

文章编号: 0258-7025(2004)05-0604-05

光子晶体光纤的 Galerkin 算法

王 智¹, 任国斌², 娄淑琴², 简水生²

(北京交通大学¹ 电子信息工程学院现代通信网实验中心, ² 光波技术研究所, 北京 100044)

摘要 光子晶体光纤(PCF)是由石英和空气孔构成的二维周期性介电常数分布的微结构光纤,人们已经提出了一些理论方法用于其模式特征的研究。以全反射光子晶体光纤为例,将其折射率结构分解为一个纯粹的中心缺陷结构和一个完美二维光子晶体的叠加,并分别选取厄米-高斯函数和余弦函数对其周期性折射率展开;同时将横向电场分布的 x, y 分量用正交归一化厄米-高斯(Hermite-Gauss)函数展开。从电磁场的波动方程出发,忽略横向电场之间的耦合,根据折射率和电场的展开式,得到关于各展开系数的矩阵和模式的特征方程。特征方程中涉及的各项矩阵元素都可以利用厄米-高斯函数的正交归一化性质及其他一些恒等式解析求得。求解该特征方程,可得到光子晶体光纤的传播常数和模场分布。利用此算法,可以进一步研究光子晶体光纤的模式特性、色散特性、偏振特性等。

关键词 光电子学;光子晶体光纤;Galerkin 算法;厄米-高斯函数

中图分类号 O 242.2; TN 253 **文献标识码** A

Galerkin Algorithm for Investigating the Photonic Crystal Fibers

WANG Zhi¹, REN Guo-bin², LOU Shu-qin², JIAN Shui-sheng²

(¹Modern Communication Network Lab, School of Electronic and Information Engineering,)
(²Institute of Lightwave Technology, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract The photonic crystal fiber is a kind of microstructured optical fiber with a 2-D periodical dielectric profile constructed by air/silica. There are a few models to investigate the mode characteristics. For the TIR PCF, as an example, the index profile can be considered as the construction of a pure center defect and a perfect 2-D photonic crystal with the periodic air-hole lattice, which can be expanded with the normalized Hermite-Gaussian basis set and cosine function respectively. From the electromagnetic wave equation, the mode eigen equation can be obtained with the algorithm when the transverse electric field is also expanded as the series of the Hermite-Gaussian basis. All elements in the eigen equation are evaluated analytically based on the orthonormality and some identities of the Hermite-Gaussian function. The propagation constant and the mode field distribution of the PCF can be calculated, hence the mode characteristics, the dispersion properties and the polarization properties can also be investigated with this algorithm.

Key words optoelectronics; photonic crystal fiber; Galerkin algorithm; Hermite-Gaussian basis

1 引 言

光子晶体光纤(PCF)是由石英和空气孔构成的具有二维周期性介电常数分布的微结构光纤,根据光纤芯区的缺陷大小及导光机理可将光子晶体光纤

分为两大类^[1]:全内反射导光型(TIR)和光子带隙导光型(PBG)。图 1 是光子晶体光纤横截面示意图,其中 d 为空气孔直径, Λ 为相邻孔距离, a 为等效芯半径, r_c 为芯区周期性位置上的空气孔半径。当 $r_c = 0$ 时,即为全内反射导光型光子晶体光纤,因为其

收稿日期:2003-02-24; 收到修改稿日期:2003-04-01

基金项目:北京交通大学攀登基金(PD242)资助项目。

作者简介:王 智(1971—),男,湖北省蕲春县人,通信与信息系统专业工学博士,北京交通大学副教授,主要从事光纤通信、光纤制作工艺、非线性光纤光学、光子晶体光纤和光电子学等方面的教学与科研工作。E-mail: zhiwang@center.njtu.edu.cn

芯区折射率比光子晶体包层等效折射率高,可以用全反射来解释其导光机理;当 $r_c > 0$ 时,即为光子带隙导光型光子晶体光纤,这种结构的光子晶体光纤不能简单地利用全反射来解释,而必须根据光子晶体能带理论研究其带隙结构和传输特性。

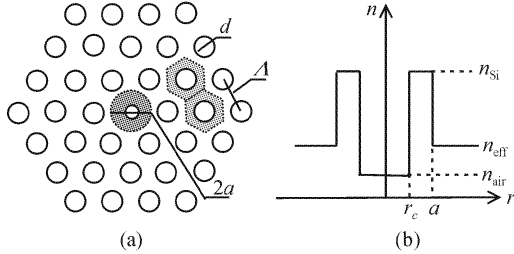


图 1 光子晶体光纤横截面

(a) 横截面; (b) 等效折射率剖面

Fig. 1 Cross section of the PCF

(a) cross section; (b) effective index profile

人们已经提出了一些理论模型和数学方法用于光子晶体光纤的研究。等效折射率模型是 Birks 等最早研究光子晶体光纤时,将其与传统光纤进行类比而提出的^[2],能较好地解释全内反射导光型光子晶体光纤的单模特性^[3],粗略地说明光子晶体光纤的色散性能^[4,5],当空气孔较大时,等效折射率模型一般不适用^[6]。平面波法^[7]是光子晶体理论中物理概念最清晰的一种方法,但其计算速度和精度都较低,一般用于分析光子晶体的能带结构^[8]。Galerkin 算法是根据电磁场的边界形状选取一组完备函数族,将场按该函数展开的方法,目前被人们利用的函数有 Lagurre-Gauss 函数和 Monro 等详细研究的厄米-高斯 (Hermite-Gauss) 函数^[6,9,10]等等。时域射线传输法、散射矩阵法、有限元法和有限时域差分法等是电磁场分析常用的算法,可用于分析复杂结构的光子晶体光纤,但实际算法过程和程序设计比较复杂,对计算条件要求较高。

对于 Galerkin 算法,只要完备函数族选取适当,数值分析结果都可以达到比较高的精度。以 $r_c = 0$ 的全内反射导光型光子晶体光纤为例,选取厄米-高斯函数和余弦函数对光纤的周期性折射率分布进行展开,同时将场分布用厄米-高斯函数展开,从电磁场的波动方程出发得到关于各展开系数的矩阵和特征方程,求解特征方程就可以得到光子晶体光纤的传播常数,进而可以研究其模式特性、色散特性、偏振特性等。

2 Galerkin 算法

2.1 矢量场波动方程

研究光子晶体光纤的模式特性时,如果认为光纤沿纵向均匀,模式电场可写成如下形式

$$\vec{E}(x, y, z) = [\vec{e}_t(x, y) + \vec{e}_z(x, y)]e^{j\beta z}e^{-\alpha z} \quad (1)$$

其中 β 为模式的传播常数, α 为光子晶体光纤衰减系数, $\vec{e}_t(x, y)$, $\vec{e}_z(x, y)$ 分别为横向场和纵向场矢量。不考虑光纤衰减,主要研究光子晶体光纤的模式特征即横向场分布,将横向场代入 Maxwell 方程可以得到纵向场矢量。 $\vec{e}_t(x, y)$ 可以分为 x, y 两个方向的偏振分量,即

$$\vec{e}_t(x, y) = e_x(x, y)\hat{x} + e_y(x, y)\hat{y} \quad (2)$$

将电场形式代入矢量波动方程^[11],可以得到

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 - \beta_x^2 + k^2 n^2)e_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(e_x \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} + e_y \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right) \\ (\nabla_t^2 - \beta_y^2 + k^2 n^2)e_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(e_x \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} + e_y \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 β_x, β_y 为分别沿 x, y 方向的两个偏振模式的传播常数, $n = n(x, y)$ 为横向折射率分布, $k = 2\pi/\lambda$ 为真空波数, $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 。式(3)是关于 e_x, e_y 的矢量耦合波动方程,如果忽略右侧两项即成为标量波动方程,并且有 $\beta_x = \beta_y$,为简单起见,并保持矢量性,不考虑两偏振模的耦合过程,将式(3)简化为

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 - \beta_x^2 + k^2 n^2)e_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(e_x \frac{\partial \ln n^2}{\partial x} \right) \\ (\nabla_t^2 - \beta_y^2 + k^2 n^2)e_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(e_y \frac{\partial \ln n^2}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

将电场和折射率分布用正交函数展开,然后求解式(4),可以得到模式电场的各种传输特性。

2.2 电场的展开

选取厄米-高斯函数将场展开,即

$$\begin{aligned} e_x(x, y) &= \sum_{a,b=0}^F \epsilon_{ab}^x \psi_a(x) \psi_b(y) \\ e_y(x, y) &= \sum_{a,b=0}^F \epsilon_{ab}^y \psi_a(x) \psi_b(y) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 F 为展开项数, F 的选取对计算精度有影响, $\psi_i(s)$ ($i = a, b, s = x, y$) 是正交归一化厄米-高斯函数,定义为

$$\psi_i(s) = \frac{2^{-i}\pi^{-1/4}}{\sqrt{(2i)!}\tilde{\omega}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\tilde{\omega}^2}\right) H_{2i}(s/\tilde{\omega}) \quad (6)$$

其中 $H_{2i}(s/\tilde{\omega})$ 为 $2i$ 阶厄米函数。

2.3 折射率的展开

图 1 所示的光子晶体光纤可以等价于一个完美二维光子晶体与一个纯粹的中心缺陷叠加,如图 2 所示。完美光子晶体光纤的折射率分布是周期性的,本文选择余弦函数展开;纯粹中心缺陷的折射率用厄米-高斯函数展开。于是折射率分布可表示为

$$n^2(x, y) = \sum_{a,b=0}^C C_{ab} \psi_a(x) \psi_b(y) + \sum_{a,b=0}^P P_{ab} \cos \frac{2\pi a x}{l_x} \cos \frac{2\pi b y}{l_y} \quad (7)$$

$$\ln n^2(x, y) = \sum_{a,b=0}^C C_{ab}^{\ln} \psi_a(x) \psi_b(y) + \sum_{a,b=0}^P P_{ab}^{\ln} \cos \frac{2\pi a x}{l_x} \cos \frac{2\pi b y}{l_y} \quad (8)$$

其中 $(C+1), (P+1)$ 分别为各展开式的项数, l_x, l_y 分别为周期性折射率分布在 x, y 两个方向上的周期,因为所研究的光子晶体光纤具有三角型格子,其周期性方向成 60° 角,因此在正交的 x, y 方向上的周期分别为 $l_x = \Lambda, l_y = \sqrt{3}\Lambda$ 。

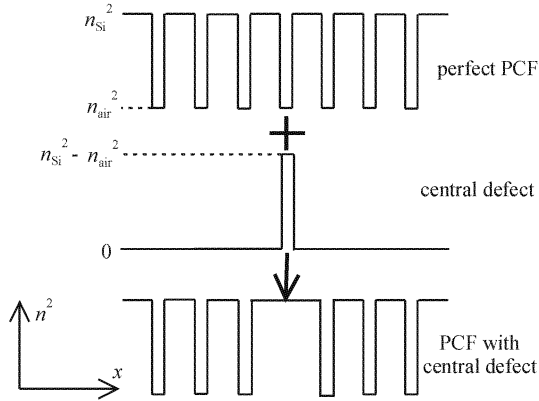


图 2 光子晶体光纤等价于完美二维光子晶体与中心缺陷叠加

Fig. 2 Schematic of the way in which the transverse refractive index profile is decomposed

利用厄米-高斯函数和三角函数的正交完备性,可得到式(7),(8)中的展开系数为

$$C_{ab} = (n_{Si}^2 - n_{air}^2) \cdot IC_{ab}$$

$$C_{ab}^{\ln} = (\ln n_{Si}^2 - \ln n_{air}^2) \cdot IC_{ab} \quad (9a)$$

$$P_{ab} = n_{air}^2 \cdot IP_{ab}^{(1)} + n_{Si}^2 \cdot IP_{ab}^{(2)}$$

$$P_{ab}^{\ln} = \ln n_{air}^2 \cdot IP_{ab}^{(1)} + \ln n_{Si}^2 \cdot IP_{ab}^{(2)} \quad (9b)$$

其中 $IC_{ab} \equiv \iint_{r=d/2} \psi_a(x) \psi_b(y) dx dy$

$$IP_{ab}^{(1)} \equiv \iint_{x_1; r < d/2} \cos \frac{2\pi a x}{l_x} \cos \frac{2\pi b y}{l_y} dx dy$$

$$IP_{ab}^{(2)} \equiv \iint_{z_2; d/2 < r < d/2} \cos \frac{2\pi a x}{l_x} \cos \frac{2\pi b y}{l_y} dx dy$$

它们是正交函数在不同区域内的交迭积分,与工作波长无关。因此,对于某一结构的光子晶体光纤,工作波长变化时,只需根据 Sellmeyer 公式^[11] 计算 n_{Si} , 不必重复计算各交迭积分,这对提高数值计算效率非常有利。

2.4 本征值问题

将场和折射率的展开式(5),(7),(8)代入波动方程(4),可以得到关于两个偏振模的特征方程

$$e_x: \sum_{c,d=0}^F \epsilon_{cd}^x [I_{abcd}^{(1)} + k^2 I_{abcd}^{(2)} + I_{abcd}^{(3)x}] = \beta_x^2 \epsilon_{ab}^x$$

$$e_y: \sum_{c,d=0}^F \epsilon_{cd}^y [I_{abcd}^{(1)} + k^2 I_{abcd}^{(2)} + I_{abcd}^{(3)y}] = \beta_y^2 \epsilon_{ab}^y \quad (10)$$

其中

$$I_{abcd}^{(1)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \nabla_i^2 [\psi_c(x) \psi_d(y)] dx dy$$

$$I_{abcd}^{(2)} = \iint_{-\infty}^{+\infty} n^2 \psi_a(x) \psi_b(y) \psi_c(x) \psi_d(y) dx dy$$

$$I_{abcd}^{(3)x} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \frac{\partial}{\partial x} [\psi_c(x) \psi_d(y) \frac{\partial \ln n^2}{\partial x}] dx dy$$

$$I_{abcd}^{(3)y} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_a(x) \psi_b(y) \frac{\partial}{\partial y} [\psi_c(x) \psi_d(y) \frac{\partial \ln n^2}{\partial y}] dx dy \quad (11)$$

将折射率的展开式(7)代入上式,并利用厄米-高斯函数的递推关系和各种积分公式^[12,13],式(11)可以写成解析形式

$$I_{abcd}^{(1)} = -\frac{2a+2b+1}{\omega^2} \delta_{ac} \delta_{bd} + \frac{\sqrt{2b(2b+1)}}{2\omega^2} \delta_{ac} \delta_{b-1,d} + \frac{\sqrt{2a(2a+1)}}{2\omega^2} \delta_{a-1,c} \delta_{bd} + \frac{\sqrt{2(b+1)(2b+1)}}{2\omega^2} \delta_{ac} \delta_{b,d-1} + \frac{\sqrt{2(a+1)(2a+1)}}{2\omega^2} \delta_{a,c-1} \delta_{bd} \quad (12a)$$

$$I_{abcd}^{(2)} = \sum_{f,g=0}^C C_{fg} I_{fac}^{(22)} I_{gbd}^{(22)} + \sum_{f,g=0}^P P_{fg} I_{fac}^{(21)x} I_{gbd}^{(21)y} \quad (12b)$$

$$I_{abcd}^{(3)x} = -\sum_{f,g=0}^C C_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(31)} I_{gbd}^{(22)} - \sum_{f,g=0}^P P_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(32)x} I_{gbd}^{(21)y} \quad (12c)$$

$$I_{abcd}^{(3)y} = -\sum_{f,g=0}^C C_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(22)} I_{gbd}^{(31)} - \sum_{f,g=0}^P P_{fg}^{\ln} I_{fac}^{(21)x} I_{gbd}^{(32)y} \quad (12d)$$

其中

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(21)s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi i_1 s/l_s) \psi_{i_2}(s) \psi_{i_3}(s) ds, \quad (s = x, y) \quad (13a)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(22)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{i_1}(s) \psi_{i_2}(s) \psi_{i_3}(s) ds \quad (13b)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(31)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi_{i_1}(s)}{\partial s} \frac{\partial \psi_{i_2}(s)}{\partial s} \psi_{i_3}(s) ds \quad (13c)$$

$$I_{i_1 i_2 i_3}^{(32)s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \cos(2\pi i_1 s/l_2)}{\partial s} \frac{\partial \psi_{i_2}(s)}{\partial s} \psi_{i_3}(s) ds, \quad (s = x, y) \quad (13d)$$

根据上述结果,可将式(10)简记为

$$M^s \epsilon^s = \beta_s^2 \epsilon^s, \quad (s = x, y) \quad (14)$$

其中, $M^s = I^{(1)} + k^2 I^{(2)} + I^{(3)s}$, 是一个四维向量, 阶数为 $(F+1) \times (F+1) \times (F+1) \times (F+1)$, ϵ^s 是一个二维向量, 阶数为 $(F+1) \times (F+1)$ 。矩阵 M^s 和 ϵ^s 可以通过简单的下标变换分别变为二维 $(F+1)^2 \times (F+1)^2$ 阶矩阵和一维 $(F+1)^2$ 个元素的向量, 变换

后的矩阵仍用 M^s 和 ϵ^s 表示, 即

$$M_{abcd}^s \leftrightarrow M^s [(a-1)F + b, (c-1)F + d] \quad (15)$$

$$\epsilon_{cd}^s \leftrightarrow \epsilon^s [(c-1)F + d]$$

式(14)中所涉及的各种关于厄米-高斯函数的积分均有解析形式, 而且除折射率展开系数与波长有关外, 其余均与波长无关, 因此在研究光子晶体光纤的色散特性时, 计算过程并不需要重复进行。

矩阵 M^s 的特征值有 $(F+1)^2$ 个, 大部分没有物理意义, 需要根据特征值的大小来确定光子晶体光纤中模式的传播常数 $\beta: n_{\text{eff}} < \beta/k < n_{\text{Si}}$, 其中 n_{Si} 为工作波长时纯石英折射率, n_{eff} 为光子晶体包层等效折射率^[3]。利用与传播常数对应的特征向量即可根据电场展开式(5)得到模式电场分布。

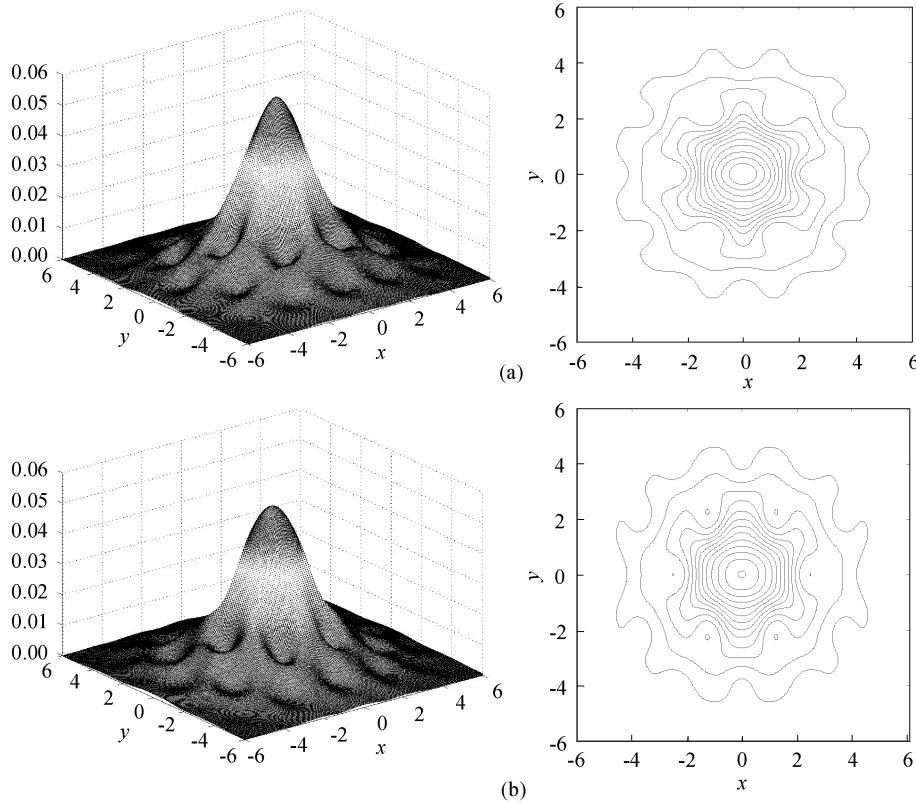


图 3 模场分布

(a) $|E_x|^2$ 和 (b) $|E_y|^2$ 的三维分布及等高线图

Fig. 3 Modal field distribution

(a) intensity distribution and contour of $|E_x|^2$; (b) intensity distribution and contour of $|E_y|^2$

3 数值分析

3.1 数值分析步骤

根据上节的理论过程, 利用 Matlab 编写程序, 实现了 Galerkin 算法, 实际计算过程表明, 该算法速度比较快, 只有个别参数计算过程耗时较多, 主要

数值分析步骤如下。

- 1) 对已知结构的光子晶体光纤, 计算与波长无关的各项积分, 包括: $IC_{i_1 i_2}, IP_{i_1 i_2}^{(1)}, IP_{i_1 i_2}^{(2)}, I_{i_1 i_2 i_3}^{(21)s}, I_{i_1 i_2 i_3}^{(22)}, I_{i_1 i_2 i_3}^{(31)}, I_{i_1 i_2 i_3}^{(32)s}, I_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(1)}$;
- 2) 对给定的波长, 计算如下参数: $C_{i_1 i_2}, P_{i_1 i_2}, C_{i_1 i_2}^{\text{In}}, P_{i_1 i_2}^{\text{In}}, I_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(2)}, I_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(3)s}$;

3) 生成矩阵 M^s , 求解特征值 β 和对应的特征向量 e^s , 并确定模式传播常数, 计算当前工作波长的场分布, 根据模场分布特征分析模式的偏振特性;

4) 如果需要研究不同波长时的传输特性, 改变波长, 重复 2) 和 3), 得到不同波长时的传播常数, 即可分析光子晶体光纤的色散特性。

3.2 数值结果

选取结构参数: $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$, $f = d/\Lambda = 0.2$, 对该光子晶体光纤进行数值研究。当工作波长 $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ 时, 得到基模两个偏振态对应的模式折射率分别为: $n_x = 1.4334645$, $n_y = 1.4335334$, 这两个偏振态之间的双折射 $|n_x - n_y| < 7 \times 10^{-5}$ 。文献 [14] 指出, 具有二阶以上旋转对称性的光波导不存在模式双折射, 因此, 数值计算的 $|n_x - n_y|$ 越小, 表明该算法的计算精度越高。如果要利用光子晶体光纤实现某些偏振特性, 必须改变其结构, 破坏其旋转对称性, 目前已经有报道实现 10^{-3} 以上的双折射^[15,16]。

基模两个偏振态对应的场分布如图 3 所示。由于计算误差产生双折射, 沿 x, y 两个方向偏振的模式场分布略有区别。周期性空气孔对电场起到了较强的限制作用, 从等高线图上看到, 横向场绕过空气孔位置, 在空气孔之间的石英区域向外扩展, 场型能清晰地反映六角对称的折射率分布。

4 结 论

选取厄米-高斯函数和余弦函数对全内反射导光型光子晶体光纤的周期性折射率展开, 同时将场分布用厄米-高斯函数展开, 从电磁场的波动方程出发, 得到关于各展开系数的矩阵和模式的特征方程, 进而得到光子晶体光纤的传播常数和模场分布。研究表明, 当参数选取合适时, 该算法精度比较高, 而且计算速度比较快, 易于在目前 PC 机上实现。利用此算法, 可以进一步研究光子晶体光纤的模式特

性、色散特性、偏振特性等。

参 考 文 献

- 1 Jes Broeng, Dmitri Mogilevtsev, Stig E. Barkou *et al.*. Photonic crystal fibers; a new class of optical waveguides [J]. *Optical Fiber Technology*, 1999, **5**:305~330
- 2 T. A. Birks, D. Mogilevtsev, J. C. Knight *et al.*. The analogy between photonic crystal fibres and step index fibres [C]. OFC'98, FG4, 114~116
- 3 T. A. Birks, J. C. Knight, P. St. J. Russell. Endlessly single-mode photonic crystal fiber [J]. *Opt. Lett.*, 1997, **22** (13):961~963
- 4 T. A. Birks, D. Mogilevtsev, J. C. Knight *et al.*. Single material fibres for dispersion compensation [C]. OFC'1999, FG2-1~FG2-3
- 5 Anders Bjarklev, Jes Broeng, Kim Dridi *et al.*. Dispersion properties of photonic crystal fibres [C]. ECOC98 (Madrid, Spain), 135~136
- 6 T. M. Monroe, D. J. Richardson, N. G. R. Broderick *et al.*. Modeling large air fraction holey optical fibers [J]. *J. Lightwave Technol.*, 2000, **18**(1):50~56
- 7 Stig E. Barkou, J. Broeng, A. Bjarklev. Dispersion properties of photonic bandgap guiding fibers [C]. OFC'98, FG5, 117~119
- 8 J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, J. N. Winn. *Photonic Crystals; Molding the Flow of Light* [M]. New York: Princeton University Press, 1995
- 9 T. M. Monroe, D. J. Richardson, N. G. R. Broderick *et al.*. Holey optical fibers; an efficient modal model [J]. *J. Lightwave Technol.*, 1999, **17**(6):1093~1102
- 10 T. M. Monroe, D. J. Richardson, N. G. R. Broderick. Efficient modelling of holey fibers [C]. OFC'99, FG3, 111~113
- 11 A. W. Snyder. *Optical Waveguide Theory* [M]. New York: Chapman and Hall, 1983
- 12 Isidoro Kimel, Luis R. Elias. Relations between Hermite and Laguerre Gaussian modes [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1993, **29**(9):2562~2567
- 13 I. S. Gradshteyn, J. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products* [M]. New York: Academic, 1994
- 14 M. J. Steel, T. P. White, C. Martijn de Sterke *et al.*. Symmetry and degeneracy in microstructured optical fibers [J]. *Opt. Lett.*, 2001, **26**(8):488~490
- 15 K. Suzuki, H. Kubota, S. Kawanishi *et al.*. High-speed bi-directional polarisation division multiplexed optical transmission in ultra low-loss (1.3 dB/km) polarisation maintaining photonic crystal fibre [J]. *Electron. Lett.*, 2001, **37**(23):1399~1401
- 16 Stig Barkou Libori, Jes Broeng, Erik Knudsen *et al.*. High-birefringent photonic crystal fiber [C]. OFC'2000, TuM2