

文章编号: 0258-7025(2004)09-1070-05

受光阑限制离轴高斯光束的解析传输

周南润, 曾贵华

(上海交通大学电子工程系区域光纤通信网与新型光通信系统国家重点实验室, 上海 200030)

摘要 激光束的传输特性在激光技术应用中有着重要的意义。光束的解析传输问题是激光光学中的难点之一。从 Collins 公式出发, 详细研究了离轴高斯光束(OAGB)通过有光阑近轴 ABCD 光学系统的传输特性, 推导出了受硬边光阑、高斯光阑或余弦光阑限制的离轴高斯光束通过近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式, 并讨论了硬边光阑、高斯光阑或余弦光阑之间的关系。数值计算证明了所得公式的正确性和优点。分析了求解受多光阑限制的激光束通过近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式的困难性, 结果表明, 其困难性在于受单光阑限制激光束的解析传输公式中含有误差函数。

关键词 激光物理; 光学系统; 解析传输; 离轴高斯光束; 光阑

中图分类号 TN 241; TN 012 **文献标识码** A

Analytical Propagation Expressions for Apertured Off-Axis Gaussian Beams

ZHOU Nan-run, ZENG Gui-hua

(The State Key Laboratory on Fiber-Optic Local Area Networks and Advanced Optical Communication Systems, Electronic Engineering Department, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract The propagation properties of laser beams are of much significance in applications of laser technology. The analytical propagation equation for beams is one of the focuses in laser optics. Starting from the Collins formula, the properties of the off-axis Gaussian beam (OAGB) propagating through a paraxial ABCD optical system with an aperture are studied in detail. Moreover, the analytical equations for the off-axis Gaussian beam propagating through a paraxial ABCD optical system with hard-edged aperture, Gaussian aperture or cosine aperture are derived. The relationship among hard-edged aperture, Gaussian aperture and cosine aperture is discussed. The validity and advantage of results are confirmed and illustrated by numerical calculations. The difficulty of finding the analytical propagation formula of laser beams propagating through a paraxial ABCD optical system with multi-aperture is analyzed. It is shown that the difficulty is due to the existence of an error function in the analytical propagation formula for single-apertured laser beams.

Key words laser physics; optical system; analytical propagation; off-axis Gaussian beam; aperture

1 引 言

随着激光技术的广泛应用, 激光束通过近轴 ABCD 光学系统的传输与变换已成为激光光学中一个重要的研究课题。迄今, 文献中从 Collins 公式^[1]出发, 对各类光束通过无光阑或光阑衍射效应可忽略的光学系统的传输变换问题已进行了广泛的

研究^[2, 3]。然而, 在实际工作中, 光束传输常常受到光阑的限制, 光阑的衍射效应对光束传输特性的影响常常不可忽略。因此, 对受光阑限制光束在光学系统中的传输特性的研究更有实际意义。对这类问题, 除少数情况(例如高斯光束)已经得出解析结果外, 大多数情况下, 都是直接对 Collins 公式作数值计算, 物理意义不明确, 且需耗费大量机时。近年

收稿日期: 2003-06-09; 收到修改稿日期: 2003-08-21

基金项目: 国家自然科学基金(60102001)和教育部博士点专项基金资助项目。

作者简介: 周南润(1976—), 男, 江西吉安县人, 上海交通大学电子工程系博士生, 现从事量子保密通信和光通信方面的研究工作。E-mail: znr21@163.com

来,研究工作致力于寻求有光阑限制时光束传输的解析或近似解析公式,尤其是激光束通过含多光阑的近轴 ABCD 光学系统的解析传输或近似解析传输模型的建立,以节省计算机时,并便于进行物理分析和工程设计^[4~13]。

高斯光束中心轴线和光学系统光轴重合时的传输与变换特性问题已经解决^[14,15]。在实际光学系统中由于加工误差和系统结构要求等因素的影响,高斯光束的中心轴线往往会与光学系统光轴有一定偏离。对不受光阑限制的离轴高斯光束(OABG)的传输特性也取得了一定的成果^[16,17],然而对更为实际的受光阑限制离轴高斯光束的传输特性的研究涉及较少。本文从 Collins 公式出发,推导出了受硬边光阑限制离轴高斯光束通过近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式,并将解析传输公式推广应用于高斯光阑和余弦光阑的情况,数值计算例证明了它们的正确性和优点。文章还讨论了求解受多光阑限制的激光束通过近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式的困难性。

2 解析传输公式

光束通过近轴有限孔径 ABCD 光学系统时,由 Collins 公式可得出传输距离为 z 时场的分布,即

$$E(x, z) = \sqrt{i/(\lambda B)} \int_{-a}^a E(x', 0) T(x') \times \exp[-i\pi(Ax'^2 - 2xx' + Dx^2)/(\lambda B)] dx' \quad (1)$$

式中 λ 和 a 分别为光束的波长和光阑半宽度, $T(x)$ 为光阑透射率函数,对硬边光阑 $T(x) = 1$ 。由(1)式可得光强分布为 $I(x, z) = |E(x, z)|^2$ 。

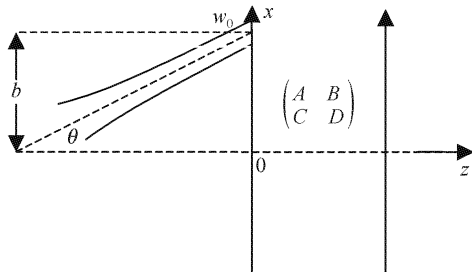


图 1 离轴高斯光束经光学系统变换的示意图
Fig. 1 Schematic of off-axis Gaussian beam (OAGB) conversion passing through optical system

为讨论方便,考虑一维情况。如图 1 所示,光束沿 z 轴传输,在直角坐标系下 $z = 0$ 平面上离轴高斯光束的场分布为

$$E(x, 0) = \exp[-(x - b)^2 \cos^2 \theta / w_0^2] \quad (2)$$

其中 b 为光束中心轴线相对于系统光轴(z 轴)的位移, θ 为光束中心轴线与系统光轴 z 的夹角, w_0 为束腰半宽度。将(2)式代入(1)式,整理得

$$E(x, z) = S \int_{-a}^a \exp[-(Px' - Q)^2] dx' \quad (3)$$

其中

$$S = \sqrt{i/(\lambda B)} \exp[Q^2 - i\pi Dx^2/(\lambda B) - b^2 \cos^2 \theta / w_0^2] \quad (4)$$

$$P = \sqrt{\cos^2 \theta / w_0^2 + i\pi A/(\lambda B)} \quad (5)$$

$$Q = i\pi x/(\lambda B P) + b \cos^2 \theta / (w_0^2 P) \quad (6)$$

积分(3)式得

$$E(x, z) = \frac{\sqrt{\pi} S}{2P} [\operatorname{erf}(aP + Q) + \operatorname{erf}(aP - Q)] \quad (7)$$

式中 $\operatorname{erf}(y)$ 为误差函数。

(7) 式是受硬边光阑限制离轴高斯光束通过近轴光学系统时的传输公式,它是解析的,这是我们得出的主要理论结果。由(7)式可知,受硬边光阑限制离轴高斯光束通过近轴光学系统的传输特性与初始离轴高斯光束参数、光学系统参数和光阑的参数有关,适当选择这些参数,可以控制出射光束的光强分布,以满足工程设计和应用上的要求。

由于 $\operatorname{erf}(\infty) = 1$, 当 $a \rightarrow \infty$ 时,由(7)式可以得到无光阑情况下离轴高斯光束的传输公式为

$$\bar{E}(x, z) = \sqrt{\pi} S / P \quad (8)$$

(8) 式的结果与文献[11]中的结果是一致的。解析传输公式的一个优点是光阑衍射效应对场分布的影响可以解析地表示出来,光阑衍射效应即(8)式与(7)式的差

$$\bar{E}(x, z) - E(x, z) = \frac{\sqrt{\pi} S}{P} \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\operatorname{erf}(aP + Q) + \operatorname{erf}(aP - Q)] \right\} \quad (9)$$

利用(9)式可以研究光阑对离轴高斯光束传输特性的影响,这样物理意义非常明确。

当光束中心轴线与系统光轴平行时 $\theta = 0$, (4), (5) 和(6)式分别简化为

$$S = \sqrt{i/(\lambda B)} \exp[Q^2 - i\pi Dx^2/(\lambda B) - b^2/w_0^2] \quad (10)$$

$$P = \sqrt{1/w_0^2 + i\pi A/(\lambda B)} \quad (11)$$

$$Q = i\pi x/(\lambda B P) + b/(w_0^2 P) \quad (12)$$

利用(7), (10), (11) 和(12)式可以研究位移对光束传输特性的影响。当光束位移 $b = 0$ 时, (4), (5) 和(6)式相应地简化为

$$S = \sqrt{i/(\lambda B)} \exp[Q^2 - i\pi D x^2 / (\lambda B)] \quad (13)$$

$$P = \sqrt{\cos^2 \theta / \omega_0^2 + i\pi A / (\lambda B)} \quad (14)$$

$$Q = i\pi x / (\lambda B P) \quad (15)$$

利用(7),(13),(14)以及(15)式可以研究夹角 θ 对光束传输特性的影响。

当 $\theta = 0$ 和 $b = 0$ 时,(2)式为高斯光束的场分布,(4),(5)和(6)式分别简化为(13),(11)和(15)式。(7),(13),(11)以及(15)式就是受硬边光阑限制高斯光束经近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式。

实际中,除了硬边光阑外,常使用高斯光阑和余弦光阑。下面将本文得出的受硬边光阑限制离轴高斯光束的解析传输公式直接推广到高斯光阑和余弦光阑。

对位于 $z = 0$ 面上透射率为

$$T(x) = \begin{cases} \exp(-x^2/\sigma^2) & -a \leq x \leq a \\ 0 & x > a \text{ 或 } x < -a \end{cases} \quad (16)$$

的高斯光阑(σ 为与高斯函数有关的参数)情况,只需将(5)式直接修改为

$$P = \sqrt{\cos^2 \theta / \omega_0^2 + i\pi A / (\lambda B) + 1/\sigma^2} \quad (17)$$

由(4),(6),(7)和(17)式决定的光束场分布就是离轴高斯光束通过受高斯光阑限制的近轴 ABCD 光学系统传输后的场分布。

对于余弦光阑, $T(x) = \cos(\Omega x)$,其中 Ω 为与余弦函数有关的参数,利用欧拉公式 $\cos(\Omega x) = [\exp(i\Omega x) + \exp(-i\Omega x)]/2$,用类似的方法,求得离轴高斯光束通过受余弦光阑限制的近轴 ABCD 光学系统的解析传输公式为

$$E(x, z) = \sum_{j=1,2} \sqrt{\pi} S_j \times [\operatorname{erf}(aP + Q_j) + \operatorname{erf}(aP - Q_j)] / (2P) \quad (18)$$

其中

$$Q_j = i\pi x / (\lambda B P) + b \cos^2 \theta / (\omega_0^2 P) + (-1)^j i\Omega / (2P) \quad (19)$$

$$S_j = \frac{\sqrt{i/(\lambda B)}}{2} \exp[Q_j^2 - i\pi D x^2 / (\lambda B) - b^2 \cos^2 \theta / \omega_0^2] \quad (20)$$

P 仍由(5)式描述。由(5),(18),(19)以及(20)式可以方便地研究受余弦光阑限制的离轴高斯光束经近轴 ABCD 光学系统的传输特性,因为(18)式也是解析的。

硬边光阑可以看作高斯光阑或者余弦光阑的特

例。当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时,由(16)式描述的高斯光阑退化为硬边光阑,相应地,将 $\sigma \rightarrow \infty$ 代入(17)式直接得出(5)式,即为硬边光阑的情况。当 $\Omega = 0$ 时,余弦光阑退化为硬边光阑,将 $\Omega = 0$ 代入(18),(19)和(20)式,得出的传输公式与硬边光阑情况下一致。

以上得出的所有传输公式都是解析的,给实际应用带来方便。从(7)式可知,解析公式中含有误差函数,如果激光束受多光阑限制,例如在本文考虑的系统后面再加上一个光阑,可以是硬边光阑、高斯光阑或余弦光阑,就意味着要将以误差函数为特征的(7)式的结果代替(2)式,再积分(1)式。这样,研究受多光阑限制激光束的解析传输问题等价于求以误差函数为被积分函数的解析积分结果。因此,对受多光阑限制激光束的传输问题,求解解析的传输公式是非常困难的,但直接采用 Collins 公式进行数值计算还是可行的。

3 数值计算

以受硬边光阑限制离轴高斯光束通过自由空间和透镜系统为例,作数值计算来说明解析传输公式的应用。计算结果如图 2~4 所示。图 2(a)和(b)分别为 $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ 和 $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ 时,受硬边光阑限制离轴高斯光束在自由空间中的光强分布,其他计算参数为 $\omega_0 = 2 \text{ mm}$, $a = 1.5 \text{ mm}$, $b = 0.3 \text{ mm}$, $\theta = \pi/20$, $z = 500 \text{ mm}$ 。图中实线为用解析传输公式(7)的计算结果;虚线为直接用 Collins 公式作数

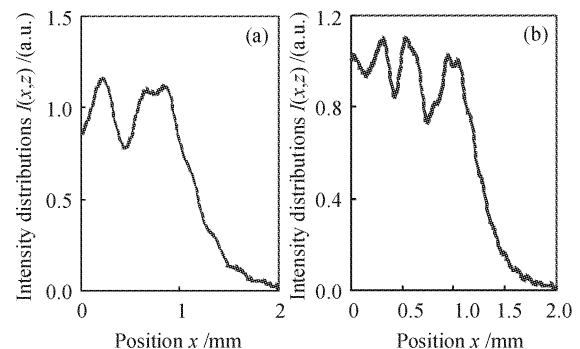


图 2 受硬边光阑限制离轴高斯光束在自由空间中的光强分布

Fig. 2 Intensity distributions of an OAGB propagating in free space with a hard-edged aperture

The solid line represents the result of Eq. (7) and the dash line represents the result calculated straightforwardly with Collins formula. (a) $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$; (b) $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$. The calculation parameters are $z = 500 \text{ mm}$, $\omega_0 = 2 \text{ mm}$, $a = 1.5 \text{ mm}$, $b = 0.3 \text{ mm}$, $\theta = \pi/20$

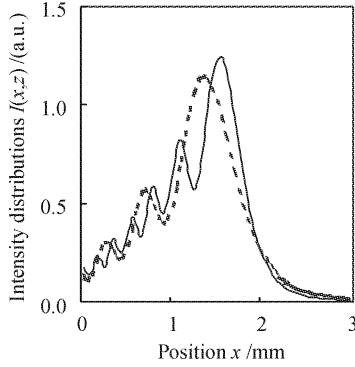


图 3 $\theta = 0$ 时受硬边光阑限制离轴高斯光束在自由空间中的光强分布

计算参数为 $z = 500 \text{ mm}$, $a = b = w_0 = 2 \text{ mm}$
实线对应 $\lambda = 0.63 \text{ }\mu\text{m}$, 虚线对应 $\lambda = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$

Fig. 3 Intensity distributions of an OAGB with $\theta = 0$ propagating in free space with a hard-edged aperture. The calculation parameters are $z = 500 \text{ mm}$, $a = b = w_0 = 2 \text{ mm}$. The solid line represents $\lambda = 0.63 \text{ }\mu\text{m}$ and the dash line represents $\lambda = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$

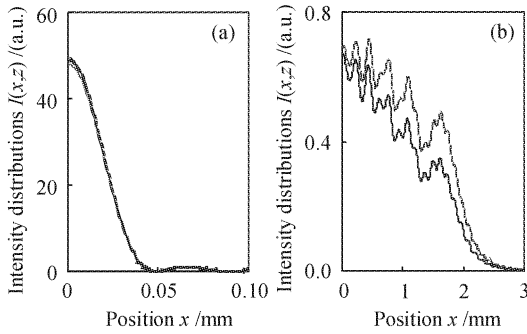


图 4 高斯光束和离轴高斯光束通过透镜光阑系统在相对传输距离为(a) $z/f = 1$, (b) $z/f = 2.5$ 时的光强分布

Fig. 4 Intensity distributions of Gaussian and OAGBs focused by an aperture lens at relative distance (a) $z/f = 1$, (b) $z/f = 2.5$. The solid lines represent an off-axis Gaussian beam and the dash lines represent a Gaussian beam

The calculation parameters are $f = 100 \text{ mm}$, $w_0 = 2 \text{ mm}$,
 $\lambda = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$, $a = 1.5 \text{ mm}$, $b = 0.3 \text{ mm}$, $\theta = \pi/20$

值积分的结果。由图可知,用解析传输公式和 Collins 公式所得的计算结果一致,但前者所耗时不到后者的 1/200(计算点数为 400 点),这充分说明了解析传输公式的正确性和优越性。 $\theta = 0$ 时,利用公式(10)~(12)可以得出受硬边光阑限制离轴高斯光束经光学系统后的光强分布。考虑 $a = b = w_0 = 2 \text{ mm}$ 的特殊情况,结果如图 3,其中 $z = 500 \text{ mm}$,实线对应 $\lambda = 0.63 \text{ }\mu\text{m}$,虚线对应 $\lambda = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$ 。由图可以看出,此时离轴高斯光束的光强极大值不

在光轴附近,这与实际情况相符。

设透镜光阑系统的变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$,图 4 是高斯光束和离轴高斯光束通过透镜光阑系统在相对传输距离为(a) $z/f = 1$, (b) $z/f = 2.5$ 时的光强分布。计算参数为透镜焦距 $f = 100 \text{ mm}$, $w_0 = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 1.3 \text{ }\mu\text{m}$, $a = 1.5 \text{ mm}$, $b = 0.3 \text{ mm}$, $\theta = \pi/20$ 。图中实线为离轴高斯光束的结果,虚线为高斯光束的结果。由图可知,离轴高斯光束的光强分布与高斯光束的光强分布有差别,在焦面上差别不大,在远离焦面时差别明显。这些差别是由于光束的中心轴线相对于系统光轴的位移 b 和夹角 θ 引起的。

4 结 论

从 Collins 公式出发,详细地研究了受硬边光阑限制离轴高斯光束通过近轴 ABCD 光学系统的传输特性,得到了解析形式的传输公式,并且给出了计算例。用解析传输公式不仅可以节省机时,而且便于进行物理分析。对于高斯光阑和余弦光阑的情况,本文同样得出了解析的传输公式。通过对受光阑限制离轴高斯光束传输特性的讨论,能更为准确地反映实际光学系统中激光束的传输变换特性。文中所得的结论在一些应用场合有其实际意义。适当选择光学系统参数、初始离轴高斯光束参数和光阑的参数,可以控制出射光束光强分布,以满足工程设计和应用上的要求。文中所采用的方法不仅适用于研究受光阑限制离轴高斯光束的传输特性,而且适用于研究其他受光阑限制激光束的传输特性。对于受单光阑限制的激光束,一般情况下还是有可能求出解析传输公式的,但对于受多光阑限制的激光束,一般情况下不太可能得出解析的传输公式,工程设计中的计算多半还是通过近似的方法或直接对 Collins 公式做数值积分的方法完成。

参 考 文 献

- 1 S. A. Collins. Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1970, **60**(9):1168~1177
- 2 Lü Baida. Propagation and Control of High-Power lasers [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999. 77~108
吕百达. 强激光的传输与控制[M]. 北京:国防工业出版社, 1999. 77~108
- 3 Ding Guilin, Lü Baida. Propagation of Hermite-Gaussian beams through a misaligned first-order optical system and decentered

- Hermite-Gaussian beams [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(3):223~226
- 丁桂林,吕百达. 厄米-高斯光束通过失调光学系统的变换和偏心厄米-高斯光束[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(3):223~226
- 4 Wang Xiqing, Lü Baida. Propagation of cosh-Gaussian beams through an apertured ABCD optical system [J]. *Acta Optica Sinica*, 2001, **21**(10):1214~1218
- 王喜庆,吕百达. 双曲余弦高斯光束通过有光阑限制的 ABCD 光学系统的传输[J]. *光学学报*, 2001, **21**(10):1214~1218
- 5 R. Martinez-Herrero, P. M. Mejias, M. Arias. Parametric characterization of coherent, lower-order Gaussian beams propagating through hard-edged apertures [J]. *Opt. Lett.*, 1995, **20**(2):124~126
- 6 Lü Baida, Luo Shirong. Beam propagation factor of hard-edged diffracted cosh-Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 2000, **178**(5):275~281
- 7 Tao Xiangyang, Zhou Nanrun, Lü Baida. Approximate analytical propagation equations of laser beams through a paraxial ABCD system with aperture [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2003, **15**(1):50~54
- 陶向阳,周南润,吕百达. 通过有光阑近轴 ABCD 光学系统激光束的近似解析传输公式[J]. *强激光与粒子束*, 2003, **15**(1):50~54
- 8 Zhou Nanrun, Lü Baida, Tao Xiangyang. Study of propagation properties of apertured super-Gaussian beam by using the Fourier series expansion [J]. *J. Jiangxi Normal University*, 2002, **26**(1):64~66
- 周南润,吕百达,陶向阳. 用傅里叶级数展开法研究受光阑限制的超高斯光束的传输特性[J]. *江西师范大学学报*, 2002, **26**(1):64~66
- 9 Tao Xiangyang, Zhou Nanrun, Lü Baida. Study on beam propagation properties based on Collins formula in frequency domain and Hankel transform [J]. *Laser Technology*, 2003, **27**(1):24~28
- 陶向阳,周南润,吕百达. 用频域 Collins 公式和 Hankel 变换研究光束的传输特性[J]. *激光技术*, 2003, **27**(1):24~28
- 10 Luo Shirong, Lü Baida. Propagation of flattened Gaussian beams through an aperture optical system [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(5):425~428
- 罗时荣,吕百达. 平顶高斯光束在有光阑光学系统中的传输[J]. *中国激光*, 2002, **A29**(5):425~428
- 11 Nanrun Zhou, Guihua Zeng. Propagation properties of Hermite-cosine-Gaussian beams through a paraxial optical ABCD system with hard-edge aperture [J]. *Opt. Commun.*, 2004, **232**:49~59
- 12 Tao Xiangyang, Zhou Nanrun, Lü Baida. Recurrence propagation equation of Hermite-Gaussian beams through a paraxial optical ABCD system with hard-edge aperture [J]. *Optik*, 2003, **114**(3):113~117
- 13 Qing Yusan, Lü Baida. M^2 -factor of hard-edge apertured Laguerre-Gaussian beams—self-convergent beam width method and comparison with the asymptotic analysis [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(3):231~235
- 卿与三,吕百达. 受硬边光阑限制的拉盖尔-高斯光束的 M^2 因子——自收敛束宽法及其与渐近分析法的比较[J]. *中国激光*, 2003, **30**(3):231~235
- 14 Zhou Nanrun, Tao Xiangyang, Lü Baida. Focusing properties of Gaussian beams through a compound optical system [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2002, **14**(4):497~500
- 周南润,陶向阳,吕百达. 高斯光束经复合光学系统的聚焦特性[J]. *强激光与粒子束*, 2002, **14**(4):497~500
- 15 Wang Xiqing, Liang Guodong, Lü Baida. Approximate close-form expression for Gaussian beams passing through an ABCD optical system with hard-edge aperture [J]. *High Power Laser and Particle Beams*, 2001, **13**(4):418~422
- 王喜庆,梁国栋,吕百达. 高斯光束通过有硬边光阑 ABCD 光学系统的近似解析传输公式[J]. *强激光与粒子束*, 2001, **13**(4):418~422
- 16 Ge Hua, Yang Kuntao. The research of conversion of off-axis Gaussian beam passing through optical system [J]. *Laser & Infrared*, 2003, **33**(1):68~70
- 葛 华,杨坤涛. 离轴高斯光束经光学系统变换后特性研究[J]. *激光与红外*, 2003, **33**(1):68~70
- 17 Shen Xuejü. The conversion of off-axis Gaussian beam passing through one order optical system [J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2000, **11**(6):600~601
- 沈学举. 离轴高斯光束经一阶光学系统的变换[J]. *光电子 • 激光*, 2000, **11**(6):600~601