Kenan, Carl M. Verber. Rectangular characteristic gratings for waveguide input and output coupling [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(20):4149~4158  
 13 L. M. Walpita, C. W. Pitt. Beam expansion in linear constant period gratings [J]. *Appl. Opt.*, 1984, **23**(19):3434~3438  
 14 R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, Vol. II [M]. New York: Interscience Publishers, 1962. Chap. V

## 附录

文献[11]中的(11)式为

$$\begin{cases} E_1 = \exp(\alpha'W_S u_S) \times \{a_1(u_R) - \kappa'W_S \exp[-(\alpha'W_S + j\delta W_S)u_R]a_{10}(u_R) \times \\ \int_0^{u_S} a_1(v) \sqrt{\frac{L}{M}} J_1(2\kappa'W_S \sqrt{LM}) \exp[v(\alpha'W_S + j\delta W_S)] dv\} \\ E_2 = j\kappa'W_S a_{20}(u_S) \exp[-\alpha'W_S(u_R + u_S) - j\delta W_S u_S] \times \\ \int_0^{u_S} a_1(v) J_0(2\kappa'W_S \sqrt{LM}) \exp[v(\alpha'W_S + j\delta W_S)] dv \end{cases} \quad (\text{A1})$$