

文章编号: 0258-7025(2004)01-0053-04

指数形式关联噪声驱动下单模激光 线性模型的随机共振

张良英^{1,3}, 曹 力¹, 吴大进²

(华中科技大学¹ 激光技术国家重点实验室, ² 物理系, 湖北 武汉 430074)
³ 襄樊学院物理系, 湖北 襄樊 441053)

摘要 研究了具有指数形式关联的两白噪声驱动下单模激光线性模型受信号调制后的输出信噪比, 发现了随机共振现象。根据计算结果讨论了噪声(噪声强度、噪声间互关联程度和关联时间)和信号(信号频率和信号强度)对信噪比的影响。

关键词 激光物理; 噪声; 指数形式互关联; 功率谱; 信噪比; 随机共振

中图分类号 TN 241 文献标识码 A

Stochastic Resonance in the Linear Model of Single-mode Laser Driven by Exponential Function Correlated Noises

ZHANG Liang-ying^{1,3}, CAO Li¹, WU Da-jin²

(¹ State Key Laboratory of Laser Technology, ² Department of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China
³ Department of Physics, Xiangfan University, Xiangfan, Hubei 441053, China)

Abstract A stochastic resonance (SR) phenomenon was observed by studying the output signal-to-noise (SNR) of the linear model of single-mode laser, which driven by two white noises correlated in the form of a exponential function. Moreover, the influence on SNR by noise (noise intensity, correlated strength and correlation time between noises) and signal (signal frequency and signal strength) was discussed.

Key words laser physics; noise; exponential correlation form; power spectrum; signal-to-noise rate; stochastic resonance

1 引 言

20 世纪 90 年代初期, 一般认为双稳或多稳的非线性系统、噪声和输入信号是出现随机共振的三个必不可少的条件。近年来发现上述三个条件并非缺一不可。在单稳系统中可以出现随机共振现象, 在没有外加周期力的二维系统中由于存在内在的周期性质, 也可以产生随机共振^[1], 就是在线性系统中也可以出现随机共振现象^[2~4]。

激光器工作时总是伴随有涨落的出现^[5], 因此对激光系统输入信号后, 噪声和信号之间会存在协

作效应, 从而出现随机共振现象。这一现象首先在环形激光器中观察到^[6]。激光系统存在两种噪声, 一种是自发辐射的量子噪声, 以加法噪声形式出现; 另一种是抽运噪声, 以乘法噪声形式出现。最近几年来, 为更接近实际情况, 研究者们还进一步考虑了噪声间的互关联。互关联往往考虑为两种形式, 一种是 δ 函数形式(如 $\lambda \sqrt{QD} \delta(t-t')$), 另一种是 e 指数形式(如 $\frac{\lambda \sqrt{QD}}{2\tau} \exp\left(\frac{-|t-t'|}{\tau}\right)$)^[7,8]。

以往所研究的线性系统均存在乘法噪声, 且噪声一定要求有“色”, 才会在线性系统中出现随机共

收稿日期: 2002-05-13; 收到修改稿日期: 2002-07-09

基金项目: 国家自然科学基金(编号: 19975020)资助项目。

作者简介: 张良英(1957—), 女, 襄樊学院物理系副教授, 主要从事激光动力学研究。E-mail: djwu@wuhan.cngb.com

振现象。本文采用的单模激光线性模型,其乘法噪声和加法噪声经过线性化后均变为加法噪声,两噪声均考虑为“白”噪声,当计算了受信号调制后的输出信噪比后,发现了随机共振单峰响应曲线。进一步讨论了噪声、信号和互关联程度与互关联时间等对随机共振的影响。本文的计算结果是未作任何近似的精确解析表达式,对信号的振幅和频率以及噪声强度均未作任何限制,因此可以揭示出由于近似限制范围以外的规律。

2 输入信号后的单模激光光强输出功率谱及信噪比

单模激光增益模型^[9]输入信号后的光强方程为

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A\cos\Omega t \quad (1)$$

式中的第1项为损失项;第2项为增益项;第3项为“虚假漂移项”;第4项是由于增益参数涨落引起的乘性噪声项;第5项是由于量子噪声引起的乘性噪声项;第6项为信号调制项。

其中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= Q\delta(t-t') \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= D\delta(t-t') \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \xi(t')\eta(t) \rangle = \\ &= \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{2\tau}\exp\left(-\frac{|t-t'|}{2}\right) \\ & \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

当(3)式中的 $\tau \rightarrow 0$ 时,就过渡到噪声间为 δ 函数关联形式

$$\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \xi(t')\eta(t) \rangle = \lambda\sqrt{DQ}\delta(t-t') \quad (4)$$

(1)~(4)式中 I 为激光光强; λ 为衡量噪声关联程度的参数; Q, D 分别为乘法和加法噪声强度; τ 为噪声间的互关联时间; $\beta = \tilde{A}/\Gamma$, \tilde{A} 和 Γ 分别为自饱和系数和增益系数; K 为损失系数。

将(1)式在确定论定态光强 $I_0 = (\Gamma - K)/\beta K$ 附近线性化

$$I = I_0 + \varepsilon(t) \quad (5)$$

其中 $\varepsilon(t)$ 为微扰项,可得线性化方程为

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) + A\cos\Omega t \quad (6)$$

式中 $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = \frac{D}{\gamma} - \left(\frac{D}{\gamma} + \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) e^{-\gamma t} + \frac{A}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}} \cos(\Omega t - \Theta) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \cos\Theta &= \frac{\gamma}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}} \\ \sin\Theta &= \frac{\Omega}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

根据平均光强相关函数的定义

$$B(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} \quad (8)$$

(8)式中

$$\overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t'}^{t'+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle I(t'+t)I(t') \rangle dt'$$

可得到平均光强相关函数为(只讨论 $\gamma \neq \tau^{-1}$)

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{A^2}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} \cos\Omega t + I_0^2 + \frac{2I_0 D}{\gamma} + \frac{D^2}{\gamma^2} + \\ & \quad \left[\frac{2I_0^2 Q}{\gamma(1+\beta I_0)^2} + \frac{2I_0 D}{\gamma} - \right. \\ & \quad \left. \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{\gamma(1+\beta I_0)(\tau^2 \gamma^2 - 1)} \right] e^{-\tau|t|} + \\ & \quad \frac{4I_0^{3/2} \lambda \tau \sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)(\gamma^2 \tau^2 - 1)} e^{-|t|/\tau} \end{aligned} \quad (9)$$

将(9)式做傅里叶变换,得到光强的功率谱为

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (10)$$

$S_1(\omega)$ 为输出信号功率谱, $S_2(\omega)$ 为输出噪声功率谱,具体形式为

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{\pi A^2}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \\ S_2(\omega) &= \left[\frac{4I_0^2 Q}{(1+\beta I_0)^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{8I_0^{3/2} \lambda \tau^{-2} \sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)(\omega^2 + \tau^{-2})} + 4I_0 D \right] \frac{1}{\gamma^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

信噪比定义为输出总信号功率与 $\omega = \Omega$ 处的单位噪声谱的平均功率之比(只取正 ω 的谱)

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)} \quad (11)$$

(11)式中, $P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega$, 则有

$$R = \frac{\frac{\pi A^2}{2}}{\frac{4I_0^2 Q}{(1+\beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1+\beta I_0)(\tau^2 \Omega^2 + 1)} + 4I_0 D} \quad (12)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时回到了文献[10]的计算结果

$$R = \frac{\frac{\pi A^2}{2}}{\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)} + 4I_0 D} \quad (13)$$

3 结论和讨论

1) 图 1(a)~(c)是根据(12)式分别以 Ω, τ, D 为参数画出的 $R \sim Q$ 曲线。可以看出,信噪比 R 随乘法噪声强度 Q 的增大出现一个共振峰,且随着信号频率 Ω 及互关联时间 τ 的增大峰值降低,极值位置向左移动;随着加法噪声强度 D 的增加峰值降低,极值位置向右移动。

图 2(a)~(c)是根据(12)式分别以 Ω, τ, Q 为参

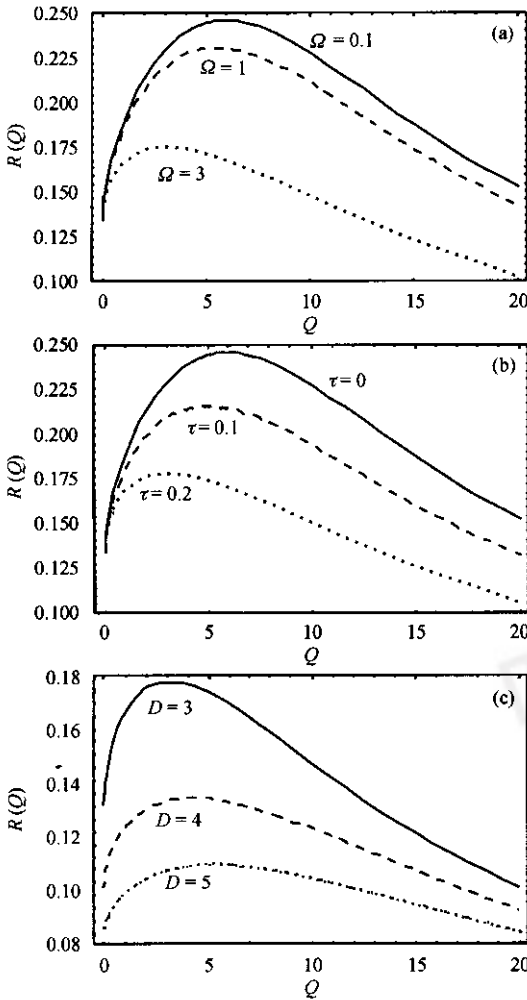


图 1 信噪比 R 和乘法噪声强度 Q 的函数关系曲线
Fig. 1 Curves of SNR R vs intensity Q of multiplicative noise

- (a) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.7, D = 3, \tau = 0.2;$
- (b) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.7, Q = 3, \Omega = 3;$
- (c) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.7, \tau = 0.2, \Omega = 3$

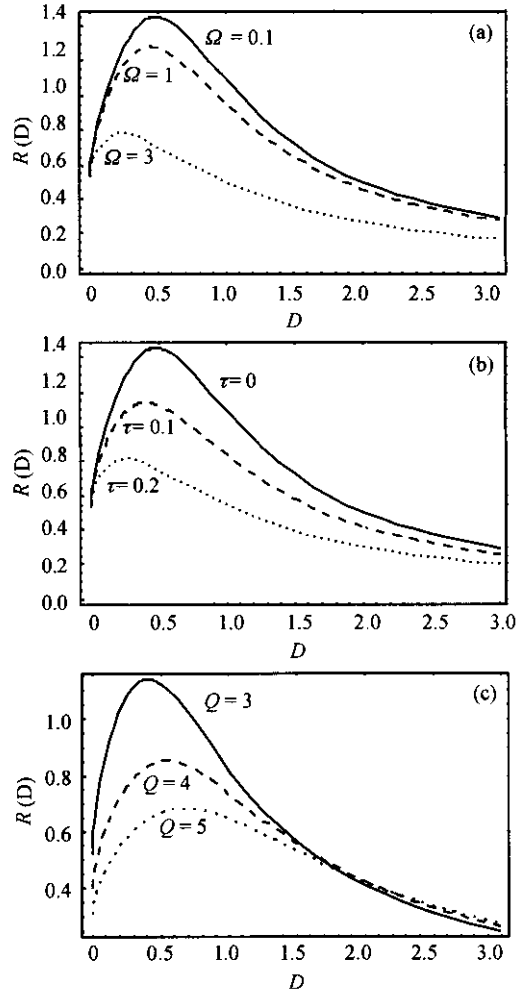


图 2 信噪比 R 和加法噪声强度 D 的函数关系曲线
Fig. 2 Curves of SNR R vs intensity D of additive noise

- (a) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.8, Q = 3, \tau = 0.2;$
- (b) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.8, Q = 3, \Omega = 3;$
- (c) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \lambda = -0.8, \tau = 0.1, \Omega = 3$

数画出的 $R \sim D$ 曲线。可以看出,信噪比 R 随加法噪声强度 D 的增大也会出现一个共振峰,且随着信号频率 Ω 及互关联时间 τ 的增大峰值降低,极值位置向左移动;随着乘法噪声强度 Q 的增加峰值降低,极值位置向右移动。比较 $R \sim D$ 曲线与 $R \sim Q$ 曲线,发现前者峰更尖锐。

图 1 及图 2 显示了增大输入噪声强度达到某一值时输出的信噪比最大,此时输出噪声大大降低,到达低谷,形成能量由噪声部分向信号部分转移。

2) 加法噪声强度 D 和乘法噪声强度 Q 之间的关联程度 λ 的取值对随机共振影响很不相同。图 3 是根据(12)式以 λ 为参数画出的 $R \sim Q$ 曲线及 $R \sim D$ 曲线,可以看出,两条曲线在 $\lambda \geq 0$ 时不会出现共振,

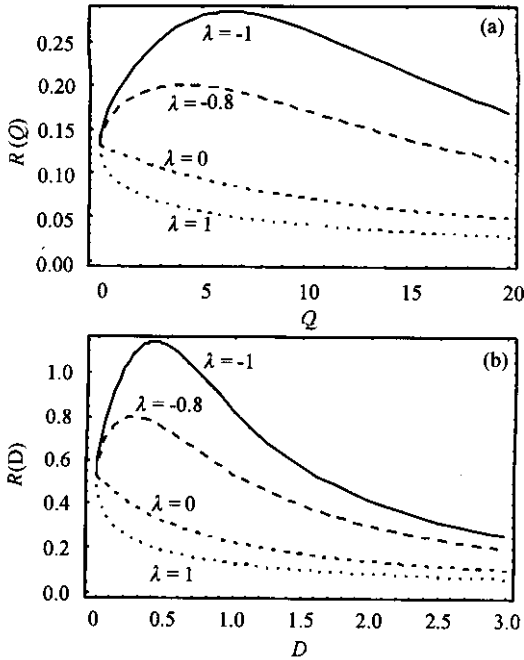


图3 噪声间互关联程度 λ 对随机共振的影响

Fig. 3 Influence on SR by correlated coefficient λ between both noises

- (a) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \Omega = 3, D = 3, \tau = 0.2$;
 (b) $\beta = 1, I_0 = 1, A = 1, \Omega = 3, Q = 3, \tau = 0.2$

只有当 $\lambda < 0$ 时才有共振出现, λ 的绝对值增大, 峰值位置向右移动, 峰值增高。比较 $R \sim D$ 曲线与 $R \sim Q$ 曲线, 可以看出前者的峰更尖锐。

下面进一步从数学上解释上述结论, 将(12)式写为以下形式

$$R = \frac{\pi A^2}{2} \frac{1}{aQ + b\sqrt{Q} + c} \quad (14)$$

(14) 式中

$$a = \frac{4I_0^2}{(1 + \beta I_0)^2},$$

$$b = \frac{8I_0^{3/2}\lambda\sqrt{D}}{(1 + \beta I_0)(\tau^2\Omega^2 + 1)}, c = 4I_0D$$

$R \sim Q$ 曲线有极大值的条件是: $a > 0, b < 0, b^2 - 4ac < 0$, 因此 λ 的取值只有在 $-1 \leq \lambda < 0$ 范围内, 才能满足以上条件。

从以上讨论可以得出结论: 由加法噪声驱动的线性系统要产生随机共振关键是噪声之间存在负关联; 只有噪声间“色”关联, 才能使信号频率进入信噪比。

参 考 文 献

- 1 Hu Gang. Stochastic resonance without external periodic force [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**(6):807~810
 - 2 V. Berdichevsky, M. Gitterman. Multiplicative stochastic resonance in linear systems: analytical solution [J]. *Europhys. Lett.*, 1996, **36**(3):161~165
 - 3 V. Berdichevsky, M. Gitterman. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise [J]. *Phys. Rev. E*, 1999, **60**(2):1494~1499
 - 4 A. V. Barzykin, K. Seki. Stochastic resonance driven by Gaussian multiplicative noise [J]. *Europhys. Lett.*, 1997, **40**(2):117~121
 - 5 S. Zhu, A. W. Yu, R. Roy. Statistical fluctuations in laser transients [J]. *Phys. Rev. A*, 1986, **34**(5):4333~4339
 - 6 L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung *et al.*. Stochastic resonance [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 1998, **70**(1):223~287
 - 7 Li Cao, Da-jin Wu. Stochastic dynamics for systems driven by correlated noises [J]. *Phys. Lett. A*, 1994, **185**(1):59~64
 - 8 Ya Jia, Jia-rong Li. Steady-state analysis of a bistable system with additive and multiplicative noises [J]. *Phys. Rev. E*, 1996, **53**(6):5786~5792
 - 9 E. Hernandez-Garcia, R. Toral, M. San Miguel. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers [J]. *Phys. Rev. A*, 1990, **42**(11):6823~6829
 - 10 Zhang Liangying, Cao Li, Wu Dajin. Stochastic resonance in the linear model of single-mode laser driven by correlated noises [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2002, **30**(8):94~95
- 张良英, 曹力, 吴大进. 关联噪声驱动下单模激光线性模型的随机共振[J]. 华中科技大学学报, 2002, **30**(8):94~95