

文章编号: 0258-7025(2004)01-0085-04

# 全息反射镜的矩阵分析方法和数值模拟

陈西园

(辽宁石油化工大学理学院, 辽宁 抚顺 113001)

**摘要** 提出采用特征矩阵的方法研究全息反射镜(HM)的特性。在矩阵建立过程中考虑了介质折射率是连续变化的,并且根据全息介质的特性采用小波数近似,同时充分利用了光栅结构的周期性特点。该方法模型简单,物理意义直观、明确,并且只要增加细分层数值,或将幂级数展开到波数  $k$  的更高阶次,就可以提高计算精度。该方法不受“近布拉格入射”条件的限制,光栅周围的不同介质只要附加相应的特性矩阵就可以解决。对不同厚度、不同折射率调制的全息光栅的反射率、角度选择性以及波长选择性给出了数值模拟。

**关键词** 光电子学;全息反射镜;特征矩阵;全息光栅;衍射特性

中图分类号 O 438.1 文献标识码 A

## Matrix Analysis and Numeric Simulation of Holographic Mirrors

Chen Xi-yuan

(College of Science, Liaoning University of Petroleum & Chemistry Technology, Fushun, Liaoning 113001, China)

**Abstract** A simple and explicit characteristic matrix analysis is used to deal with the holographic mirrors (holographic volume gratings). The continuously varying of the refractive index is considered, and according to the property of holographic material, the small wavenumber approximation is utilized and the periodicity of the grating is used. The calculated precision can be improved by increasing the number of sublayer or developing the terms of power up to higher. The method does not be restricted to region of “near Bragg incidence” and is suitable to solve problems of gratings bounded by two different media. Then the reflectivities, the angular selectivities and the wavelength selectivities of several gratings are computed as numeric simulation.

**Key words** optoelectronics; holographic mirror; characteristic matrix; holographic grating; diffraction character

## 1 引 言

F-P 标准具是极有效的高分辨分光仪和窄带滤波器。由于对两板的反射率以及板面形状和平行程度的严格要求,F-P 标准具价格昂贵,另外用于高功率选频(例如用在激光器的谐振腔内)时还容易受到损害。全息 F-P 标准具制作费用低,使用一次记录形成的全息反射镜(HM)为两板,自动形成相互平行的全息反射光栅,同时在全息介质内不存在明显的反射界面,解决了在高功率条件下容易受损的问题,因此具有广泛使用的前景<sup>[1,2]</sup>。全息反射镜作为标准具的反射板应有极高的反射率,但是当入射光偏离布拉格条件时,全息反射镜的反射率会迅速

下降。研究全息反射镜的反射率以及它的角度选择性和波长选择性是非常重要的。

全息反射镜是非倾斜厚反射全息位相光栅。关于体全息光栅的衍射问题已有严格的理论<sup>[3]</sup>,但是经常使用的是近似理论,因为在特殊条件下的合理近似和假定,会使问题大大地简化。最常采用的近似理论是 Kogelnik 理论和两波模式理论<sup>[4~6]</sup>。然而,在 Kogelnik 理论中的边界并不是真实的物理边界,它仅仅是数学参考位置。Kogelnik 理论忽略了二阶导数和边界产生的衍射波,不适合解相邻的介质与光栅介质不同的问题<sup>[3]</sup>,而作为全息反射镜,全息光栅两面都有覆盖层。两波模式理论包括了二阶导数和边界效应,但它仅在近布拉格条件下成立<sup>[3]</sup>。

收稿日期:2002-08-12; 收到修改稿日期:2002-11-14

作者简介:陈西园(1946—),男,湖南长沙人,辽宁石油化工大学理学院教授,硕士,研究方向为全息学及光信息处理。E-mail:chenxy@163.com

当研究角度选择性和波长选择性时,往往不得不考虑远偏离布拉格入射,因此两波模式理论未必适合我们的情况。本文用特征矩阵方法来研究有关问题。

## 2 模型和特征矩阵的建立

全息反射镜可以看作非倾斜反射全息位相光栅。像上面列举的大部分文献一样,假定它是纯位相正弦光栅(无吸收),折射率调制度( $n_1$ )小( $n_1 \ll n_h$ ),入射光是与入射面垂直的单色平面偏振光。全息反射镜两侧的介质与全息介质不同,如图1所示。反射镜的边界不一定是正弦光栅的峰,即光栅的起点和终点可以是任意值。但是由于构成全息反射镜的全息介质是足够厚的,在边界处的分数周期的存在所产生的影响完全可以忽略<sup>[7]</sup>。作为分层介质,全息介质的相对介电常数可以表述为

$$\epsilon_h(z) = \epsilon_{h0} + \epsilon_1 \cos(2\pi z/\Lambda) \quad 0 \leq z \leq d \quad (1)$$

其中  $\epsilon_{h0}$  和  $\epsilon_1$  分别代表全息介质的平均介电常数和介电常数的调制度,  $d$  为全息介质的厚度。根据介电常数与折射率之间的关系,有:  $\epsilon_{h0} = n_{h0}^2$ ,  $\epsilon_1 = 2n_{h0}n_1$ , 其中  $n_{h0}$  为介质的平均折射率。调制周期  $\Lambda$  为两相邻峰的距离,即

$$\Lambda = \lambda_r / 2n_{h0} \cos\varphi_{hr} \quad (2)$$

其中  $\lambda_r$  为记录光的波长,  $\varphi_{hr}$  为记录光在全息介质中的入射角。

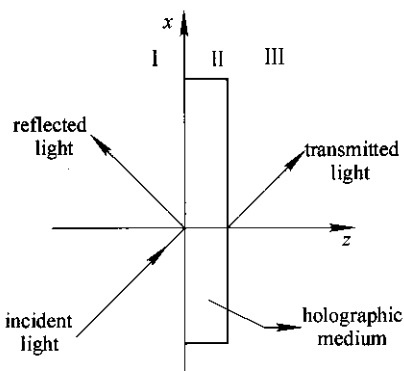


图1 全息反射镜对平面波的反射  
(全息反射镜的介质与界面外的介质不同)  
Fig.1 Reflection of a plane wave by a HM  
bounded by two different mediums

显然全息介质折射率的分布具有明显的周期性。将相邻峰之间的介质看作为一个自然层,整个介质就是由这些完全相同的自然层构成的介质膜堆,而每一个自然层又是由两个反对称的基本层组

成的,折射率为  $n_{h0}$  的平面是它们的对称面。由(2)式可知自然层的厚度与记录光的波长有相同的数量级,再把每个基本层细分成大量很薄的相互平行的分层,可使每个分层的厚度  $l$  都比光波长小很多。根据电磁波在分层介质中传播的介质膜理论,在每层介质中麦克斯韦方程都可以化成为一个特征矩阵。而当折射率连续改变的分层介质的厚度足够小时,其特征矩阵可以利用小波数近似展开成波数  $k$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ) 的幂级数,再根据条件  $\mu_r = 1, n_1 \ll n_h$ , 幂级数只要保留到  $k^2$  项,就可以得到很好的近似<sup>[8]</sup>。由此可以得到在介质中某个分层的特征矩阵为

$$m_j = \begin{bmatrix} 1 - k^2 \int_0^l p^2(z) z dz & ikz Z_0 \\ ik \int_0^l p^2(z) dz / Z_0 & 1 - k^2 \int_0^l p^2(z) dz dl' \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中  $p(z) = n(z) \cos\varphi(z)$ ,  $n(z)$  代表  $z$  点介质的折射率,  $\varphi(z)$  代表在  $z$  点入射光与  $z$  轴的夹角, 而  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 。假定一个基本层有  $N$  ( $N = \Lambda/2l$ ) 个分层, 将(2)式代入(3)式中完成相应积分, 可得在一个基本层中第  $j$  个分层的特征矩阵的各矩阵元

$$\begin{aligned} m_{j11} &= 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \{1 + c[\alpha_0 \sin(2j\alpha_0) - \sin\alpha_0 \sin[(2j-1)\alpha_0]]\} \\ m_{j12} &= i\alpha Z_0 / p_{hi} = im'_{j12} Z_0 / p_{hi} \\ m_{j21} &= i\alpha \{1 + c\alpha_0 \sin\alpha_0 \cos[(2j-1)\alpha_0]\} p_{hi} / Z_0 = im'_{j21} p_{hi} / Z_0 \\ m_{j22} &= 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \{1 - c[\alpha_0 \sin 2(j-1)\alpha_0] - \sin\alpha_0 \sin[(2j-1)\alpha_0]\} \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\alpha_0 = \pi/2N$ ,  $\alpha = \alpha_0 \lambda_r \cos\varphi_{hi} / (\lambda_i \cos\varphi_{hr})$ ,  $p_{hi} = n_{h0} \cos\varphi_{hi}$ ,  $c = 2n_{h0}n_1 / (\alpha_0^2 p_{hi}^2)$ , 而  $\lambda_i$  为入射光的波长,  $\varphi_{hi}$  为入射光在全息介质中的入射角。

那么,基本层和自然层的特征矩阵分别是

$$\begin{aligned} m^{b1} &= \prod_1^N m_j = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} & im'_{12} Z_0 / p_{hi} \\ im'_{21} p_{hi} / Z_0 & m_{22} \end{bmatrix} \\ m^{b2} &= \begin{bmatrix} m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \\ M_n &= m^{b1} \times m^{b2} = \\ &= \begin{bmatrix} m_{11} m_{22} - m'_{12} m'_{21} & i2m_{11} m'_{12} Z_0 / p_{hi} \\ i2m_{22} m'_{21} p_{hi} / Z_0 & m_{11} m_{22} - m'_{12} m'_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

全息光栅(总共  $K$  个自然层)的特征矩阵为

$$M = M_n^K = \begin{bmatrix} M_{11} & iM'_{12}Z_0/p_{hi} \\ iM'_{21}p_{hi}/Z_0 & M_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

条纹平行于表面的反射光栅,不会出现高次波,因此入射波只分成为透射波和反射波。从(6)式可以得到体全息光栅的反射系数为

$$r = \frac{(M_{11}p_{ai} - M_{22}p_{si}) + i(M'_{12}p_{ai}p_{si}/p_{hi} - M'_{21}p_{hi})}{(M_{11}p_{ai} + M_{22}p_{si}) + i(M'_{12}p_{ai}p_{si}/p_{hi} + M'_{21}p_{hi})} \quad (7)$$

因此体全息光栅的反射率  $R = |r|^2$  为

$$R = \frac{(M_{11}p_{ai}p_{hi} - M_{22}p_{si}p_{hi})^2 + (M_{12}p_{ai}p_{si} - M_{21}p_{hi}^2)^2}{(M_{11}p_{ai}p_{hi} + M_{22}p_{si}p_{hi})^2 + (M_{12}p_{ai}p_{si} + M_{21}p_{hi}^2)^2} \quad (8)$$

其中  $p_{ai} = n_a \cos \varphi_{ai}$ ,  $p_{si} = n_s \cos \varphi_{si}$ , 下标  $a$  和  $s$  分别代表在区域 I 和区域 III 中的值。

这里给出的矩阵算法具有简洁明了的形式,在计算机上运算起来十分容易,并且只要增加细分层数值,或将幂级数展开到波数  $k$  的更高阶次,就可以进一步提高计算精度。该方法直接由电磁波传输特性得出,在推导过程中没有利用布拉格衍射的条件,

而光栅周围的不同介质只要附加相应的特性矩阵就可以解决,因此非常适合处理光栅介质与周围介质不同的问题,也不受“近布拉格入射”条件的限制。

### 3 数值模拟

下面利用特征矩阵方法给出一些全息光栅反射特性的数值模拟。

为了能和文献[2]的结果比较,这里采用的数据基本与文献[2]中的一致。全息光栅由垂直入射的平面光波记录形成,光波长  $\lambda_r = 550 \text{ nm}$ ;全息介质平均折射率  $n_{h0} = 1.2$ ;周围介质的折射率  $n_a = n_s = 1.0$ ;调制周期  $\Lambda = \lambda_r/2n_h = 229.2 \text{ nm}$ 。图 2 为反射率-入射角关系曲线,取入射光波长等于记录光波长,即  $\lambda_i = \lambda_r$ 。图 2(c)中将介质折射率调制度作为参量,图 2(d)中将介质厚度作为参量。图 3 为反射率-入射角频率关系曲线,取光的入射角等于记录光的入射角,  $\varphi_{ai} = \varphi_{ar} = 0^\circ$ 。图 3(a)中将介质厚度作为参量,图 3(b)中将介质折射率调制度作为参量。

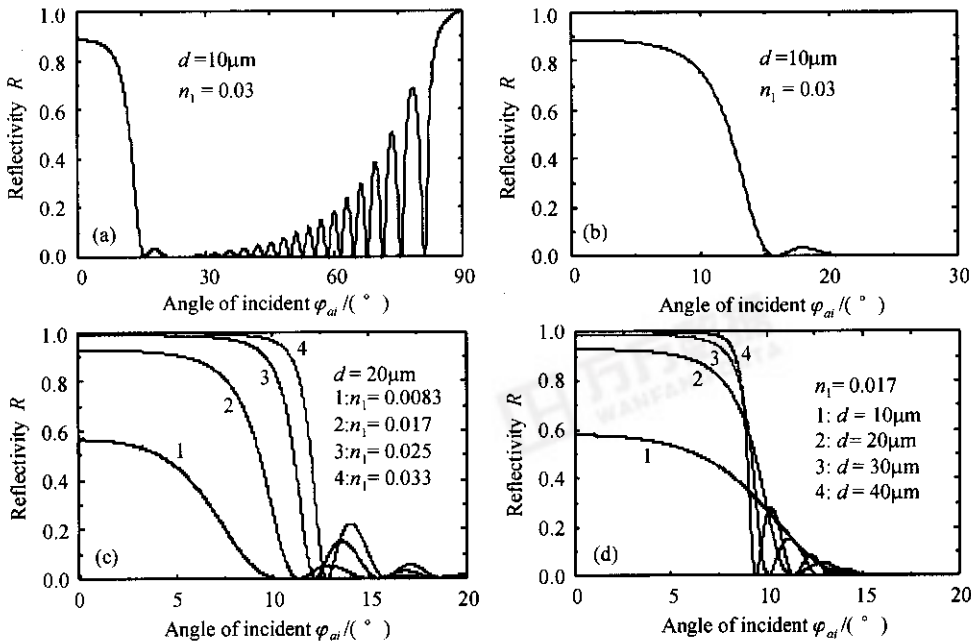


图 2 反射率  $R$  与入射角  $\varphi_{ai}$  的关系曲线

Fig. 2 Reflectivity  $R$  as a function of the incident angle  $\varphi_{ai}$

这里得到的结果与 Kogelnik 理论得到的结果比较,在满足或接近满足布拉格入射的条件下,二者的差别不大,随着入射对布拉格入射条件的偏离的增大,二者结果的差别也逐渐增大。反射率与入射角关系曲线(见图 2(a)),入射角超过一定值以

后,反射率的大小随入射角的增大而振动并逐渐增加至最大值 1,这是由于边界处存在反射,构成等效平行平面,形成等倾多光束干涉;Kogelnik 理论忽略了边界效应,就不会出现上述现象,入射角超过一定值以后,反射率的大小随入射角的增大而逐

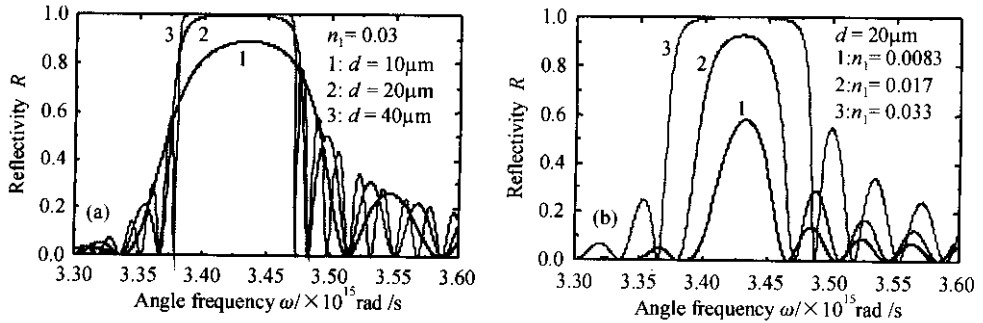


图 3 反射率  $R$  与入射光角频率  $\omega$  的关系曲线

Fig. 3 Reflectivity  $R$  as a function of the angle frequency  $\omega$  of the incident light

渐减少至 0。反射率与角频率关系曲线表明,以原光频率为中心两侧并不对称,而 Kogelnik 理论得到的结果是对称的。这里得到的结果与两波模式理论的相应结果比较,无论是反射率与入射角关系曲线,还是反射率与角频率关系曲线都基本相同,当然在主极大的宽度、在次极大的高度以及位置上两者还是有一定的不同。但是特征矩阵方法模型简单,物理意义直观、明确,在计算机上实现起来十分容易,并且可以达到很高的精度。

### 参 考 文 献

- 1 L. Sica, T. Aye, I. Tengara *et al.*. Compensation of spacer-thickness variations in a holographic Fabry-Perot filter [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(22):5021~5028
- 2 W. Wang. Reflection and transmission properties of holographic mirrors and holographic Fabry-Perot filter. I. Holographic

mirrors with monochromatic light [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(13):2560~2566

- 3 T. K. Gaylord, M. G. Moharam. Analysis and application of optical diffraction by gratings [J]. *Proc. IEEE*, 1985, **73**(5):894~937
- 4 H. Kogelnik. Coupled wave theory for thick hologram gratings [J]. *Bell. Syst. Tech. J.*, 1969, **48**(9):2909~2947
- 5 U. Langbein, F. Lederer. Modal theory for thick holographic gratings with sharp boundaries, I. General treatment [J]. *Opt. Acta*, 1980, **27**(2):171~182
- 6 F. Lederer, U. Langbein. Modal theory for thick holographic gratings with sharp boundaries, II. Unslanted transmission and reflection gratings [J]. *Opt. Acta*, 1980, **27**(2):183~200
- 7 M. G. Moharam, T. K. Gaylord. Chain-matrix analysis of arbitrary-thickness dielectric reflection gratings [J]. *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, **72**(2):187~190
- 8 R. Jacobsson. Light Reflection from Films of Continuously Varying Refractive Index [M]. *Progress in Optics*, Vol. 5, 249~286, ed. E. Wolf (Amsterdam: North Holland Publishing Company and New York: J. Wiley and Sons, 1965)