

文章编号: 0258-7025(2004)02-0157-04

激光驱动陷俘离子的振动压缩和自旋压缩

葛振斌, 曹德忠, 汪凯戈

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

摘要 研究了陷俘离子在激光场的驱动下, 离子的中心质量运动同内部能级跃迁的耦合效应。不采用 Lamb-Dicke 小参量近似, 得到系统波函数的精确解。数值模拟表明, 在适当的参量下, 陷俘离子可以获得明显的振动压缩和自旋压缩。

关键词 量子光学; 陷俘离子; 压缩效应; Lamb-Dicke 参量

中图分类号 O 431.2 **文献标识码** A

Vibration and Spin Squeezing in a Trapped Ion Driven by a Laser Beam

GE Zhen-bin, CAO De-zhong, WANG Kai-ge

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract The coupling between the motion of the center-of-mass and the internal transition in a trapped ion, driven by a classical laser beam, is discussed. Without using Lamb-Dicke limit, the precise analytical solution of wave function is deduced in this model. The numerical simulations show that, under proper parameters chosen, the apparent squeezing occurs in both the vibration and the spin variables for the trapped ion.

Key words quantum optics; trapped ion; squeezing effect; Lamb-Dicke parameter

1 引言

随着激光冷却和陷俘粒子^[1] (包括原子、离子、电子和团簇等)技术的发展,人们已能够将粒子冷却到极低的温度。在这种低温条件下,粒子的量子行为得到了最大程度的体现。近年来,对陷俘粒子的量子效应进行了广泛的研究。例如,陷俘超冷离子的全量子 Jaynes-Cummings 模型^[2],陷俘离子的非经典振动态^[3],陷俘离子运动中薛定谔猫和纠缠相干态的产生^[4],陷俘离子的量子非破坏性测量^[5],陷俘离子运动的“暗”压缩态^[6]以及最近在二维陷俘离子模型中通过量子非破坏性测量进行量子态操纵等的研究^[7,8]。陷俘离子在激光场驱动下,离子的内部能级跃迁与中心质量运动产生耦合。为了简化模型,过去大多数工作采用了基于 Lamb-Dicke 小

参量极限下相互作用哈密顿量展开的截断近似。最近,文献[9]研究了在驻波场作用下和 Lamb-Dicke 参量任意时陷俘离子的 Rabi 频率。本文考虑在激光行波场作用下两能级陷俘离子模型,不采用 Lamb-Dicke 小参量近似,得到陷俘离子波函数的精确解。与驻波场不同的是,陷俘离子的 Rabi 频率将同阱势和外场的相对位置无关,这一模型更能反映外场与陷俘离子相互作用的实际情况。数值模拟表明,在适当条件下,陷俘离子可以获得较大的振动压缩和偶极压缩。

2 模型描述及波函数的精确解

在陷俘离子模型中,设离子内部某两个能级与激光场相互作用,在离子阱的势场中,离子的中心质

收稿日期 2002-08-09;收到修改稿日期 2002-12-19

基金项目:国家重点基础研究发展规划(973)子课题“量子信息基础理论”(课题编号:2001CB309310)和国家自然科学基金(编号:10074008和60278021)资助项目。

作者简介:葛振斌(1977—),男,北京邮电大学在读博士研究生,从事量子光学和光纤通信研究。E-mail:gejiazhuang@sohu.com 万方数据

量运动可近似为量子简谐振子。激光场可考虑为经典行波场。在一维情况下系统的哈密顿量为

$$H = H_0 + H_I \tag{1}$$

$$H_0 = \hbar\nu a^\dagger a + \hbar\omega_{21}\sigma_z \tag{2}$$

$$H_I = dE^{(-)}(x,t)\sigma_- + H.c. \tag{3}$$

式中 H_0 为系统的自由哈密顿量 H_I 为激光场与陷俘离子的相互作用哈密顿量 ν 为离子的振动频率, σ_- 表示跃迁频率为 ω_{21} 的两能级离子自旋算符 d 为相应的跃迁偶极矩阵元(为了计算简化将其设为实数)。 $E^{(-)}(x,t)$ 为激光驱动场的负频部分 x 为简谐振子的位置算符,它们可分别写为

$$E^{(-)}(x,t) = E_0 \exp[i(\omega_l t - k_l x)] \tag{4}$$

$$x = \sqrt{\hbar/(2\nu m)}(a^\dagger + a) \tag{5}$$

式中 ω_l 和 k_l 分别为激光场的频率和波数 m 为离子的质量。将(4)(5)式代入(3)式得

$$H_I = \Omega_L e^{-\frac{1}{2}\eta^2} e^{i\omega_l t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\eta a^\dagger)^m}{m!} \times \frac{(-i\eta a)^n}{n!} \sigma_- + H.c. \tag{6}$$

其中 $\Omega_L = dE_0/\hbar$ 为激光场的 Rabi 频率。 $\eta = k_l \sqrt{\hbar/(2\nu m)}$ 称为陷俘离子的 Lamb-Dicke 参量^[9],它是描述陷俘离子简谐振动的特征参量,表示离子每改变一个振动量子时对应的位置变化与驱动场波长之比。

设光场频率与离子第 k 个振动能级相共振,则满足

$$\omega_l = \omega_{21} - k\nu \tag{7}$$

当 $k > 0$ 时称为红带共振,当 $k < 0$ 时称为蓝带共振。在旋波近似下,由(6)和(7)式可得在相互作用绘景中的相互作用哈密顿量为

$$H_{int} = dE_0 e^{-\frac{1}{2}\eta^2} [f^{(k)}(a^\dagger, \hat{\mu})\sigma_- + H.c.] \tag{8}$$

其中

$$f^{(k)}(\hat{a}^\dagger, \hat{\mu}) = (-i\eta)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2)^n}{(n+k)!} (a^\dagger)^{n+k} a^n \tag{9}$$

$$f^{(k)}(\hat{a}^\dagger, \hat{\mu}) = (-i\eta)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta^2)^n}{(n-k)!} (a^\dagger)^n a^{n-k} \tag{10}$$

在 Lamb-Dicke 极限下 ($\eta \ll 1$),上述级数只需考虑第一、二项,从而使模型简化。在本文中不采用这一近似,直接求波函数的精确解。设在相互作用绘景中波函数一般形式为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{q=0}^{\infty} C_{1q}(t)|1,q\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} C_{2p}(t)|2,p\rangle \tag{11}$$

其中 $|1,q\rangle$ 和 $|2,p\rangle$ 分别表示陷俘离子基态 $|1\rangle$ 和激发态 $|2\rangle$ 与它们相应的振动福克态 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 的直积。利用薛定谔运动方程解得波函数的精确解

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{p=0}^{k-1} C_{1p}(0)|1,p\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} \{C_{1p+k}(0)\cos[\Omega_p^{(k)}t] + (-i)^{k+1}C_{2p}(0)\sin[\Omega_p^{(k)}t]\}|1,p+k\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} \{(-i)^{k+1}C_{1p+k}(0)\sin[\Omega_p^{(k)}t] + C_{2p}(0)\cos[\Omega_p^{(k)}t]\}|2,p\rangle \tag{12}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{p=0}^{-k-1} C_{2p}(0)|2,p\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} \{C_{2p-k}(0)\cos[\Omega_p^{(-k)}t] + (-i)^{-k+1}C_{1p}(0)\sin[\Omega_p^{(-k)}t]\}|2,p-k\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} \{(-i)^{-k+1}C_{2p-k}(0)\sin[\Omega_p^{(-k)}t] + C_{1p}(0)\cos[\Omega_p^{(-k)}t]\}|1,p\rangle \tag{13}$$

其中 Rabi 频率

$$\Omega_p^{(k)} = \Omega_L e^{-\eta^2/2} \eta^k \left[\frac{p!}{(p+k)!} \right]^{1/2} L_p^k(\eta^2) \tag{14}$$

$L_p^k(\eta^2)$ 为 k 阶缔合拉盖尔多项式。注意当 $k = 0$ 时,(12)式中右边第一项为零。

假设在初始时离子振动态为相干态,内部能级处在基态,即 $|\psi(0)\rangle = |1,\alpha\rangle$ 。离子运动的相干态可以通过用经典场驱动来制备^[10]。在振动福克态空间中初态可展开为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n |1,n\rangle \tag{15}$$

$$Q_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{16}$$

将(15)和(16)式代入(12)和(13)式得到任意时刻的态函数为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{p=0}^{k-1} Q_p |1,p\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} Q_{p+k} \{ \cos[\Omega_p^{(k)}t] |1,p+k\rangle - i^{k+1} \sin[\Omega_p^{(k)}t] |2,p\rangle \} \tag{17}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{p=0}^{-k-1} Q_p |2,p\rangle + \sum_{p=0}^{\infty} Q_{p-k} \{ \cos[\Omega_p^{(-k)}t] |2,p-k\rangle - i^{-k+1} \sin[\Omega_p^{(-k)}t] |1,p\rangle \} \tag{18}$$

3 离子的振动压缩

离子振动的两个正交分量定义为

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger), X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) \quad (19)$$

它们分别表示离子振动的位置和动量。由(15)和(16)式的初始条件下波函数的精确解,可以计算出离子振动的位置和动量的涨落 ΔX_1^2 和 ΔX_2^2 。图1为离子振动的位置涨落 ΔX_1^2 的时间演化。各参量的意义分别是: $|\alpha|^2$ 为初始时刻离子振动相干态的强度, φ 为相干态的位相, k 为与光场频率相共振时离子的振动能级, η 为陷俘离子的 Lamb-Dicke 参量。在图1(a)中,当 $k = 2, \eta = 1.1, |\alpha|^2 = 0.4225$ 和 $\varphi = \arg(\alpha) = 0$ 时,离子位置涨落的压缩与初始的真空涨落相比最大可达到 84%(100% 表示完全没有量子涨落),这是我们在数值模拟中找到的最佳压缩值(图中的虚线是标准散粒噪声涨落

的值 0.25)。在图1(b)中,除 k 以外的其他参量与图1(a)相同。当驱动场与离子两能级精确共振时 ($k = 0$),位置压缩可以出现,但最大仅达 24%。在较大的红带共振 $k = 6$ 时,振动位置维持在真空涨落。图1(c)与图1(a)比较,采用了不同的离子初始振动强度值。在振动强度值较大时 ($|\alpha|^2 = 1.44$),振动涨落将远大于真空涨落,而振动强度值较小时 ($|\alpha|^2 = 0.01$),维持在真空涨落。图1(d)与图1(a)比较反映了 Lamb-Dicke 参量的影响。当 Lamb-Dicke 参量取较小时 ($\eta = 0.01$),位置涨落在一定的时间内可出现适当的压缩,而当 Lamb-Dicke 参量取较大时 ($\eta = 4.0$),振动维持在真空涨落。图1(e)和(f)分别反映离子振动的初相位的影响。随初相位的增加, X_1 分量涨落也增大。当 $\varphi = \pi/2$ 时,压缩完全消失。实际上由于 X_1 分量与 X_2 分量的正交性, $\varphi = \pi/2$ 时 X_1 分量的涨落完全等于 $\varphi = 0$ 时 X_2 分量的涨落。

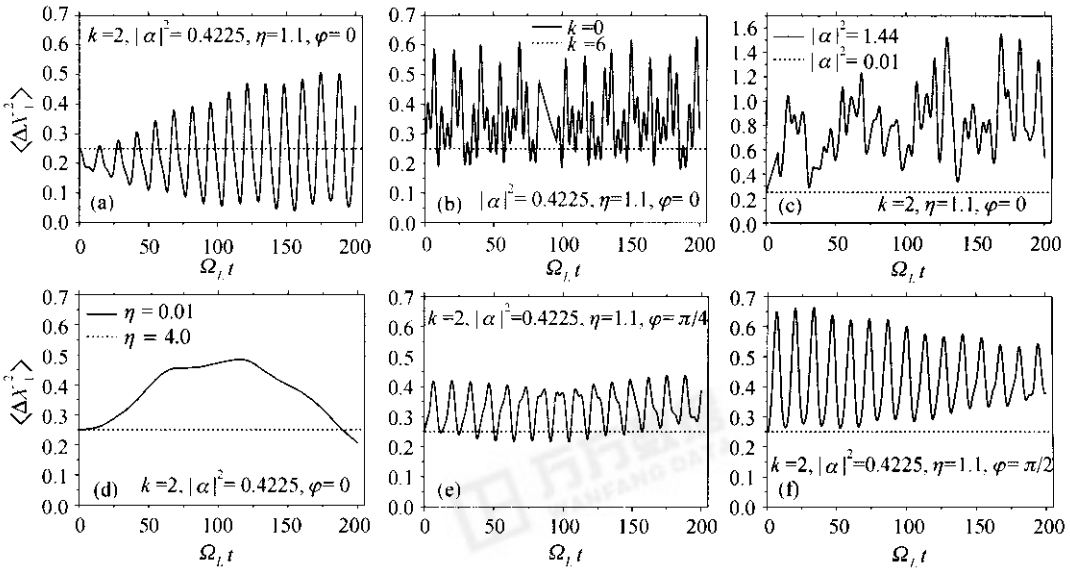


图1 不同参量时陷俘离子位置涨落的演化

Fig. 1 Evolution of the position variance in a trapped ion for the different parameters

4 离子的自旋压缩

两能级离子系统可以用自旋算符来描述。处于自旋压缩的离子,其辐射场往往具有很好的相干性和压缩性,从而可能提供一种制备压缩光的场源^[11]。离子自旋分量算符 S_1 和 S_2 可用离子的上升和下降算符 S_+ 和 S_- 表示

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_+ + S_-), S_2 = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \quad (20)$$

它们满足对易关系
万方数据

$$[S_1, S_2] = iS_3 \quad (21)$$

自旋算符的压缩参量定义为

$$F_j = (\Delta \hat{S}_j)^2 - \frac{1}{2} |\hat{S}_3|, (j = 1, 2) \quad (22)$$

若 $F_j < 0$, 表示算符 S_j 产生了压缩,称为原子的自旋压缩。一般来说, F_j 越小说明 S_j 压缩越大。

在(15)和(16)式的初始条件下,利用精确解(17)和(18)式可以计算离子的自旋压缩参量。在红带共振时

$$F_1 = \frac{1}{4} [1 - |2y - 1|] \quad (23)$$

$$F_2 = \frac{1}{4} [(2y - 1)^2 - |2y - 1|] \quad (24)$$

其中 y 表示离子处在激发态 $|2\rangle$ 的几率

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \{ |Q_{p+k}|^2 \sin^2[\Omega_p^{(k)} t] \} \quad (25)$$

由于 $y \leq 1$, 所以 $F_1 \geq 0$, $F_2 \leq 0$. 说明离子自旋的 S_1 分量不会产生压缩, S_2 分量出现压缩. 当 y 取 0.25 或

0.75 时, F_2 有最小的值 -0.0625 , S_2 分量有最大压缩. 图 2 画出两组参量下 F_2 随时间演化的曲线. 图 2(a) 为 Lamb-Dicke 参量较小时 ($\eta = 0.1$) 的结果, S_2 分量在较长时间范围内保持较大的压缩. 在图 2(b) 中 $\eta = 1.2$, 可以看出, 当驱动场与离子两能级精确共振时 ($k = 0$), 自旋压缩可以达到最大, 而在较大的红带共振 $k = 6$ 时, 自旋压缩完全消失.

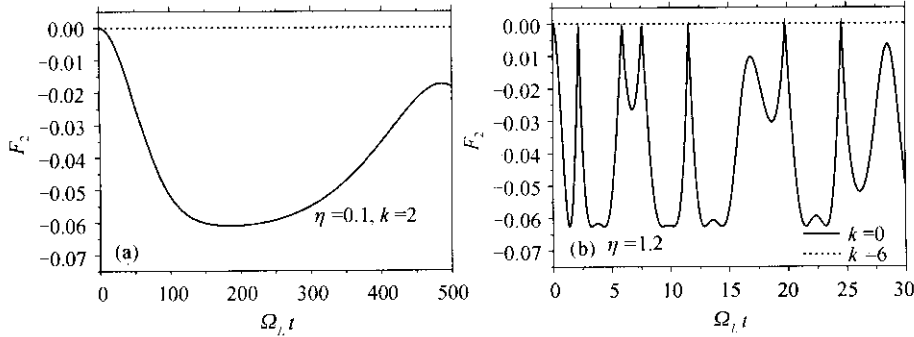


图 2 陷俘离子自旋压缩参量 F_2 的演化, 初始相干态强度为 $|\alpha|^2 = 1$ 和 $\varphi = 0$

Fig. 2 Evolution of the spin squeezing parameter F_2 of the trapped ion for the initial coherent state $|\alpha|^2 = 1$ and $\varphi = 0$

由图 2(b) 可以看出, 当 k 较大时 F_2 的值近似为零. 因为在离子初始振动相干态的强度不太大时 ($|\alpha|^2 = 1$), 大多数离子布居处在基态的较低振动能级. 当 k 较大时, 驱动场的频率远低于离子两能级的跃迁频率, 因此较低振动能级的大多数布居不能跃迁到激发态, 使得离子处在激发态的几率 y 很小, F_2 的值近似为零. 若要在 k 较大时也发生自旋压缩, 必须在初始时增强离子的振动强度.

5 结 论

本文研究了在激光驱动场作用下处在势阱中的陷俘离子的中心质量振动与离子内部能级跃迁的耦合效应. 在不采用 Lamb-Dicke 小参量极限下, 得到了该模型在一般情况下的精确解. 数值模拟表明, 即使初始陷俘离子的中心质量振动处在相干态, 选择适当的参数可以实现离子中心质量振动位置(或动量)涨落较大的压缩. 另一方面, 对离子自旋分量涨落的压缩也作了简要的讨论. 文中所用数据均取自红带共振, 对于蓝带共振也有类似结果. 这些成果可用于实现高精度离子光谱分析.

参 考 文 献

1 G. Zs. K. Horvath, R. C. Thompson, P. L. Knight. Fundamental physics with trapped ions [J]. *Cont. Phys.*, 1997, 38(1) 芳芳数据

2 Xueli Luo, Xiwen Zhu, Ying Wu. All-quantized Jaynes-Cummings interaction for a trapped ultracold ion [J]. *Phys. Lett. A*, 1998, 237(6) 354 ~ 358

3 Heping Zeng, Fucheng Lin. Nonclassical vibrational states in a quantized trap [J]. *Phys. Rev. A*, 1993, 48(3) 2393 ~ 2397

4 C. C. Gerry. Generation of Schrödinger cats and entangled coherent states in the motion of a trapped ion by a dispersive interaction [J]. *Phys. Rev. A*, 1997, 55(3) 2478 ~ 2481

5 L. Davidovich, M. Orszag, N. Zagury. Quantum nondemolition measurements of vibrational populations in ionic traps [J]. *Phys. Rev. A*, 1996, 54(6) 5118 ~ 5125

6 J. I. Cirac, A. S. Parkins, R. Blatt *et al.* "Dark" squeezed states of the motion of a trapped ion [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 70(5) 556 ~ 559

7 Wang Kaige, S. Maniscalco, A. Napoli *et al.* Quantum-state manipulation via quantum nondemolition measurements in a two-dimensional trapped ion [J]. *Phys. Rev. A*, 2001, 63(4): 043419-1 ~ 043419-11

8 Wang Kaige, S. Maniscalco, A. Napoli *et al.* Generation of pair coherent states in two-dimensional trapped ion [J]. *Chin. Phys. Lett.*, 2001, 18(3) 367 ~ 369

9 W. Vogel, R. L. de Matos Filho. Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion [J]. *Phys. Rev. A*, 1995, 52(5) #214 ~ 4217

10 D. M. Meekhof, C. Monroe, B. E. King *et al.* Generation of nonclassical motional states of a trapped atom [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, 76(11) 1796 ~ 1799

11 D. F. Walls, P. Zoller. Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, 47(10) 709 ~ 711