

文章编号: 0258-7025(2004)Supplement-0020-03

Tavis-Cummings 模型中量子光学和量子信息 有关问题的研究

夏云杰, 左占春, 赵加强

(曲阜师范大学物理工程学院, 山东 曲阜 273165)

摘要 研究了 Tavis-Cummings 模型时间演化特性和其中的光场非经典性质。精确求解了体系中光场的二阶相干函数, 着重讨论了二阶相干函数和原子间耦合强度的关系。对体系可能产生的量子纠缠进行了详细的研究, 在合适的初始条件下体系可以产生 3 bit 完全纠缠态, 利用 Coffman 对 3 体纠缠的定义讨论了体系 3 bit 纠缠的纠缠度。在特定的初始条件下, 体系产生 W-纠缠态, 给出了产生 W-纠缠态的必要条件, 研究了纠缠量随三体所处的初始状态、原子间及原子与场之间的耦合系数变化而变化关系。

关键词 量子光学; 非经典光场; 量子纠缠

中图分类号 O431.2

文献标识码 A

On Quantum Optics and Quantum Information Questions in Tavis-Cummings Model

XIA Yun-jie, ZUO Zhan-chun, ZHAO Jia-qiang

(College of Physics Engineering, Qufu Normal University, Qufu, Shandong 273165, China)

Abstract In this paper, the time evolution of Tavis-Cummings model and the non-classical properties of field are studied. The function of second order coherence is accurately evaluated and the relation between second order coherence function and atoms coupling is discussed. The quantum entanglement produced in this system is studied in detail. The three-qubit entangled state can be obtained under the proper initial state. Using the Coffman definition of three-particle entanglement, the entanglement measure of three-qubit is discussed in this system. The system will evolve into W-entangled state for some initial conditions and the necessary condition for W-entangled state is given. The 3-tangle of the system will change with the system initial state, coupling coefficients between the two atoms and field or atoms.

Key words quantum optics; non-classical field; quantum entanglement

1 引言

Tavis-Cummings 模型是量子光学和近年来量子信息研究的重要体系, 它可用来产生非经典光场和量子纠缠, 并在量子隐形传态和量子密集编码等方面有重要的应用。这一体系描述了两原子与单模光场之间的相互作用, 在一定条件下具有精确求解的特点。文献[1]研究了偶极作用对光场性质的一些影响。而文献[2]根据纠缠张量方法, 提出了用于表示三体及三体中两两之间的纠缠程度的物理量——纠缠量。

在 T-C 模型中存在着原子间和原子与场间的相互耦合作用, 将对体系的性质产生影响。而且体系初始时刻所处的状态也会对系统的演化产生影响, 在合适的初始条件下体系可以产生 3 bit 完全纠缠态。

在适当选择耦合系数后, 体系产生 W-纠缠态, 给出了产生 W-纠缠态的必要条件, 研究了纠缠量随三体所处的初始状态、原子间及原子与场之间的耦合系数变化而变化关系。

2 Tavis-Cummings 模型及其时间演化

在 Schrödinger 绘景中, 旋波和偶极近似下, T-C 模型中的二定态全同二能级原子与单模光场相互作用的哈密顿量为:

$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_x + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + g\hbar(a^+\sigma_{-1} + a\sigma_{+1}) + g\hbar(a^+\sigma_{-2} + a\sigma_{+2}) + \Omega\hbar(\sigma_{-1}\sigma_{+2} + \sigma_{-2}\sigma_{+1}) \quad (1)$$

式中 ω_0 表示原子的本征跃迁频率, ω 表示光场的频率, σ_x 和 σ_z 为原子的自旋算符, a^+ 和 a 为光子产生和湮灭算符, g 为原子和光场的耦合常数, Ω 为原子

作者简介: 夏云杰(1963-), 男, 曲阜师范大学物理工程学院教授, 主要从事量子光学、量子信息学的研究。

E-mail: yjxia@qfnu.edu.cn

间的偶极-偶极相互作用强度。

设初始时刻光场处在真空态,双原子体系处在激发态和基态的相干叠加态。则体系的初始状态为:

$$|\psi(0)\rangle = [C_1(0)|g,g\rangle + C_3(0)|g,e\rangle + C_5(0)|e,g\rangle + C_7(0)|e,e\rangle] \otimes |0\rangle \quad (2)$$

t 时刻体系状态的波函数演化为:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = & C_1(t)|g,g,0\rangle + C_2(t)|g,g,1\rangle + \\ & C_3(t)|g,e,0\rangle + C_4(t)|g,e,1\rangle + \\ & C_5(t)|e,g,0\rangle + C_6(t)|e,g,1\rangle + \\ & C_7(t)|e,e,0\rangle + C_8(t)|g,g,2\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

在共振条件下求解薛定谔方程可得:

$$C_1(t) = C_1(0) \quad (4)$$

$$C_2(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) A \sin\lambda_1 t \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_3(t) = & \frac{i}{2g} \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) \left(A\lambda_1 \cos\lambda_1 t - \frac{i\Omega A}{2} \sin\lambda_1 t \right) + \\ & \frac{C_3(0) + C_5(0)}{2} \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C_5(t) = & \frac{i}{2g} \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) \left(A\lambda_1 \cos\lambda_1 t - \frac{i\Omega A}{2} \sin\lambda_1 t \right) - \\ & \frac{C_3(0) + C_5(0)}{2} \exp(i\Omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$C_4(t) = C_6(t) = -\frac{3igC \exp(-i\Omega t/2)}{\lambda_2} \sin\lambda_2 t \quad (8)$$

$$C_7(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) (C \cos\lambda_2 t + D \sin\lambda_2 t) + \frac{2}{3} C_7(0) \quad (9)$$

$$C_8(t) = \sqrt{2} \left[\exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) (C \cos\lambda_2 t + D \sin\lambda_2 t) - C \right] \quad (10)$$

$$\text{其中 } A = \frac{-ig[C_3(0) + C_5(0)]}{\lambda_2}, \quad C = \frac{C_7(0)}{3}, \quad D = \frac{i\Omega C_7(0)}{6\lambda_2},$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\Omega^2 + 8g^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\Omega^2 + 24g^2}}{2}.$$

3 二阶相干函数的演化特性

光场的二阶相干函数定义为:

$$G^{(2)}(t) = \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle / \langle a^{\dagger} a \rangle^2 \quad (11)$$

当 $G^{(2)}(t) \geq 1$ 时,光场呈现聚束效应,此时属于经典光场;当 $G^{(2)}(t) < 1$ 时,光场呈现反聚束效应和亚泊松光子统计,这是光场的纯量子效应。

以原子初态处在激发态为例研究,数值计算的结果如图 1,表明原子间的偶极-偶极相互作用对辐射光场的性质有强烈的影响。我们可以通过选择耦合强度来产生具有反聚束效应的非经典光场。

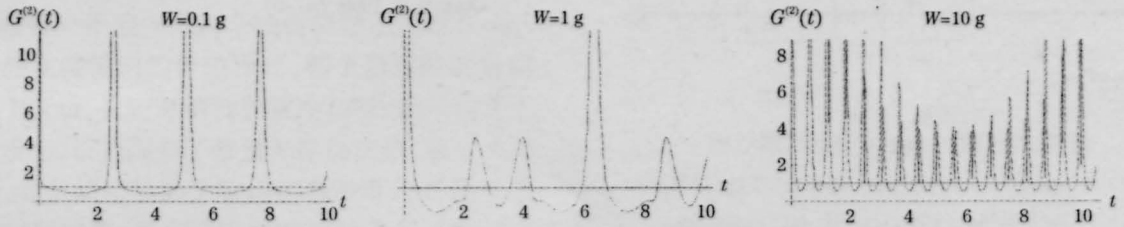


图 1 光场二阶相干度在不同 Ω 时随时间的变化关系

Fig.1 Time evolution of the second order coherence function for some different Ω

4 3 bit 纠缠的演化和 W-纠缠态的产生

4.1 3 bit 纠缠的演化

由(10)式可知,当原子与场间的相互作用远大于原子间的耦合时,在特定的时刻 $C_8(t)$ 很小;若原子间的耦合远大于原子和场间的相互作用, $C_8(t)$ 很小可以忽略,此时四体量子态 $|g,g,2\rangle$ 出现的几率很小,可以忽略,体系可产生 3 bit 完全纠缠态。根据 Coffman 的 3 bit 纠缠的定义^[9],该量子纠缠体系的 τ_{ABC} 为:

$$\tau_{ABC} = 4 |C_2^2 C_7^2 + C_3^2 C_6^2 + C_4^2 C_5^2 -$$

$2(C_4 C_5 C_6 C_3 + C_4 C_5 C_7 C_2 + C_6 C_3 C_7 C_2) + 4C_1 C_4 C_7 C_6|$ (12)
该体系的 τ_{ABC} 随时间演化特性(因篇幅限制,图形省略)主要表现为以下几个特点:1)当初始 $C_1(0)$ 为零

其他三态的几率均等或四态几率均等时,体系产生较强的三体纠缠;若四态几率不等,则体系的三体纠缠较弱。特别地,当初始两原子处于基态,场为单光子态,或两原子处于基态与激发态的纠缠,场为真空场时,体系演化为三体近似 W-纠缠态($\tau_{ABC}=0$)。2)原子与场的相互作用越强,三体纠缠越明显, τ_{ABC} 随时间的演化呈现出越稳定的周期性振荡,而且振荡频率越大。因此,原子间的耦合对体系的纠缠性质影响不大,而原子与场的耦合对三体纠缠的产生起到决定性的作用。

4.2 体系产生 W-纠缠的必要条件

W-纠缠态是在实验上很容易获得的一种量子态。满足一定条件的 T-C 模型体系可以演化为三体 W-纠缠态。

1) 初始时, 二原子同时处于基态, 场为单光子态, 则 t 时刻系统的态矢演化为:

$$|\psi(t)\rangle = C_2(t)|g, g, 1\rangle + C_3(t)|g, e, 0\rangle + C_5(t)|e, g, 0\rangle \quad (13)$$

其中

$$C_2(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) \cos\lambda_1 t \quad (14)$$

$$C_3(t) = C_5(t) =$$

$$\frac{i}{2g} \exp\left(-\frac{1}{2}i\Omega t\right) \left(-\frac{i\Omega A}{2} \cos\lambda_1 t - \lambda_1 \sin\lambda_1 t\right) \quad (15)$$

当 $C_2(t) = C_3(t) = C_5(t) = (1/3)^{1/2}$ 时, 体系将演化为 W-纠缠态。由(14)和(15)式不难得到, 演化为 W-纠缠态的必要条件为:

$$\Omega \leq \frac{4\sqrt{3}}{2}g \approx 2.309g. \quad (16)$$

2) 初始时二原子处于基态与激发态的纠缠态, 场为真空场, 则 t 时刻系统的态矢演化为:

$$|\psi(t)\rangle = C_2(t)|g, g, 1\rangle + C_3(t)|g, e, 0\rangle + C_5(t)|e, g, 0\rangle \quad (17)$$

其中 $C_2(t), C_3(t), C_5(t)$ 同(5), (6), (7)式。则当 $C_2(t) = C_3(t) = C_5(t) = (1/3)^{1/2}$ 时, 体系演化为 W-纠缠态。即体系演化为 W-纠缠态的必要条件为:

$$\frac{g^2}{\lambda_1^2} |C_3(0) + C_5(0)|^2 \geq \frac{1}{3} \quad (18)$$

相当于:

$$\begin{cases} C_3(0) \neq -C_5(0) \\ \Omega \leq 2\sqrt{10}g \approx 6.325g \end{cases} \quad (19)$$

5 结 论

通过系统地分析 T-C 模型中辐射光场的二阶相干度和三体纠缠的演化特性, 以及三体纠缠量与初始状态、原子之间和原子与光场间耦合强度的关系, 表明在合适的初始条件下体系可以产生 3 bit 完全纠缠态。通过对纠缠量的计算, 发现原子与场的耦合对三体纠缠的产生起到决定性的作用, 并且得到了产生 W-纠缠态的必要条件。

参 考 文 献

- 1 Tian Yonghong, Peng Jinsheng. Influences of dipole-dipole interaction between atoms on the properties of light in the Tavis-Cummings model [J]. *Acta Optica Sinica*, 2000, **20**(9): 1187-1193
田永红, 彭金生. Tavis-Cummings 模型中原子间偶极作用对光场性质的影响[J]. *光学学报*, 2000, **20**(9): 1187-1193
- 2 Tong Zhaoyang, Kuang Leman. Broadcasting of entanglement in three-particle Greenberger-Horne-Zeilinger state via quantum copying[J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2000, **17**: 469-474
- 3 V. Coffman, J. Kundu, W. Wootters. Distributed entanglement[J]. *Quant-ph*, 1999, **7**: 47-51