文章编号：0258-7025(2004)Supplement-0023-03

线性光学器件和量子纠缠的产生

宋 朋，夏云杰
(曲阜师范大学物理工程学院，山东 曲阜 273165)

摘要 研究了奇偶相干态在量子信息领域的应用。以具有特殊非经典性质的奇偶相干态作为无损耗分束器的输入态，来制备量子纠缠。利用无损耗分束器的幺正矩阵表示和三维角动量转动群之间的变换，将分束器的输入和输出态密度算符联系起来，从而得到其输出关联光子数分布。若分别以真空态和奇或偶相干态作为分束器的两个输入态，得到的输出态是具有量子纠缠性质的。若以奇偶相干态分别作为分束器的两个输入态，其输出态将得到更为复杂的量子纠缠。

关键词 量子光学；量子信息；分束器；量子纠缠；非经典性质
中图分类号 O431.2 **文献标识码** A

Linear Optical Elements and Generation of Quantum Entanglement

SONG Peng， XIA Yun-jie
(*College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu, Shandong* 273165, *China*)

Abstract The application of even and odd coherent states in quantum information is studied. We generate a kind of entanglement with beam splitter by inputting even and odd coherent states into lossless beam splitter. We relate the density operators at the input and output ports of the beam splitter by means of the angular-momentum transformation and the connection between it´ s unitary matrix representation and three-dimensional angular-momentum group. Then we get the joint output photo-number distribution. When the vacuum state is injected into one input port while even or odd coherent state is injected into the other, quantum entanglement is generated at the output ports. Even and odd coherent states have the opposite output quantum entanglement properties in this case. When arbitrary even or odd coherent states are injected into both of separate input ports, there will be more complicated quantum entanglement at both of output ports.

Key words quantum optics; quantum information; beam splitter; quantum entanglement; nonclassicality

1 引 言

量子纠缠是当前量子信息处理的基础和核心[1]。在量子密码通讯、量子计算中量子纠缠起着关键性的作用[2]。在理论和实验上，对量子纠缠的产生和特性的研究都取得了较大的进步。比如，利用参量转换方法就可以产生偏振态纠缠光子[3]。

利用线性光学器件——分束器同样能产生量子纠缠。M. S. Kim 等已经研究了以多种纯态（包括Fock 态和压缩态）作为分束器的输入态时输出态的量子纠缠特性[4]；并提出了分束器量子纠缠产生的假设：分束器输出态产生量子纠缠的必要条件是输入态具有非经典性质。后来 Wang Xiangbin 证明了量子纠缠产生定理[5]。

本文主要研究了将具有特殊非经典性质的奇偶相干态[6]作为输入态时，无损耗同步分束器（简称分束器）输出态之间的量子纠缠性质。我们发现，如果在一个输入端输入真空态，另一个输入端输入奇相干态或偶相干态，在输出端将产生量子纠缠。如果分别以奇偶相干态作为分束器的两个输入态，将得到更为复杂的量子纠缠。结果表明，具有非经典性质的奇偶相干态通过分束器能够产生量子纠缠，为量子纠缠产生定理提供新的支持。

2 处理方法

奇偶相干态是具有特殊性质的非经典态，它的特殊性在过去的多篇文献[7,8]中讨论研究过。奇偶相

作者简介：宋 朋(1980-)，男，山东曲阜师范大学物理工程学院硕士研究生，主要从事量子光学、量子信息研究。
E-mail: song_p1980@sina.com

干态在粒子数表象中表示为[9]

$$|\alpha\rangle_o=(\mathrm{sh}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}}|2n+1\rangle \quad (1)$$

$$|\alpha\rangle_e=(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}}|2n\rangle \quad (2)$$

分别用 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$ 描述无损耗同步分束器的两个输入端,用 $\hat{c}$ 和 $\hat{d}$ 描述分束器的两个输出端,用 r, t 表示分束器的反射系数和透射系数。则分束器的变换算符 $\hat{B}$ 可以表示为

$$\hat{c}=\hat{B}\hat{a}\hat{B},\quad \hat{d}=\hat{B}\hat{b}\hat{B}^{+} \quad (3a)$$

$$\hat{B}=\exp\left\{\frac{\theta}{2}\left[\hat{a}^{+}\hat{b}\exp(\mathrm{i}\varphi)-ab^{+}\exp(-\mathrm{i}\varphi)\right]\right\} \quad (3b)$$

$$r=\sin\frac{\theta}{2},\quad t=\cos\frac{\theta}{2}$$

其中,$\varphi=\phi_r-\phi_t$ 是反射光场与透射光场之间的位相差。

利用 Schwinger 关系将分束器的变换算符 B 投影到三维的角动量空间上。

$$L_1=(a^{+}b+b^{+}a)/2 \quad (4a)$$

$$\hat{L}_2=(a^{+}b-b^{+}\hat{a})/2\mathrm{i} \quad (4b)$$

$$\hat{L}_3=(\hat{a}^{+}\hat{a}-\hat{b}^{+}\hat{b})/2 \quad (4c)$$

定义角动量升降算符

$$L_{+}=L_1+iL_2=a^{+}b,\quad L_{-}=L_1-iL_2=b^{+}a$$

那么变换算符 B 可以写成[10]

$$B(t,\phi_t,\phi_r)=D^{+}(\xi)\exp(-\mathrm{i}2\phi_t L_3) \quad (5)$$

其中,

$$D(\xi)=\exp(\xi L_{+}-\xi^{*}L_{-}),\quad \xi=\arccos(t^{1/2})\exp[-i(\phi_t-\phi_r)]$$

3 奇或偶相干态与真空态叠加输入

在分束器的输入端口 1 输入真空态,在输入端口 2 输入偶相干态,其输出态可以表示为 $B|0,\alpha_e\rangle$,

$$B|0,\alpha_e\rangle=(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{(2N)!}}\sum_{k=0}^{2N}C_k^{2N}|k,2N-k\rangle \quad (6a)$$

在(6a)式中将求和次序进行交换,改写为

$$\hat{B}|0,\alpha_e\rangle=(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{N=k}^{\infty}\frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{(2N)!}}C_{2k}^{2N}|2k,2N-k\rangle+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{N=k+1}^{\infty}\frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{(2N)!}}C_{2k+1}^{2N}|2k+1,2N-2k-1\rangle\right] \quad (6b)$$

其中

$$C_k^N=\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}^{1/2}r^k t^{N-k}\exp(\mathrm{i}k\varphi),\qquad \begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}=\frac{N!}{k!\ (N-k)!},$$

同样,在分束器的输入端口 1 输入真空态,在输入端口 2 输入奇相干态,其输出态可以表示为 $B|0,\alpha_o\rangle$,

$$\hat{B}|0,\alpha_o\rangle=(\mathrm{sh}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2N+1}}{\sqrt{(2N+1)!}}\sum_{k=0}^{2N+1}C_k^{2N+1}|k,2N+1-k\rangle \quad (7a)$$

$$\hat{B}|0,\alpha_o\rangle=(\mathrm{sh}|\alpha|^2)^{-1/2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{N=k}^{\infty}\frac{\alpha^{2N+1}}{\sqrt{(2N+1)!}}C_{2k}^{2N+1}|2k,2N+1-2k\rangle+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{N=K}^{\infty}\frac{\alpha^{2N+1}}{\sqrt{(2N+1)!}}C_{2k+1}^{2N+1}|2k+1,2N-2k\rangle\right] \quad (7b)$$

由式(6b),(7b)可见,分束器的输出态产生了量子纠缠。尤其特殊的是,对于偶相干态而言,如果用光子探测器对输出端口 1 进行探测后,得到奇数个光子,那么在输出端口 2 必定会因为量子纠缠而塌缩到所有奇数态的集合态上,即

$$(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{N=k+1}^{\infty}\frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{(2N)!}}C_{2k+1}^{2N}|2N+-2k-1\rangle \quad (8)$$

如果输出端口 1 经探测后得到偶数个光子,那么输出端口 2 的输出态必定会塌缩到所有偶数态的集合态上,即

$$(\mathrm{ch}|\alpha|^2)^{-1/2}\sum_{N=k}^{\infty}\frac{\alpha^{2N}}{\sqrt{(2N)!}}C_{2k}^{2N}|2N\rangle \quad (9)$$

对于偶相干态而言,性质恰恰与之相反。这与奇偶相干态在压缩、反聚束效应等非经典性质上具有相互排斥的性质类似。

4 奇或偶相干态分别作为输入态

在分束器的两个输入端口输入任意的奇或偶相干态,会得到以下 4 种情况

$$\hat{B}|\alpha_o,\alpha_o\rangle,\ \hat{B}|\alpha_o,\alpha_e\rangle,\ \hat{B}|\alpha_e,\alpha_o\rangle,\ \hat{B}|\alpha_e,\alpha_e\rangle$$

将这四种情况展开,得到

$$\hat{B}|\alpha_o,\alpha_o\rangle=(\mathrm{sh}|\alpha_1|^2\mathrm{sh}|\alpha_2|^2)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{2n_1+1}\alpha_2^{2n_2+1}}{\sqrt{(2n_1+1)!\ (2n_2+1)!}}\hat{B}|2n_1+1,\ 2n_2+1\rangle \quad (10)$$

$$\hat{B}|\alpha_o,\alpha_e\rangle=(\mathrm{sh}|\alpha_1|^2\mathrm{ch}|\alpha_2|^2)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{2n_1+1}\alpha_2^{2n_2}}{\sqrt{(2n_1+1)!\ (2n_2)!}}\hat{B}|2n_1+1,\ 2n_2\rangle \tag{11}$$

$$\hat{B}|\alpha_e,\alpha_o\rangle=(\mathrm{ch}|\alpha_1|^2\mathrm{sh}|\alpha_2|^2)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{2n_1}\alpha_2^{2n_2+1}}{\sqrt{(2n_1)!\ (2n_2+1)!}}\hat{B}|2n_1,\ 2n_2+1\rangle \tag{12}$$

$$\hat{B}|\alpha_e,\alpha_e\rangle=(\mathrm{ch}|\alpha_1|^2\mathrm{ch}|\alpha_2|^2)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{2n_1}\alpha_2^{2n_2}}{\sqrt{(2n_1)!\ (2n_2)!}}\hat{B}|2n_1,\ 2n_2\rangle \tag{13}$$

要得到上面四式的具体展开,关键是得到粒子数态经过分束器后的演化结果 $\hat{B}|n_1,n_2\rangle$,

$$\hat{B}|n_1,n_2\rangle=\sum_{N_1,N_2}\exp[-\mathrm{i}(n_1-N_1)\phi]\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}(-1)^{n_1-k}r^{n_1+n_2-k-l}t^{k+l}\frac{\sqrt{n_1!\ n_2(n_2+k-l)!\ (n_1-k+l)!}}{k!\ (n_1-k)!\ l!\ (n_2-l)!}|n_1+k-l,\ n_1-k+l\rangle=$$
$$\sum_{m=-n_2}^{n_1}\exp[-i(n_1-n_2-m)\phi]\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}(-1)^{n_1-k}r^{n_1+n_2-k-l}t^{k+l}\frac{\sqrt{n_1!\ n_2!\ (n_2+m)!\ (n_1-m)!}}{k!\ (n_1-k)!\ l!\ (n_2-l)!}|n_2+m,\ n_1-m\rangle \tag{14}$$

其中 N_1 和 N_2 分别表示 1 和 2 输出端口的粒子数。将式(14)代入式(10)中,得到下面结果

$$\hat{B}|\alpha_o,\alpha_o\rangle=(\mathrm{sh}|\alpha_1|^2\mathrm{sh}|\alpha_2|^2)^{-1/2}\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{2n_1}\alpha_2^{2n_2+1}}{\sqrt{(2n_1+1)!\ (2n_2+1)!}}\sum_{m=-2n_2}^{2n_1}\exp[-i(2n_1-2n_2-m)\phi]\sum_{k=0}^{2n_1+1}\sum_{l=0}^{2n_2+1}(-1)^{2n_1-k}r^{2n_1+2n_2+2-k-l}t^{k+l}\times$$
$$\frac{\sqrt{(2n_1+1)!\ (2n_2+1)!\ (2n_2+m+1)!\ (2n_1-m+1)!}}{k!\ (2n_1-k+1)!\ l!\ (2n_2-l+1)!}|2n_2+m+1,\ 2n_1-m+1\rangle. \tag{15}$$

与此类比,将式(14)代入式(11)~(13)中可以得到其他三种情况的具体展开式。由具体展开式可以肯定地得出:分束器的输出态也具有量子纠缠特性。

由以上讨论可以看出,具有非经典性质的奇偶相干态经过分束器后，能够在输出态产生量子纠缠。这从另一方面检验了量子纠缠产生定理。并且其纠缠性质较为复杂,我们将在以后深入研究这些纠缠态的性质其应用。

参 考 文 献

1 C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo. Quantum information and computation [J]. *Nature* (London), 2000, **404**(6775):247~ 255

2 A. K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1991, **67**(6):661~663

3 P. G. Kwiabt, S. Barraza-Lopez, A. Stefanov *et al.*. Experimental entanglement distillation and 'hidden' non-locality [J]. *Nature*, 2001, **409**(6823):1014~1017

4 M. S. Kim, W. Son, V. Buzck *et al.*. Entanglement by a splitter: Nonclassicality as a prerequisite for entanglement [J]. Phys. Rev. A, 2002, 65:032323-1 ~032323-7

5 Wang Xiang-bin. Theorem for the beam-splitter entangler [J]. *Phys. Rev. A*, 2002, **66**:024303-1~024303-2

6 Yunjie Xia and Guangcan Guo. Nonclassical properties of even and odd coherent states [J]. *Phys. Lett. A*,1989, **136**(6):281~283

7 Xia Yunjie, Li Hongzhen, Guo Guangcan. Higher-order squeezing and quasiprobability distribution functions of ever and odd coherent states [J]. *Acta Physica Sinica*, 1991, **40**(3):386~392
夏云杰,李洪珍,郭光灿. 奇偶相干态的高价压缩及其准概率分布函数[J]. 物理学报, 1991, **40**(3):386~392

8 Xia Yunjie, Guo Guangcan. Some properties of odd and even coherent states [J]. *Chinese J. Quantum Electronics*, 1988, **5**(4):301~305
夏云杰,郭光灿. 奇偶相干态的某些性质[J]. 量子电子学,1988, **5**(4):301~305

9 M. Hillery. Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field [J]. *Phys. Rev. A*, 1987, **36**(8):3796~3802

10 Richard A. Campos, Bahaa E. A. Saleh *et al.*. Quantum-mechanical lossless beam splitter: SU (2) symmetry and photon statistics[J]. *Phys. Rev. A*, 1989, **40**(3):1371~1384