

文章编号: 0258-7025(2004)12-1437-04

# 用变量旋转变换实现声光双稳系统的混沌控制

吕翎, 杜增, 栾玲

(辽宁师范大学物理系, 辽宁 大连 116029)

**摘要** 设计了一种控制非线性系统混沌的变量旋转变换(VRT)方法。介绍了变量旋转变换方法的控制原理,并用此方法控制声光双稳(AOB)系统的混沌,以此验证其有效性。利用计算机仿真模拟了受控后声光双稳系统的动力学行为。模拟结果显示,旋转变换的关联系数  $\cos\theta, \sin\theta$  为系统的控制参数,通过恰当地选择旋转变换的关联系数,使受控后系统的李雅普诺夫(Lyapunov)指数  $\lambda$  由正值转变为负值,系统由混沌态转变为周期态,周期态不但有稳定的原系统存在的倍周期  $2^n p$  轨道,而且还有  $3^m p, 2^n \times 3^m p$  ( $n, m$  为整数)这样原系统以外的周期轨道。

**关键词** 非线性光学;非线性动力学;混沌控制;旋转变换;声光双稳系统;周期轨道

**中图分类号** O 415.5 **文献标识码** A

## Realization of Chaos Control in the Acousto-Optical Bistable System by the Variable Rotation Transformation

LÜ Ling, DU Zeng, LUAN Ling

(Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029, China)

**Abstract** The variable rotation transformation (VRT) method is proposed to control nonlinear chaos system. Control principle is introduced, and acousto-optical bistable (AOB) system is taken as a typical example to demonstrate the effectiveness of this method. The dynamical behaviors of controlled AOB system are given by computer numerical simulation. The results show that the correlation coefficients  $\cos\theta, \sin\theta$  are system control parameters, the Lyapunov exponent  $\lambda$  of the system can be changed from the positive numerical value in the chaotic state into the negative numerical value in the periodic state by appropriately selecting correlation coefficients, and the method not only can control the unstable periodic  $2^n p$  orbits embedded in initial system to stable periodic orbits, but can control chaos system to other periodic  $3^m p$  and  $2^n \times 3^m p$  ( $n, m$  are integers) orbits.

**Key words** nonlinear optics; nonlinear dynamics; chaos control; rotation transformation; acousto-optical bistable system; periodic orbit

## 1 引言

混沌系统由于其运动状态对初始值的敏感依赖性以及在状态空间区域上一定程度的遍历性,而显示出在诸多科学技术领域中的广泛潜在的应用价值,从而成为非线性科学中研究的热点,特别是混沌控制与同步更是目前科学研究的前沿课题。由此产

生了一系列的控制方法,归纳起来可以分为两类:一是通过调节参数达到对系统混沌行为的控制,如参数微扰方法<sup>[1]</sup>、参数共振法<sup>[2]</sup>等;二是对系统的变量实施反馈或无反馈控制,如脉冲反馈法<sup>[3]</sup>、自适应反馈法<sup>[4]</sup>、延时反馈法<sup>[5]</sup>、辅助参考反馈法<sup>[6]</sup>、外力反馈法<sup>[7]</sup>、周期扰动法<sup>[8]</sup>等。后者对于难以找到一个合适的可调参数的系统如生物系统、化学系统等的

收稿日期:2003-08-13;收到修改稿日期:2003-11-24

基金项目:国家自然科学基金(10175032)和辽宁省教育厅自然科学基金(202122023)资助项目。

作者简介:吕翎(1960—),女,大连人,辽宁师范大学物理系教授,硕士生导师,主要从事非线性物理方面的研究。

E-mail: lshdg@sina.com.cn

混沌控制特别适用。本文设计并详细讨论了一种变量旋转变换(VRT)混沌控制方法。

### 2 控制原理

对于  $n$  维混沌系统,存在  $n$  个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,它们是线性无关的,本控制方案的目的是经过数学上的变换后使得它们线性相关,即使它们之间存在耦合,利用这种耦合干扰原混沌系统,迫使其向周期轨道转化。具体操作方案如下:

设  $T$  是  $n$  维矢量空间  $V$  中的一个旋转变换,在基底  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  下,任一个矢量  $\vec{x}$  与经过旋转后的矢量  $\vec{x}T$  的坐标各为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \vec{x} \in V, \vec{x}T \in V$ ,则有

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \tag{1}$$

$$\vec{x}T = \sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}_j \tag{2}$$

由此得 
$$\sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i T \tag{3}$$

设  $\vec{e}_i T$  在基底  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  下的坐标为  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ,则

$$\vec{e}_i T = a_{i1} \vec{e}_1 + a_{i2} \vec{e}_2 + \dots + a_{in} \vec{e}_n = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{e}_j \tag{4}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ )

因此

$$\sum_{j=1}^n x'_j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^n x_i (\sum_{j=1}^n a_{ij} \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i) \vec{e}_j \tag{5}$$

比较等式两端,有

$$x'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{6}$$

通常写成矩阵形式为

$$[x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n]^T = A[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \tag{7}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$A$  称之为变换矩阵,  $a_{ij}$  称为变量之间旋转变换的关联系数。(7) 式便是矢量空间中任意矢量  $\vec{x}$  与在坐标变换下的矢量  $\vec{x}T$  在同一基底坐标的关系。可以看出,本工作正是利用这种变换方法使原本一组线性无关的坐标  $x_1, x_2, \dots, x_n$  变为线性相关的一组新的组合,使原非线性系统中变量之间产生耦合,达到控制混沌的目的。

例如,在二维混沌系统中存在两个变量  $x, y$ ,将它看成是平面上由原点出发的全体矢量构成的二维

实空间  $V_2$  中的一个任意矢量  $\vec{x} = (x, y)$ ,现将它绕原点进行旋转变换,旋转角度为  $\theta$ ,变换后的矢量为  $\vec{x}' = (x', y')$ ,则受控后系统的变量与原系统变量之间存在下列耦合关系

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \tag{9}$$

通过调节关联系数  $\cos\theta, \sin\theta$ ,使系统在受控状态下演化。

### 3 控制结果

声光双稳系统(AOB)是典型的由倍周期分岔进入混沌的模型,它的表述形式为<sup>[9]</sup>

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + \pi \{ r - u \sin^2 [x(t - \tau_D) - x_b] \} \tag{10}$$

式中  $x$  为驱动源输入处的归一化电压,  $x_b$  为驱动源的偏压,  $r$  为放大器的偏压,  $\tau$  为系统的响应时间,  $\tau_D$  为系统的延迟时间,  $u$  为入射光强,它是系统的调控参数。在长延迟情况下,(10) 式左端可以忽略不计,这样系统可以由下列迭代方程描述

$$x_{n+1} = \pi [r - u \sin^2 (x_n - x_b)] \tag{11}$$

文献[9]给出当  $r = 3, x_b = 2$  时,系统由倍周期分岔  $1p \rightarrow 2p \rightarrow 4p \rightarrow \dots \rightarrow 2^n p$  进入混沌。

正的李雅普诺夫(Lyapunov)指数是非线性系统具有混沌的本质特征<sup>[10]</sup>,计算系统的李雅普诺夫指数  $\lambda$  随参数  $u$  的演化如图 1 所示,当  $u$  取值 1.5 时,得到系统的李雅普诺夫指数  $\lambda$  为 1.02,说明系统此时处于混沌态,作出系统状态分岔图如图 2 所示。

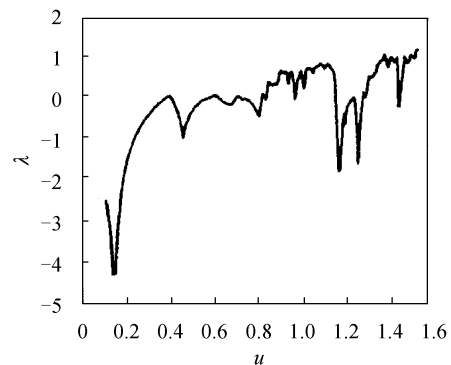


图 1 李雅普诺夫指数  $\lambda$  随参数  $u$  的演化  
Fig. 1 Evolution of the Lyapunov exponent  $\lambda$  with parameter  $u$

由控制原理可知,欲对系统进行旋转变换控制,一般系统的维数应  $\geq 2$ ,现在系统(11)式是一维的,

不能直接运用控制原理,故对系统(11)式重新加以构造写成二维形式

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pi[r - u\sin^2(x_n - x_b)] \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (12)$$

比较(11)和(12)式可以看出,当系统(11)式处

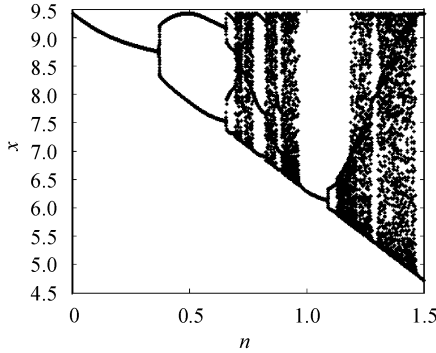


图 2 声光双稳系统的分岔图

Fig.2 Bifurcation map of AOB system

于混沌态时,系统(12)式也处于混沌态,且两者状态变量的不稳定不动点也是相同的。若使系统(12)得到稳定控制,则通过反馈,系统(11)式也将得到稳定控制,且(11)式中各量的物理含义不变,所以,(11)式和(12)式所代表的系统的动力学性质是等效的。

现在,对系统(12)式施加旋转变换控制,由于它是一个二维系统,故对它直接运用(9)式便得到

$$\begin{cases} x'_n = x_n \cos\theta - y_n \sin\theta \\ y'_n = x_n \sin\theta + y_n \cos\theta \\ x_{n+1} = \pi[r - u\sin^2(x'_n - x_b)] \\ y_{n+1} = x'_n \end{cases} \quad (13)$$

通过数值仿真模拟,可以形象直观地展示其控制效果。在模拟过程中,保持系统参数  $r, x_b, u$  值不变,调节变量之间的关联系数  $\cos\theta, \sin\theta$  中的  $\theta$  值,获得了理想的控制结果。几个典型的周期轨道如图 3 (a)~(f)所示。

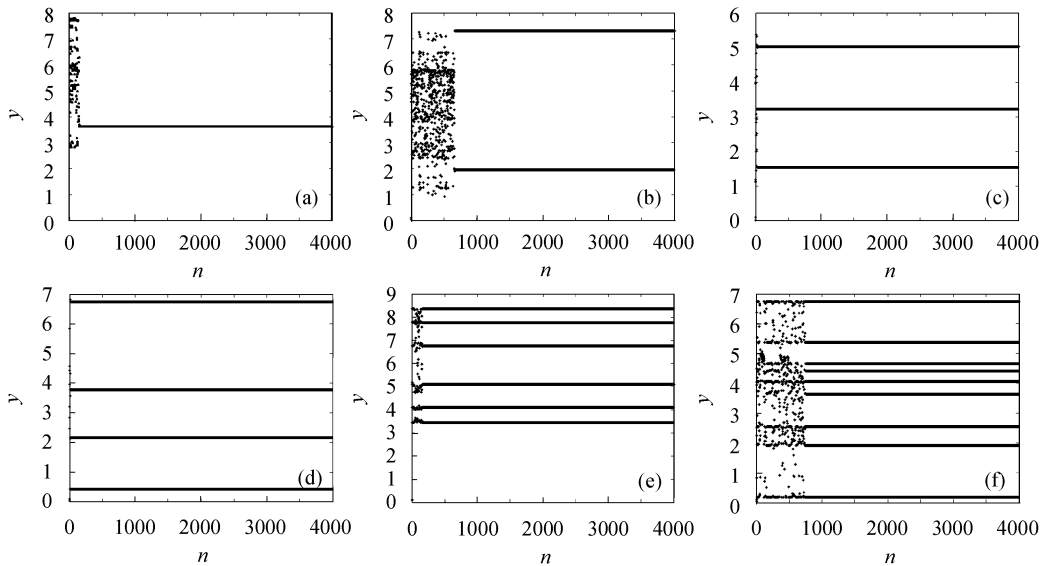


图 3 几种典型的周期轨道

Fig.3 Typical periodic orbits

(a)  $1p$  ( $\theta = 0.26$ ); (b)  $2p$  ( $\theta = 0.50$ ); (c)  $3p$  ( $\theta = 0.77$ ); (d)  $4p$  ( $\theta = 0.56$ ); (e)  $6p$  ( $\theta = 0.64$ ); (f)  $9p$  ( $\theta = 0.59$ )

由图 3 可以看出,这种变量旋转变换方法不仅可以使系统控制在原系统存在的倍周期轨道  $2^m p$  上,而且可以将系统控制在其他周期轨道上,这些轨道数目是  $3^m p, 2^n \times 3^m p$  ( $n, m$  为整数)。同时,可以看到,关联系数  $\cos\theta, \sin\theta$  中的  $\theta$  值是一个混沌系统的外部参数,而不是系统本身的参数,因此这种控制方案的显著优势在于控制时不必了解系统的详细信息,因此在控制多维复杂系统时特别方便适用。

## 4 结 论

设计了一种变量旋转变换方法控制非线性系统混沌。介绍了变量旋转变换方法的控制原理,给出了矢量空间中任意矢量与在旋转变换下的新矢量在同一基底坐标的关系以及旋转变换中关联系数的矩阵表达式,并用此方法控制声光双稳系统的混沌,以此验证其有效性。仿真模拟显示,通过调整旋转变换的关联系数  $\cos\theta, \sin\theta$  中的  $\theta$  值,使受控后系统

的李雅普诺夫指数  $\lambda$  由正值 1.02 转变为小于 0 的负值,系统的动力学性质由混沌态转变为周期态,周期态不但有稳定的原系统存在的倍周期  $2^n p$  轨道,而且还有  $3^m p, 2^n \times 3^m p$  ( $n, m$  为整数)这样原系统以外的周期轨道;并且这种控制方法控制时不必了解系统的详细信息,因此在控制多维复杂系统时特别方便适用。本文设计的变量旋转变换方法及仿真模拟将对实际混沌系统的控制提供理论依据。

### 参 考 文 献

- 1 E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke. Controlling chaos [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11):1196~1199
- 2 R. Roy, T. W. Murphy Jr., T. D. Maier *et al.*. Dynamical control of chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, **68**(9):1259~1262
- 3 J. Güémez, M. A. Matias. Control of chaos in unidimensional map [J]. *Phys. Lett. A*, 1993, **181**(1):29~32
- 4 K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. *Phys. Lett. A*, 1992, **170**(6):421~428
- 5 Lü Ling, Li Gang, Ou Yongcheng. Influence of the control intensity to chaos control in Bragg optical bistable system [J]. *Optical Technique*, 2002, **28**(1):16~21
- 6 Lü Ling, Li Chengren. Chaos control of a mixed-optical bistable system [J]. *J. Optoelectronics • Laser*, 2002, **13**(11):1187~1189
- 7 Lü Ling, Li Chengren. Direct chaotic system towards periodic oscillation solutions based on perturbation amplitude [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(4):322~324
- 8 Lü Ling, Li Gang. Modulation effect of periodic phase to chemical oscillation [J]. *Chin. J. Chem. Phys.*, 2003, **16**(3):193~196
- 9 R. Válee, C. Delisle, J. Chrostowski. Noise versus chaos in acousto-optic bistability [J]. *Phys. Rev. A*, 1984, **30**(1):336~342
- 10 Lü Ling. *Nonlinear Dynamics and Chaos* [M]. Dalian: Dalian Publishing House, 2000. 130~134

\*\*\*\*\*

## 征 订 启 事

### 《光学手册》

顾问:龚祖同 主编:李景镇 陕西科学技术出版社 16开 1541页 定价:100.00元

本手册是我国编写的第一本基础性大型光学手册。全书有 2700 多个公式,1400 余幅插图和 400 多个数据表格,230 万字。手册包括 25 个光学分科(辐射度学和光度学,色度学,光谱学,光源,成像光学,信息光学,量子光学,统计光学,分子光学,非线性光学,光的偏振,光学薄膜和滤光片,纤维光学和变折射光学,集成光学,视觉光学,大气光学,海洋光学,高速摄影和光子学,显微物镜和目镜,光学调制器,热探测器和光电探测器,感光材料,光学计量仪器,光学材料,光学工艺学),5 个附录,2 个索引。由 20 多位光学专家编撰完成,在编写过程中得到了龚祖同、王大珩、侯洵、薛鸣球等著名光学专家的指导和帮助,保证了该手册的编写质量和权威性。资料丰富,表达方式详略得当,是“一本兼顾光学工作者和非光学科技工作者的参考书”(引自王大珩院士为本书的题词)。

### 《第十六届全国激光会议论文集》

第十六届全国激光学术会议于 2003 年 10 月 19~22 日在上海举行,会议论文集由《中国激光》编辑部出版。本论文集共收录论文 173 篇,600 多页。定价为每册 100 元,光盘版为每张 50 元。

论文集较全面地反映了近年来我国激光科学技术研究、应用和产业化的最新成果,显示了激光科学技术对国家 863 计划、重大项目、国家基金和产业发展等方面的重要作用与贡献。

### 《第八届国际光电子和光通信学术会议(OECC'2003)论文集》

第八届国际光电子和光通信学术会议于 2003 年 10 月 13~16 日在上海举行,会议论文集由《光学学报》编辑部出版。本论文集共收录论文 436 篇,800 多页,分上下两册。定价为每套 100 元,光盘版为每张 50 元。

对该论文集 OECC 会议节目委员会的评价是:质量之高,可与国际上知名的优秀论文集媲美。

如需购买,请与光学期刊联合编辑部葛晓红联系。

电话:021-69918428,021-69918011,请从邮局汇款

地址:上海 800-211 信箱,光学期刊联合编辑部 邮编:201800