

文章编号: 0258-7025(2004)Supplement-0210-03

# 一种新的数学方法及其在色散缓变光纤方程中的应用

李潮, 吴庭万

(华南理工大学理学院应用物理系, 广东 广州 510640)

**摘要** 将一种新而简洁的数学方法应用于色散缓变光纤中含高阶色散的非线性薛定谔方程(NLSE)中,分析了负三阶色散和负四阶色散对孤子压缩效应和频移效应的影响,并给出了压缩长度的数学表达式。这些表达式所预示的规律,或与已知的实验结果一致,或与数值模拟的结果一致。

**关键词** 光纤光学; 色散缓变光纤; 合项法; 类同性项; 压缩长度

中图分类号 TN929.11

文献标识码 A

## A New Approach to the Problems of Third-Order Dispersion in the Fiber with Slowly Decreasing Dispersion

LI Chao, WU Ting-wang

(Application Physics Department, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract** In this paper, a brief mathematic method is used to analyze the compression effect of negative third-order and fourth-order dispersion on soliton in nonlinear Schrödinger equation involved with high-order dispersion in the fiber with slowly decreasing dispersion. The mathematic expressions of the shift of the optimum compression length are got. Their predictions agree quite well with either the known-experiment results or numerical simulation. At the same time, the research is also extended in the positive third-order dispersion and dark soliton.

**Key words** fiber optics; fiber with slowly decreasing (FSDD); terms' combination; similar-character terms; compression length

### 1 引言

负三阶色散对孤子的压缩效应是一种十分重要的现象,国内外已有不少人对此进行了富有成效的研究<sup>[1-3]</sup>。但从目前发表的文章来看,还未见有人对压缩效应给出较为精确的定量描述,他们大都是采用数值模拟的方法,进行定性分析。这里尝试了一种新而简洁的数学方法,成功地导出了压缩长度的数学表达式,然后把它应用于色散缓变光纤中,并与数值模拟的结果相比较,结果吻合得非常好。同时对负四阶色散的压缩效应也进行了分析。

### 2 色散缓变光纤中的三阶色散问题

#### 2.1 理论模型

如果忽略光纤损耗(因为现有的光纤损耗可以做得很低,而且脉冲压缩时所需的光纤长度较短,通常为几十到几百米)以及自变陡效应(因为对于初始宽度为飞秒量级的脉冲传输,自变陡效应相对于其

他高阶效应可忽略不计),而仅仅考虑拉曼自散射(RSS)效应和三阶色散效应,光纤中的超短光脉冲传输可由下述修正后的非线性薛定谔方程(NLSE)描述<sup>[4]</sup>

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\gamma \left( |A|^2 A - \Gamma_R A \frac{\partial |A|^2}{\partial t^2} \right) - \frac{i}{2} \beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \quad (1)$$

其中  $A$  为慢变包络振幅,  $\beta_2(z) = d^2\beta/d\omega^2$  为群速度色散,  $\gamma$  为非线性系数。

假定方程(1)的解具有如下形式

$$A = f(z, t) \exp\{i[k(z)z - w(z)t]\} \quad (2)$$

式中  $k(z), w(z)$  表示由于高阶微扰项的作用而使  $k$  和  $w$  沿  $z$  而变化。为描写方便,用  $k$  和  $w$  来代替  $k(z)$  和  $w(z)$ 。

将(2)式代入(1)式中,会发现“ $-\frac{i}{2} \beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ ”和“ $\frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}$ ”为类同性项,证明如下

作者简介: 李潮(1976-),男,华南理工大学应用物理系硕士研究生。主要从事光纤孤子通信、光纤激光器和太阳能电池方面的研究。E-mail: long.l.c@163.com

此时

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \exp[i(kz - \omega t)] \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial f}{\partial t} - \omega^2 f \right) \quad (3)$$

而

$$\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i \exp[i(kz - \omega t)] \omega \left( \frac{-i}{\omega} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 3i\omega \frac{\partial f}{\partial t} + \omega^2 f \right) \quad (4)$$

(4)式除(3)式,得

$$\frac{\frac{\partial^3 A}{\partial t^3}}{\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}} = i\omega \frac{-\frac{i}{\omega} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 3i\omega \frac{\partial f}{\partial t} + \omega^2 f}{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial f}{\partial t} - \omega^2 f} \quad (5)$$

由于  $\omega$  很大(约为  $10^{12}$  Hz),故(5)式可近似为

$$\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} / \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -i\omega, \text{ 即}$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = -i\omega \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (6)$$

由于高阶微扰项引起的频移  $\Delta\omega$  相对于  $\omega$  来说非常小,故“ $-i\omega$ ”可近似看作常数,因此“ $-\frac{i}{2}\beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ ”和“ $\frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}$ ”为类同性项。

因此,可以将二者的作用做等效处理而不影响方程(1)的解。

为描述方便,令

$$K = -\frac{i}{2}\beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} \quad (7)$$

将(6)式代人(7)式中可得

$$K = -\frac{i}{2} \left[ \beta_2(z) + \frac{1}{3}\omega\beta_3 \right] \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{i}{2}\beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (8)$$

其中

$$\beta_2(z) = \beta_2(z) + \frac{1}{3}\omega\beta_3 \quad (9)$$

(8)式表示的意义是:三阶色散项  $\frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3}$  的作用在很大的近似程度上等效于改变色散缓变量  $\beta_2(z)$  所引起的效果。下面具体分析这种效果。

## 2.2 压缩效应及其表达式

压缩效应已经有很多文献[1~3]提到过了,但还没有看到哪篇文献给出过表达式。这里从一个新的角度重新分析了压缩效应,并给出了压缩效应的表达式,如下所述。

一般而言,对于色散缓变光纤,  $|\beta_2(z)|$  为  $z$  的减函数,即

$$d|\beta_2(z)|/dz < 0 \quad (10)$$

如果我们研究的孤子是亮孤子,那么它工作在负色散区域,即:  $\beta_2(z) < 0$ , 此时(10)式变为

$$d\beta_2(z)/dz > 0 \quad (11)$$

由(9)式知,当三阶色散  $\beta_3 < 0$  时,相当于使  $\beta_2(z)$  减小,即:

$\Delta\beta_2(z) < 0$ , 由(11)式可知:  $\Delta z < 0$ 。

这相当于使不计三阶色散的图象向左平移。同理,如果三阶色散  $\beta_3 > 0$ , 将使图象右移。

假定不计三阶色散时的最佳压缩长度(即孤子压缩到最窄时所需的光纤长度)为  $z_0$ , 而在计及负三阶色散时相当于使  $\Delta z < 0$ , 故  $z_0$  将缩短至  $z_1$ 。

令  $\Delta l = z_1 - z_0$ , 利用(9)式,则  $\Delta l$  由下式决定

$$\beta_2(z_0 + \Delta l) = \beta_2(z) + \frac{1}{3}\omega\beta_3 \quad (12)$$

## 2.3 色散缓变光纤中负三阶色散的压缩效应假定

$$\beta_2(z) = \beta_2(0) \left( 1 - \theta \frac{z}{L_D} \right) \quad (13)$$

其中  $L_D = T_0^2 / |\beta_2(0)|$ ,  $\theta$  为色散缓变参数。显然,这是 Tajima 提出的色散缓变光纤<sup>[6]</sup>中的一种特殊情形,但却是常用的。下面,将讨论最佳压缩长度与三阶色散大小的关系。据知,这方面以前所做的研究都只是定性的,或只是通过数值模拟或实验的方法得出一些数据<sup>[6]</sup>。下面,将尝试对此做出定量的分析,并与数值模拟的结果做比较。

将(13)式代人(12)式中可得

$$\Delta l = -\frac{\omega\beta_3 L_D}{3\beta_2(0)\theta} \quad (14)$$

这里  $\Delta l = l_1 - l_0$ ,  $l_0$  为不计三阶色散时的最佳压缩长度,  $l_1$  为计及三阶色散时的最佳压缩长度。为描述方便,引入一个新变量  $l(\beta_3)$ , 表示最佳压缩长度是一

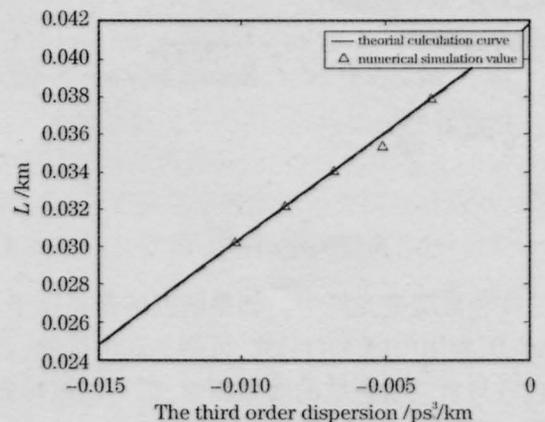


图1 色散缓变光纤中最佳压缩长度与负三阶色散的关系曲线以及理论计算与数值模拟的比较

Fig.1 Curve of the relationship between the optimum compression length and negative third-order dispersion by comparison to numerical simulation, with  $\theta = 0.0013$ ,  $\beta_2(0) = -1$  ps<sup>2</sup>/km,  $T_0 = 0.5667$  ps,  $\omega = 1.2 \times 10^{12}$  Hz

个随三阶色散  $\beta_3$  而变化的量(在其他参量不变的情况下),那么,  $\Delta l$  可重新写成

$$\Delta l = l(\beta_3) - l(0) = -\frac{w\beta_3 L_D}{3\beta_2(0)\theta}$$

即

$$l(\beta_3) = l(0) - \frac{w\beta_3 L_D}{3\beta_2(0)\theta} \quad (15)$$

由(15)式知,  $l$  与  $\beta_3$  是成线性关系的。

图 1 是理论值与数值模拟的比较图。

虽然这里讨论的只是色散缓变光纤中的一种特殊情形,但这种方法对于色散缓变光纤的其他形式,也是具有普遍意义的。

### 3 色散缓变光纤中的四阶色散问题

很多文献都认为<sup>[7,8]</sup>,四阶色散将扩展脉宽,严重影响传输效率。但这些结论都是针对正四阶色散得出的,下面将证明:如果可以拉制出具有负四阶色散的色散缓变光纤,则负四阶色散也将对亮孤子脉冲起压缩作用。

为了研究方便,让光纤工作在最小群速度色散附近,这时三阶色散消失而四阶色散成为主要的高阶色散项。此时 NLSE 可写为<sup>[9]</sup>

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} - \gamma |A|^2 A \quad (16)$$

其中  $\beta_2$  和  $\beta_4$  分别是光纤的二阶和四阶色散系数,  $\gamma$  为非线性系数。

与处理三阶色散的方法一样,我们可以发现二阶色散项 " $\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$ " 和四阶色散项 " $-\frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4}$ " 为类同性项,只不过此时

$$K = \frac{\beta_2^2(z)}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} = \frac{1}{2} \left[ \beta_2(z) + \frac{w^2}{12} \beta_4 \right] \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \beta_2'(z) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (17)$$

其中

$$\beta_2'(z) = \beta_2(z) + \frac{w^2}{12} \beta_4 \quad (18)$$

在色散缓变光纤中,如果研究的是亮孤子,即  $\beta_2(z) < 0$ ,利用(9)式和(11)式,可得  $\Delta z < 0$ ,因此,负四阶色散与负三阶色散的效果相似,都可以缩短光纤的最佳压缩长度,有利于孤子脉冲压缩。只不过此时压缩的长度  $\Delta L$  不再由(12)式决定,而改由下面的方程决定:

$$\beta_2(z_0 + \Delta L) = \beta_2(z_0) + \frac{w^2}{12} \beta_4 \quad (19)$$

对于暗孤子[即  $\beta_2(z) < 0$ ],情况相反,此时正的四阶色散反而有利于暗孤子的压缩。

### 4 结 论

使用一种新而简洁的数学方法,并应用于复杂的孤子方程中,得到了比较丰富的结果。其中有的结果与过去的一些经典文献相同,有些结果则是新的。更为重要的是,这种方法不仅应用于孤子方程中是有效的,而且对于其他复杂方程的近似求解,也具有一定的启发意义。

### 参 考 文 献

- 1 S. V. Chernikov, E. M. Dianov, D. J. Richardson *et al.* Soliton pulse compression in dispersion-decreasing fiber[J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(7):476-478
- 2 Zhang Shuming, Xu Wencheng, Luo Aiping *et al.* Enhanced compression of femtosecond soliton in fibers with slowly decreasing dispersion[J]. *Chinese J. Lasers*, 2001, **A28**(7): 599-602  
张书敏,徐文成,罗爱平等.色散缓变光纤中飞秒光脉冲的增强压缩[J].中国激光,2001, **A28**(7):599-602
- 3 S. L. Palacios, J. M. Fernandez. Bright solitary waves in high dispersive media with parabolic nonlinearity law: the influence of third order dispersion[J]. *J. Mod. Opt.*, 2001, **48**(11):1691-1699
- 4 Kai Choong chan, Hai Feng Liu. Effect of third-order dispersion on soliton-effect pulse compression[J]. *Opt. Lett.*, 1994, **19**(1): 49-51
- 5 Kazuhito Tajima. Compensation of soliton broadening in nonlinear optical fibers with loss [J]. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(1): 54-56
- 6 Cao Wenhua, Liu Songhao. Soliton-effect pulse compression in optical fibers with negative third-order dispersion[J]. *Chin. J. Quant. Electron.*, 1999, **16**(1):9-15  
曹文华,刘颂豪.负三阶色散光纤中的孤子效应脉冲压缩[J].量子电子学报,1999, **16**(1):9-15
- 7 Anders Höök, Magnus Karlsson. Ultrashort solitons at the minimum-dispersion wavelength: effects of fourth-order dispersion[J]. *Opt. Lett.*, 1993, **18**(17):1388-1390
- 8 Xie Xiaoping, Zhao Shanghang. Study for fourth-order dispersion of fs soliton pulse propagation [J]. *J. Optoelectronics-Laser*, 2002, **13**(4):368-370  
谢小平,赵尚弘. fs 光孤子脉冲传输过程中四阶色散研究[J].光子·激光,2002, **13**(4):368-370
- 9 S. B. Cavalcanti, J. C. Cressoni. Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode nonlinear Schrödinger equation. *Phys. Rev. A*, 1991, **43**:6162