

文章编号: 0258-7025(2004)04-0432-05

# 非傍轴光束级数修正解的有效性

段开棕<sup>1</sup>, 吕百达<sup>1,2</sup>

(<sup>1</sup> 四川大学激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064; <sup>2</sup> 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430074)

**摘要** 当光束具有较大的发散角或光束束腰可与波长相比拟时, 傍轴近似不再成立。需要发展更为严格的非傍轴处理方法。迄今已提出许多方法, 例如微扰法、级数展开法、算子法、角谱分析法和波动方程积分解等方法, 用以研究光束的非傍轴传输行为。不同方法具有各自的优缺点和适用范围。分析了非傍轴光束级数解的有效性。对波动方程积分解和级数解作了详细的数值计算和比较, 指出当  $w_0 > 0.2251\lambda$  时 ( $w_0$  为束腰宽度,  $\lambda$  为波长), 级数解对傍轴解有修正作用。但是, 当  $w_0 \leq 0.2251\lambda$  时, 级数解会给出无意义的结果, 并且会发散。级数解必须在其有效范围内使用。级数解的适用范围与光束的束腰宽度、传输距离以及所使用的级数解的阶次有关。

**关键词** 激光物理; 级数解; 非傍轴光束; 适用范围

中图分类号 TN 012 文献标识码 A

## Validity of Series Expansion Corrections to the Paraxial Approximation of Non-Paraxial Beams

DUAN Kai-liang<sup>1</sup>, LÜ Bai-da<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China  
<sup>2</sup> State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, Hubei 430074, China

**Abstract** It is well known that the paraxial approximation is no longer valid for the beams with large divergence angle and/or small spot size comparable with the wavelength. Thus, a rigorous nonparaxial treatment becomes necessary. As yet, a variety of approaches, such as the perturbation method, power-series expansion, angular spectrum representation and integral solution of the wave equation etc. have been proposed to treat the beam propagation behavior beyond the paraxial regime. In this paper the validity of series expansion corrections to the paraxial approximation of non-paraxial beams is studied. Detailed numerical calculations for the integral expression and series expansion of the wave equation are performed and compared. It is shown that the series expansion provides a valid correction to the paraxial solution as  $w_0 > 0.2251\lambda$ , with  $w_0$  and  $\lambda$  being the waist width and wavelength, respectively. However, the series expansion solution delivers unrealistic results and may become divergent if  $w_0 \leq 0.2251\lambda$ . The applicable range of the series expansion approach depends on the waist width, propagation distance and order of the series expansion. The results obtained in this paper are useful for studying the propagation of nonparaxial beams.

**Key words** laser physics; series expansion solution; non-paraxial beam; applicable range

## 1 引 言

对于强聚焦光束或二极管激光器发出的光束, 当束腰宽度为波长的数量级, 发散角很大时, 傍轴条

件已不成立。20 世纪 70 年代, 人们就开始了波动方程非傍轴解的理论研究。近年来, 因二极管激光器和微光学研究的进展促进了非傍轴光束的研究, 国际上相关研究工作十分活跃。文献中讨论较

收稿日期: 2002-12-04; 收到修改稿日期: 2003-03-18

基金项目: 华中科技大学激光技术国家重点实验室基金(编号: 0101)资助项目。

作者简介: 段开棕(1967—), 男, 洛阳师范学院讲师, 博士研究生, 主要从事光束传输研究。E-mail: kl.duan@163.com

多的方法是 Lax 等发展的微扰级数法<sup>[1]</sup>。Lax 从麦克斯韦方程组出发, 将电场分量展开为小量  $f = 1/kw_0$  的无穷幂级数形式( $k$  为光波波数,  $w_0$  为光束束腰宽度), 级数解的第一项为波动方程的傍轴解, 其他各幂次项满足一系列迭代微分方程。Takenaka 等<sup>[2]</sup>和 Laabs<sup>[3]</sup>求出了厄米-高斯光束, 复宗量拉盖尔-高斯光束和复宗量厄米-高斯光束非傍轴级数解。Agrawal 等<sup>[4]</sup>和 Chen 等<sup>[5]</sup>利用角谱法, 研究了高斯光束的非傍轴传输, 将所得结果展开为  $f$  的幂级数形式, 得到了与 Lax 一致的结果。值得注意的是, 选用  $f$  作为幂级数的幂指数项, 是由于对一般光束而言,  $f \ll 1$ 。但当束腰宽度很小时,  $f \ll 1$  的条件不一定满足, 此时级数解不能很好地收敛。Chen 等<sup>[5]</sup>首先注意到级数解在描述非傍轴光束时的发散性。本文的主要工作是讨论非傍轴光束级数解的有效性。

## 2 波动方程的级数解和积分解

自由空间中, 光场  $\Psi(r, \varphi, z)$  满足亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(r, \varphi, z) = 0 \quad (1)$$

式中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。考虑沿  $z$  轴正方向传输的旋转对称光束,  $\Psi$  与  $\varphi$  无关, 可取为

$$\Psi(r, z) = E(r, z)\exp(ikz) \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 有

$$\left(\nabla^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z}\right)E(r, z) = 0 \quad (3)$$

众所周知, (3)式在傍轴近似下有高斯光束解

$$E_0^{(0)}(r, z) = \sigma \exp(-\sigma \rho^2) \quad (4)$$

式中用上标“(0)”表示  $E_0^{(0)}(r, z)$  是(3)式的傍轴解

$$\rho = r/w_0 \quad (5a)$$

$$\sigma = [1 + i(z/z_0)]^{-1} \quad (5b)$$

$$z_0 = kw_0^2/2 \quad (\text{瑞利长度}) \quad (5c)$$

当傍轴近似失效时, 必须对  $E_0^{(0)}(r, z)$  作修正。非傍轴光束可用方程(3)的级数解<sup>[2]</sup>

$$E^{(2s)}(r, z) = \sum_{t=0}^s f^{2t} E_0^{(2t)}(r, z) \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

描述, 式中  $f = 1/kw_0$

$$E_0^{(2t)}(r, z) = \sum_{p=1}^t c_p^{(2t)} \zeta^p E_{0,t+p}^{(0)}(r, z) \quad (7)$$

$$\zeta = 1 - \sigma^{-1} \quad (8)$$

$$c_p^{(2t)} = \frac{(-1)^{t+p} (2t)!}{t(p-1)!(t-p)!(t+p)!}, \quad t = 1, 2, \dots, p = 1, 2, \dots, t \quad (9)$$

$E_{m,n}^{(0)}(r, z)$  为复宗量拉盖尔高斯光束

$$E_{m,n}^{(0)}(r, z) = (-1)^n n! \sigma^{m+n+1} \rho^m L_n^m(\sigma \rho^2) e^{-\sigma \rho^2} e^{-im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

$\varphi$  为方位角,  $L_n^m(\nu)$  为拉盖尔多项式

$$L_n^m(\nu) = \frac{e^\nu}{n! \nu^m} \frac{d^n}{d\nu^n} (e^{-\nu} \nu^{m+n}) \quad (11)$$

为了表述方便, 称  $E^{(2s)}(r, z)$  为波动方程的  $2s$  阶级数解。由(7)~(10)式可得方程(3)的四阶和八阶级数解<sup>[2]</sup>

$$E^{(4)}(r, z) = \sum_{s=0}^2 f^{2s} E_0^{(2s)}(r, z) = \sigma \exp(-\sigma \rho^2) + f^2 \zeta E_{0,2}^{(0)}(r, z) + f^4 \left[ -2\zeta E_{0,3}^{(0)}(r, z) + \frac{1}{2} \zeta^2 E_{0,4}^{(0)}(r, z) \right] \quad (12)$$

$$E^{(8)}(r, z) = \sum_{s=0}^4 f^{2s} E_0^{(2s)}(r, z) = \sigma \exp(-\sigma \rho^2) + f^2 \zeta E_{0,2}^{(0)}(r, z) + f^4 \left[ -2\zeta E_{0,3}^{(0)}(r, z) + \frac{1}{2} \zeta^2 E_{0,4}^{(0)}(r, z) \right] + f^6 \left[ 5\zeta E_{0,4}^{(0)}(r, z) - 2\zeta^2 E_{0,5}^{(0)}(r, z) + \frac{1}{6} \zeta^3 E_{0,6}^{(0)}(r, z) \right] + f^8 \left[ -14\zeta E_{0,5}^{(0)}(r, z) + 7\zeta^2 E_{0,6}^{(0)}(r, z) - \zeta^3 E_{0,7}^{(0)}(r, z) + \frac{1}{24} \zeta^4 E_{0,8}^{(0)}(r, z) \right] \quad (13)$$

在(4)式中令  $z = 0$  得源平面上的光场分布

$$E(r, 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \quad (14)$$

在空间任意  $z$  平面处的光场可用角谱法表示为<sup>[4]</sup>

$$E(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(p, q) e^{ik(px+qy+msz)} dp dq \quad (15)$$

式中

$$m = \begin{cases} \sqrt{1-p^2-q^2} & p^2+q^2 \leq 1 \\ i\sqrt{p^2+q^2-1} & p^2+q^2 > 1 \end{cases} \quad (16)$$

对源平面光场  $E(r, 0)$  进行傅里叶变换得到

$$A(p, q) = (1/4\pi f^2) \exp[-(p^2+q^2)/4f^2] \quad (17)$$

在远离源平面几个波长,倏逝波可忽略的条件下,由(15),(16)和(17)式可得

$$E(r, z) = \frac{1}{2f^2} \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4f^2}\right) \times \exp(ik\sqrt{1-b^2}z) J_0(kbr) b db \quad (18)$$

(18) 式为亥姆霍兹方程的积分解,由于源平面( $z = 0$ )光场定义的不同,(18)式与文献[4]的(12)式有系数上的差别。下面对(4),(12),(13)式作数值计算,并和(18)式的直接数值积分结果比较,分析级数解描述非傍轴光束的有效性。

### 3 数值计算分析

文献[6]指出,当  $w_0 \leq 0.2251\lambda$  时,傍轴条件完全失效。选取  $w_0 = 0.2251\lambda$ , 计算轴上光场级数解  $|E^{(2s)}(r, z)|$  和积分解  $|E(r, z)|$  的相对误差。相对误差的定义为

$$R_e^{(2s)}(r, z) = \frac{|E(r, z)| - |E^{(2s)}(r, z)|}{|E(r, z)|} \quad (s = 0, 2, 4) \quad (19)$$

图 1 为计算结果。从图 1 可以看出,在近场( $z/z_0 < 10$ ),对于轴上( $r = 0$ )光场,级数解可能比傍轴解的相对误差还大,说明此时级数解对傍轴解无改善作用。当束腰从  $0.2251\lambda$  逐渐增加时,级数解对傍轴解有修正作用。图 2(a)为  $w_0 = 0.45\lambda$  时轴

上光场  $R_e^{(2s)}(r, z)$  的计算结果。从图 2(a)可以看出,在近场,级数解的相对误差小于 2%,明显优于傍轴解。对于离轴情况,选取离轴距离为  $r = 4w_0$ ,  $w_0 = 0.45\lambda$ , 计算结果如图 2(b)和(c)所示。从图 2 可以看出,级数解比傍轴解有更小的相对误差。傍轴解的相对误差较大,单独画于图 2(c)中。另外,图 1 和图 2 均显示,4 阶级数解和 8 阶级数解具有几乎相同的精确程度。

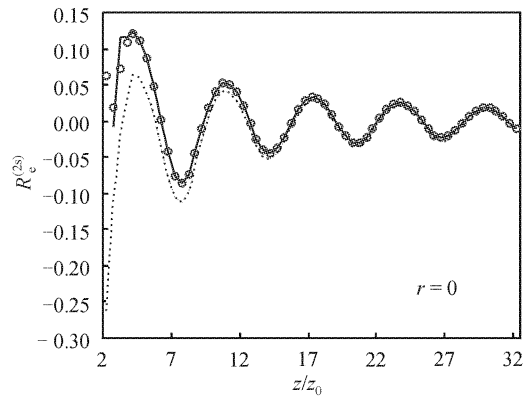


图 1 级数解轴上场振幅的相对误差随归一化传输距离的变化 ( $w_0 = 0.2251\lambda$ )

Fig. 1 Relative errors of on-axis field amplitudes of the series expansion solution versus normalized propagation distance ( $w_0 = 0.2251\lambda$ )

—:  $R_e^{(8)}$ ; .....:  $R_e^{(4)}$ ; .....:  $R_e^{(0)}$

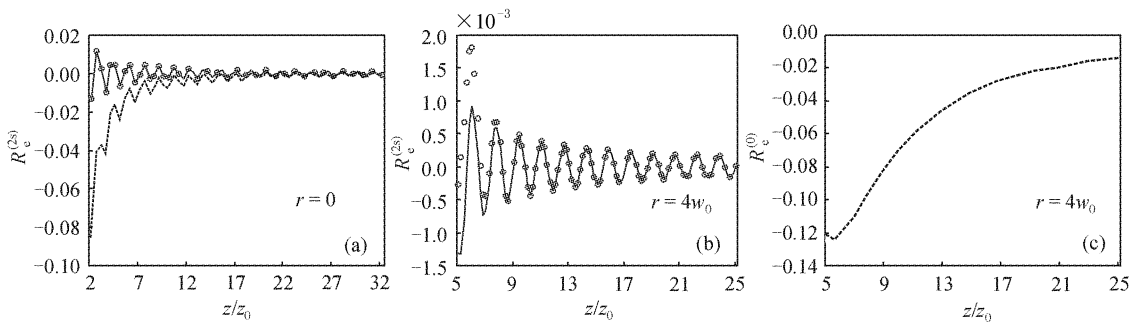


图 2 级数解场振幅相对误差随归一化传输距离的变化 ( $w_0 = 0.45\lambda$ )

Fig. 2 Relative errors of field amplitudes of the series expansion solution versus normalized propagation distance ( $w_0 = 0.45\lambda$ )

—:  $R_e^{(8)}$ ; .....:  $R_e^{(4)}$ ; .....:  $R_e^{(0)}$

下面考察某一  $z$  平面上的光场情况。选取  $z/z_0 = 10, w_0 = 0.8\lambda$ , 计算结果如图 3 所示(图 3(b)是图 3(a)的局部放大)。从图 3(a)和(b)可以看出,在  $r < 16.2w_0$  时,与傍轴解比较,4 阶级数解和积分解(18)式吻合更好,但在  $r > 16.2w_0$  以后,4 阶级数解显著偏离积分解。8 阶级数解偏离更大,示于图 3

(c)。显然,在  $z/z_0 = 10$  面上,当离轴距离  $r > 16.2w_0$  时,由 4 阶级数解计算所得的结果并不反映光场的真实情况,把离轴距离小于  $16.2w_0$  的范围叫作 4 阶级数解在平面  $z/z_0 = 10$  上的有效范围。为了表述方便,对于确定的束腰宽度  $w_0$  和一定阶次的级数解,用  $r_0^{(2s)}$  表示级数解偏离积分解时的极小值所

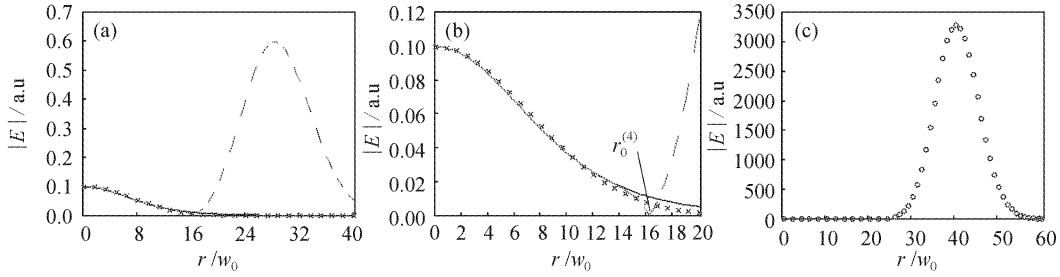


图 3  $z/z_0 = 10$  面上场振幅随  $r/w_0$  的变化 ( $w_0 = 0.8\lambda$ )

Fig. 3 Field amplitudes of the field versus  $r/w_0$  at the plane  $z/z_0 = 10$  ( $w_0 = 0.8\lambda$ )

—:  $|E|$ ; ····:  $|E^{(8)}|$ ; ·····:  $|E^{(4)}|$ ; ××××:  $|E^{(0)}|$

对应的离轴距离,并称它为  $2s$  阶级数解的有效范围的有效半径。计算发现,发散性是使用级数解处理非傍轴光束时的普遍现象。 $r_0^{(2s)}$  的大小与光束束腰宽度  $w_0$ , 传输距离  $z$  以及所使用的级数解的阶次有关。在某一  $z$  平面上,只能在级数解的有效范围内计算光束的场分布,因此,确定某一  $z$  平面上级数解有效半径  $r_0^{(2s)}$  的大小对于正确使用级数解来处理非傍轴光束是有意义的。

下面讨论  $r_0^{(2s)}$  与束腰宽度  $w_0$ , 级数解的阶次以及传输距离  $z$  的关系:

1) 束腰宽度  $w_0$  对  $r_0^{(2s)}$  的影响

在确定的  $z$  平面上,  $w_0$  越大,  $r_0^{(2s)}$  也相对较大, 如  $z/z_0 = 10$  平面上,  $w_0 = 0.45\lambda$ ,  $r_0^{(4)} = 9.84$ ;  $w_0 = 0.8\lambda$ ,  $r_0^{(4)} = 16.23w_0$ 。但当  $w_0 > 1.2\lambda$  时, 傍轴解与积分解已基本吻合, 光场可近似用傍轴解描述, 如图 4 所示。图 4 中的计算参数为  $z/z_0 = 10$ ,  $w_0 = 1.2\lambda$ , 从图 4 中可以看出光场基本落在级数解的有效范围 ( $r_0^{(4)} = 19.5w_0$ ) 内。

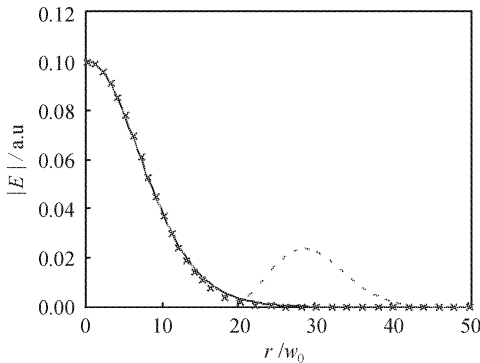


图 4  $z/z_0 = 10$  面上场振幅随  $r/w_0$  的变化 ( $w_0 = 1.2\lambda$ )

Fig. 4 Field amplitudes versus  $r/w_0$  at the plane

$z/z_0 = 10$  ( $w_0 = 1.2\lambda$ )

—:  $|E|$ ; ·····:  $|E^{(4)}|$ ; ××××:  $|E^{(0)}|$

2) 级数解阶次对  $r_0^{(2s)}$  的影响

在确定的  $z$  平面上, 级数解的阶次越高, 它的有效半径也相对越大, 但不可无限地提高级数解的阶次, 一方面, 这是由于提高级数解的阶次会大量地增加计算量; 另一方面, 提高级数解的阶次不会明显地增大级数解的有效范围, 如在  $z/z_0 = 10$  平面上,  $w_0 = 0.8\lambda$  时,  $r_0^{(4)} = 16.23w_0$ ,  $r_0^{(8)} = 17.80w_0$ 。

3)  $r_0^{(2s)}$  与传输距离  $z$  的关系

对于确定的束腰宽度  $w_0$ , 在  $z$  小于某个值  $b^{(2s)}$  时级数解与积分解基本吻合 ( $2s$  表示所使用级数解的阶次)。当然,  $z < b^{(2s)}$  的范围是使用级数解最理想的范围, 但遗憾的是, 级数解的阶次越高或束腰宽度  $w_0$  越小,  $b^{(2s)}$  越小, 例如, 在  $w_0 = 0.8\lambda$  时,  $b^{(2)} = 3z_0$ ,  $b^{(4)} = 2z_0$ ,  $b^{(8)} = z_0$ 。图 5 为  $w_0 = 0.8\lambda$  时,  $z/z_0 = 1$  平面上由傍轴解, 积分解, 4 阶级数解, 8 阶级数解计算所得的结果。由图 5 可以看出, 4 阶级数解, 8 阶级数解与积分解完全重合。图 6 为  $w_0 = 0.8\lambda$  时,  $r_0^{(4)}$ ,  $r_0^{(8)}$  随传输距离  $z$  的变化, 可以看出,  $r_0^{(2s)}$  随传输距离  $z$  的增大而增大。图 6 中曲线以下的范围才是

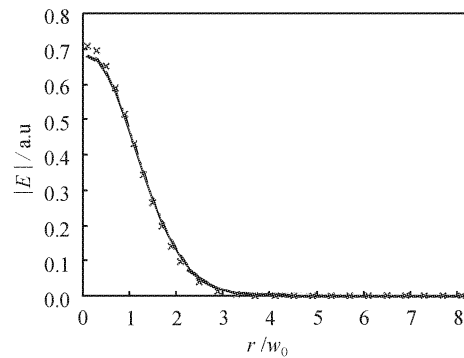


图 5  $z/z_0 = 1$  面上场振幅随  $r/w_0$  的变化 ( $w_0 = 0.8\lambda$ )

Fig. 5 Field amplitudes versus  $r/w_0$  at the plane

$z/z_0 = 1$  ( $w_0 = 0.8\lambda$ )

××××:  $|E^{(0)}|$ ; —:  $|E|$ ,  $|E^{(4)}|$ ,  $|E^{(8)}|$

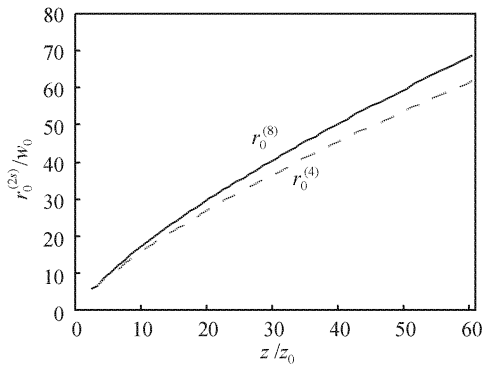


图 6 级数解的有效半径随归一化传输距离的变化 ( $\omega_0 = 0.8\lambda$ )

Fig. 6 Normalized effective radii of the series expansion solution versus normalized propagation distance ( $\omega_0 = 0.8\lambda$ )

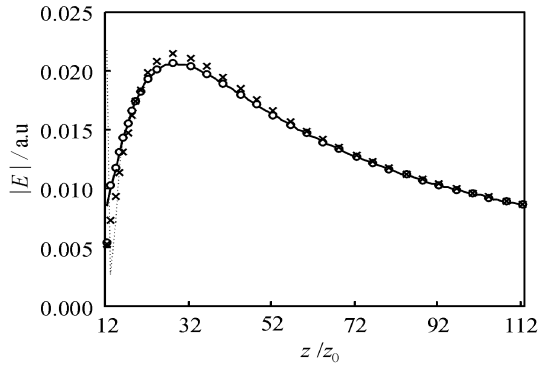


图 7 场振幅随归一化传输距离的变化 ( $r = 20\omega_0, \omega_0 = 0.8\lambda$ )

Fig. 7 Changes of field amplitudes with normalized propagation distance ( $r = 20\omega_0, \omega_0 = 0.8\lambda$ )

—:  $|E|$ ; ○○○○:  $|E^{(8)}|$ ; .....:  $|E^{(4)}|$ ; ××××:  $|E^{(0)}|$

级数解的有效范围。如要计算离轴距离为  $r = 20z_0$  处的光场,则 4 阶级数解的适用范围是传输距离  $z > 23z_0$ , 8 阶级数解的适用范围是传输距离  $z >$

$20z_0$ 。图 7 为  $\omega_0 = 0.8\lambda, r = 20\omega_0$  时,根据 4 阶级数解,8 阶级数解,傍轴解和积分解计算的结果。由图 7 可以看出,在  $z > 20z_0$  时,级数解与积分解重合,对傍轴解有明显的修正作用。

## 4 结 论

研究了波动方程级数解和积分解,对它们的结果作了详细的比较分析。与已有文献中的工作比较,本文指出在傍轴条件完全失效 ( $\omega_0 \leq 0.2251\lambda$ ) 时,级数解(包括 2 阶,4 阶,6 阶,8 阶级数解)对傍轴解没有修正作用;在  $\omega_0 > 0.2251\lambda$  时,级数解在其有效范围内,与积分解基本一致,对傍轴解有明显的修正作用,在其有效范围之外,级数解会严重偏离积分解,束腰宽度越小,级数解与积分解的偏离越大。因此,即使当条件  $\omega_0 > 0.2251\lambda$  满足时级数解也必须在它的有效范围内使用,有效范围的有效半径与束腰宽度、传输距离及所用的级数解的阶次有关。

## 参 考 文 献

- 1 M. Lax, W. H. Louisell, W. B. McKnight. From maxwell to paraxial wave optics [J]. *Phys. Rev. A*, 1975, **11**(4):1365~1370
- 2 T. Takenaka, M. Yokota, O. Fukumitsu. Propagation of light beams beyond the paraxial approximation [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1985, **2**(6):826~829
- 3 H. Laabs. Propagation of Hemite-Gaussian-beams beyond the paraxial approximation [J]. *Opt. Commun.*, 1998, **147**(1/3):1~4
- 4 G. P. Agrawal, D. N. Pattanayak. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1979, **69**(4):575~578
- 5 C. G. Chen, P. T. Konkola, J. Ferrera, *et al.*. Analyses of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2002, **19**(2):404~412
- 6 S. Nemoto. Nonparaxial Gaussian beams [J]. *Appl. Opt.*, 1990, **29**(13):1940~1946