

文章编号: 0258-7025(2004)01-0048-05

# 一种产生平顶光束的新方法:厄米-高斯光束的合成

吴 平<sup>1</sup>, 庄 建<sup>1</sup>, 吕百达<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> 西南交通大学应用物理系, 四川 成都 610031

<sup>2</sup> 四川大学激光物理与化学研究所, 四川 成都 610064; <sup>3</sup> 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 湖北 武汉 430074

**摘要** 提出了用多束厄米-高斯光束相干合成产生平顶光束的方法。借助 Wigner 分布函数和强度矩方法推导出在普遍情况下合成光束  $M^2$  因子和  $K$  参数的解析公式。研究结果表明,通过适当选取厄米-高斯光束的参数,在某传输平面可以得到平顶的光强剖面。给出了数值计算例以说明合成平顶光束的特性。

**关键词** 几何光学;平顶光束;光束合成;Wigner 分布函数;强度矩

中图分类号 O 435 文献标识码 A

## A New Method for Producing Flat-topped Beams: Hermite-Gaussian Beam Combination

WU Ping<sup>1</sup>, ZHUANG Jian<sup>1</sup>, LÜ Bai-da<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Dept. of Applied Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China

<sup>2</sup> Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China

<sup>3</sup> State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan, Hubei 430074, China

**Abstract** The coherent combination of multi-Hermite-Gaussian beams is proposed to describe the flat-topped beams. Based on the Wigner distribution function and intensity moments methods, the analytical equations of beam propagation factor ( $M^2$  factor) and kurtosis parameter ( $K$  parameter) of the resulting beam are derived in the general case. It is shown that a flat-topped intensity profile of the resulting beam can be obtained at a certain plane by an appropriate choice of the parameters of Hermite-Gaussian beams. Numerical examples are given to illustrate properties of the resulting beam.

**Key words** geometrical optics; flat-topped beam; beam combination; Wigner distribution function; intensity moment

## 1 引 言

在激光材料加工、激光核聚变等实际应用中,常要求得到光强分布均匀的平顶光束。迄今,实验上用超高斯反射镜腔、光束空间整形等方法已获得了平顶光束。理论上,用超高斯光束<sup>[1]</sup>、平顶高斯光束模型可以模拟这种光束的特征。这些模型都有各自的优缺点,近年来,研究兴趣集中在用光束合成的方法来产生和模拟平顶光束,相继提出了用偏心高斯

光束叠加<sup>[2]</sup>、多束高斯光束叠加<sup>[3]</sup>和复宗量拉盖尔-高斯光束叠加<sup>[4]</sup>等模拟平顶光束的新方法。光束合成的方法除了有可以改变光束参数和合成方式来控制合成光强分布的优点之外,还可以定标到高功率,因此受到重视。

本文以厄米-高斯光束为例,研究用多模高斯光束的相干合成来产生平顶光束的新方法。首先,使用 Wigner 分布函数推导出了合成光束通过近轴 ABCD 光学系统的变换公式。其特点是由此可以

收稿日期:2002-06-04;收到修改稿日期:2002-12-05

基金项目:西南交通大学科学研究基金和国家高技术光束控制重点实验室基金资助项目。

作者简介:吴平(1965—),女,西南交通大学应用物理系副教授,博士,现主要从事光束传输与变换研究。E-mail:ping\_w\_

x@hotmail.com

万方数据

简单地得到合成光束的光强分布。进一步,借助于强度矩方法,便能在普遍情况下解析地推导出合成光束的特征参数,包括  $M^2$  因子,  $K$  参数的公式。同时,还进行了详细的数值计算以说明合成平顶光束的特性。

## 2 厄米-高斯光束的相干合成

设有  $N$  个完全相同的  $l$  阶一维厄米-高斯光束(它们的束腰为  $\omega_0$ , 相邻光束间的距离为  $x_d$ ) 排列在  $x$  轴上,如图 1 所示。

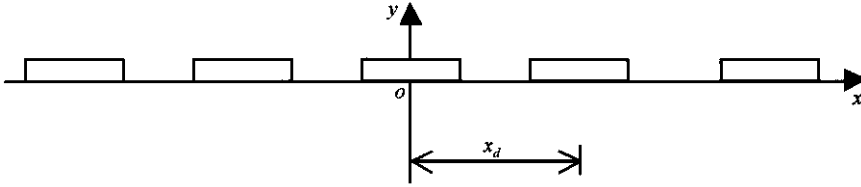


图 1 一维厄米-高斯光束的合成

Fig. 1 Combination of one-dimensional off-axis Hermite-Gaussian beams

第  $n$  束光在平面  $z = 0$  处的场分布为<sup>[5]</sup>

$$E_n(x, z = 0) = H_l \left[ \frac{\sqrt{2}(x - nx_d)}{\omega_0} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{(x - nx_d)^2}{\omega_0^2} \right] \quad (1)$$

其中,  $n \in \left[ -\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2} \right], N = 1, 2, 3, \dots$ 。

在  $z = 0$  平面相干合成光束的场分布可表示为

$$E(x, z = 0) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} H_l \left[ \frac{\sqrt{2}(x - nx_d)}{\omega_0} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{(x - nx_d)^2}{\omega_0^2} \right] \quad (2)$$

在  $z = 0$  平面合成光束的交叉谱密度函数为<sup>[6]</sup>

$$W(x_1, x_2, 0) = E(x_1, 0) \cdot E^*(x_2, 0) = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} H_l \left[ \frac{\sqrt{2}(x_1 - mx_d)}{\omega_0} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{(x_1 - mx_d)^2}{\omega_0^2} \right] \cdot \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} H_l \left[ \frac{\sqrt{2}(x_2 - nx_d)}{\omega_0} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{(x_2 - nx_d)^2}{\omega_0^2} \right] \quad (3)$$

其中,  $*$  表示取共轭。

经复杂的积分运算可得在  $z = 0$  平面合成光束的 Wigner 分布函数为<sup>[7,8]</sup>

$$h_0(x_0, u_0, 0) = \frac{k}{2\pi} \int W \left( x_0 - \frac{s}{2}, x_0 + \frac{s}{2} \right) \exp(-iks u_0) ds = \frac{k\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^l 2^l l! \mathcal{L}_l^0(2yz) \exp[-yz + iku_0(m-n)x_d] \quad (4)$$

其中,  $u_0$  为角坐标

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left[ (x_0 - mx_d) + \frac{1}{2} x_d(m-n) + \frac{i}{2} ku_0 \omega_0^2 \right]$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \left[ (x_0 - nx_d) - \frac{1}{2} x_d(m-n) - \frac{i}{2} ku_0 \omega_0^2 \right]$$

Wigner 分布函数通过 ABCD 近轴光学系统的变换遵从下列关系<sup>[8]</sup>

$$h(x, u, z) = h_0(Dx - Bu, Au - Cx) \quad (5)$$

其中,  $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$

将(4)式代入(5)式,可以得到在  $z$  平面合成光束的 Wigner 分布函数,为

$$h(x, u, z) = \frac{k\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^l 2^l \mathcal{L}_l^0 [a(u+d_1)^2 + b_1^2] \exp\left[-\frac{x_d^2(m-n)^2}{2\omega_0^2}\right] \times \exp\left[-\frac{a}{2}(u+d_2)^2 - b_2^2\right] \quad (6)$$

其中

$$a = \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$b_1 = \frac{k\omega_0}{\sqrt{g}} [2x - Ax_d(m+n)], \quad d_1 = \frac{1}{g} [2Bx_d(m+n) - (4BD + ACk^2\omega_0^4)x] \quad (7)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \left[ b_1 - \frac{i2Bx_d(m-n)}{\sqrt{g}\omega_0} \right], \quad d_2 = d_1 - \frac{ik\omega_0^2 Ax_d(m-n)}{g}$$

(7) 式中,  $g = 4B^2 + A^2k^2\omega_0^4$

### 3 合成光束的特征参数

合成光束通过 ABCD 近轴光学系统, 在任意平面  $z$  的光强分布可以由(6) 式得到

$$I(x, z) = \int h(x, u, z) du = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l 2^l l! \exp\left[-\frac{x_d^2(m-n)^2}{2\omega_0^2}\right] \cdot L_{l-p}^{-1}(b_1^2) M_p(y_0) \quad (8)$$

其中

$$y_0 = \frac{ik\omega_0 Ax_d(m-n)}{\sqrt{g}}, \quad M_j(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{j!} 2^{-j} \left[ H_j\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right) \right]^2$$

这里  $H_j(x)$  为厄米多项式。

利用强度矩方法, 可以得到光束的  $M^2$  因子<sup>[9]</sup>

$$M^2 = 2k \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle - \langle xu \rangle^2} \quad (9)$$

其中,  $\langle x^2 \rangle, \langle u^2 \rangle, \langle xu \rangle^2$  为方差矩阵元, 定义为

$$\langle x^m u^n \rangle = \int x^m u^n h(x, u, z) dx du / \int h(x, u, z) dx du \quad (10)$$

将(6)式代入(10)和(9)式, 略去繁冗的中间计算过程, 最后结果可简化为

$$M^2 = \frac{\left[ \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} S_{mm} X_{p,l-p} \cdot \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} S_{mm} U_{p,l-p} - \left( \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} S_{mm} V_{p,l-p} \right)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} S_{mm} M_p(y_0) M'_{p,l-p}(z_0)} \quad (11)$$

其中

$$z_0 = \frac{i2Bx_d(m-n)}{\sqrt{g}\omega_0}, \quad S_{mm} = \exp\left[-\frac{x_d^2(m-n)^2}{2\omega_0^2}\right]$$

$$X_{mm} = [P_n'(z_0) + 2r_1 N_n'(z_0) + r_1^2 M_n'(z_0)] M_m(y_0)$$

$$U_{mm} = [P_m(y_0) - 2\sqrt{ar_3} N_m(y_0) + ar_3^2 M_m(y_0)] M_n'(z_0) + [2r_2 r_3 a M_m(y_0) - 2\sqrt{ar_2} N_m(y_0)] N_n'(z_0) + ar_2^2 M_m(y_0) P_n'(z_0)$$

$$V_{mm} = N_m(y_0) N_n'(z_0) + r_1 N_m(y_0) M_n'(z_0) - \sqrt{ar_2} M_m(y_0) P_n'(z_0) - \sqrt{a}(r_1 r_2 + r_3) M_m(y_0) N_n'(z_0) - \sqrt{ar_1} r_2 M_m(y_0) M_n'(z_0)$$

$$N_j(x) = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{j!} 2^{-\frac{1}{2}(2j+1)} H_j\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right) \left[ H_{j+1}\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right) - 2j H_{j-1}\left(\frac{ix}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$P_j(x) = (2j+1)M_j(x) - (j+1)M_{j+1}(x) - jM_{j-1}(x)$$

$$M_j(x) = M_j(x) - M_{j-1}(x), \quad N_j'(x) = N_j(x) - N_{j-1}(x), \quad P_j'(x) = P_j(x) - P_{j-1}(x)$$

$$r_1 = \frac{k\omega_0 A x_d (m+n)}{\sqrt{g}}, \quad r_2 = -\frac{1}{2k\omega_0 \sqrt{g}}(4BD + ACK^2\omega_0^4)$$

$$r_3 = \frac{1}{2g}[4Bx_d(m+n) - A(4BD + ACK^2\omega_0^4)x_d(m+n)]$$

取  $N = 3, l = 1$ , 可将(11) 式简化为与文献[5] 中(16) 式相同的形式。

$K$  参数用以描述光强剖面的陡峭度, 定义为<sup>[10]</sup>

$$K = \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} \tag{12}$$

式中  $\langle x^4 \rangle$  为光束的四阶矩。

将(6) 和(10) 式代入(12) 式可得

$$K = \frac{\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\rho=0}^l S_{mm} F_{\rho, l-\rho} \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\rho=0}^l S_{mm} M_{\rho}(y_0) M_{l-\rho}'(z_0)}{\left[ \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\rho=0}^l S_{mm} X_{\rho, l-\rho} \right]^2} \tag{13}$$

其中

$$F_{mm} = [R_n'(z_0) + 4r_1 Q_n'(z_0) + 6r_1^2 P_n'(z_0) + 4r_1^3 N_n'(z_0) + r_1^4 M_n'(z_0)] M_m(y_0)$$

$$Q_j(x) = (2j + 1)N_j(x) - (j + 1)N_{j+1}(x) - jN_{j-1}(x)$$

$$R_j(x) = (2j + 1)P_j(x) - (j + 1)P_{j+1}(x) - jP_{j-1}(x)$$

$$Q_j'(x) = Q_j(x) - Q_{j-1}(x)$$

$$R_j'(x) = R_j(x) - R_{j-1}(x)$$

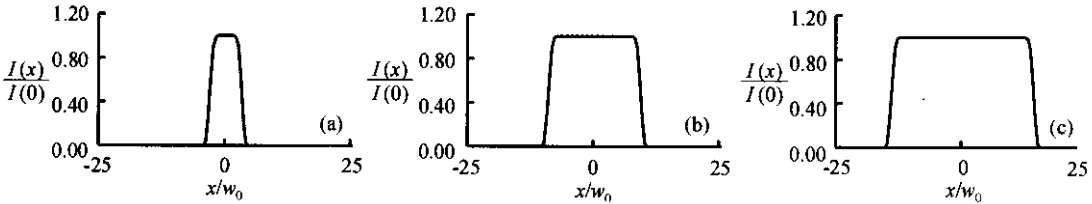


图 2  $N$  取不同值时合成光束的光强分布

Fig. 2 Intensity distributions of the resulting beam for different values of  $N$

(a)  $N = 7$ ; (b)  $N = 20$ ; (c)  $N = 30$

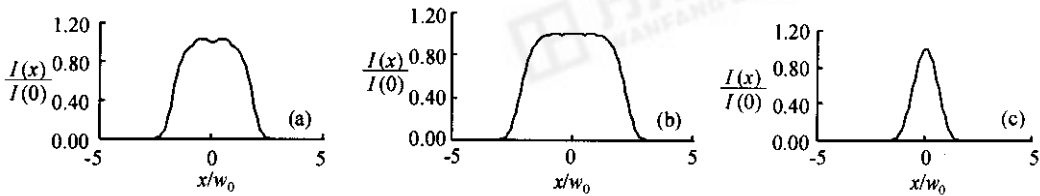


图 3  $l$  取不同值时合成光束的光强分布

Fig. 3 Intensity distributions of the resulting beam for different values of  $l$

(a)  $l = 4$ ; (b)  $l = 5$ ; (c)  $l = 7$

## 4 计算例

利用 3 节中导出的公式(8), (11) 和(13), 取  $\lambda = 0.85 \mu\text{m}, \omega_0 = 75 \mu\text{m}$ , 研究合成光束光强,  $M^2$  因子和  $K$  参数的变化规律。

取  $l$  为万数据 1.0, 改变子光束的数目  $N$ , 在  $z = 0$  平面, 合成光束的光强剖面图如图 2 所示, 可以看出选取适当的子光束参数时, 合成光束在  $z = 0$  平面可以得到平顶光强分布。从图中还可以看到, 平顶光束的平顶宽度与  $N$  有关, 在平顶条件下, 随  $N$  的增大而变宽。由(13) 式可以计算出在  $N = 7, 20, 30$  时,  $K$  参数的取值为  $K = 2.68, 1.99, 1.88$ 。  $K$  值

$= 0$  平面, 合成光束的光强剖面图如图 2 所示, 可以看出选取适当的子光束参数时, 合成光束在  $z = 0$  平面可以得到平顶光强分布。从图中还可以看到, 平顶光束的平顶宽度与  $N$  有关, 在平顶条件下, 随  $N$  的增大而变宽。由(13) 式可以计算出在  $N = 7, 20, 30$  时,  $K$  参数的取值为  $K = 2.68, 1.99, 1.88$ 。  $K$  值

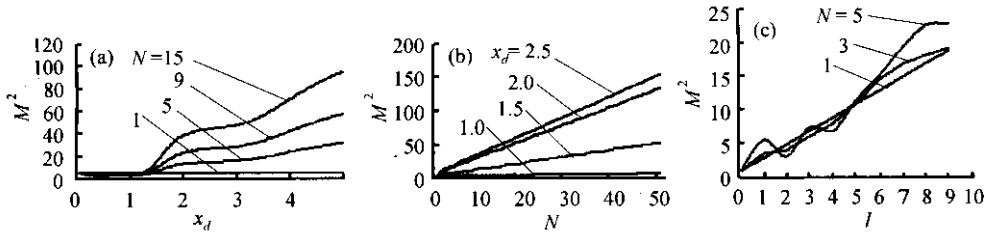


图 4 (a)  $N$  取不同值时,  $M^2$  因子随  $x_d$  的变化; (b)  $x_d$  取不同值时,  $M^2$  因子随  $N$  的变化;  
(c)  $N$  取不同值时,  $M^2$  因子随  $l$  的变化

Fig. 4 (a)  $M^2$  factor of the resulting beam as a function of normalized separation  $x_d$  for different values  $N$ ,  $l=2$ ;

(b)  $M^2$  factor of the resulting beam as a function of beam number  $N$  for different values  $x_d$ ,  $l=2$ ;

(c)  $M^2$  factor of the resulting beam as a function of beam order  $l$  for different values of  $N$ ,  $x_d=1.0$

越小, 光强剖面越平坦。

取  $N=5$ ,  $x_d=1.0$ , 改变多模高斯光束的阶数  $l$ , 在  $z=0$  平面, 合成光束的光强剖面图如图 3 所示,  $l=5$  时, 合成光束在  $z=0$  平面得到平顶光强分布。由(13)式可以计算出在  $l=4, 5, 7$  时,  $K$  参数的取值为:  $K=2.05, 1.66, 2.01$ ,  $K$  值越小, 光强剖面越平坦。

$M^2$  因子随  $x_d$ ,  $N$  和  $l$  变化规律分别如图 4(a)~(c)所示。由图可见,  $M^2$  因子的大小与  $x_d$ ,  $N$  的取值有关, 随  $x_d$ ,  $N$  的增加而增加, 而且  $M^2$  因子与多模高斯光束的阶数  $l$  也有关系, 随阶数的增加而增加, 但合成光束的  $M^2$  因子随  $l$  的变化不是单调的。

## 5 结 论

本文应用 Wigner 分布函数和强度矩相结合的方法, 研究了用多模高斯光束合成产生平顶光束的新方法。并以厄米-高斯光束为例, 对合成光束的特性作了详细的理论分析和数值计算。研究表明, 用选取适当参数的多模高斯光束来合成在某一平面或某一传输距离内产生平顶光束是可行的。合成光束的  $M^2$  因子不仅与子光束间距  $x_d$ , 子光束的数目  $N$  有关, 而且与厄米-高斯光束的阶数有关。平顶光束的陡峭度可以用  $K$  参数描述,  $K$  值越小, 则越平坦。使用 Wigner 分布函数方法的主要优点是可以较为简单地推导出传输公式, 与强度矩方法结合, 则能得出合成光束特征参数的解析公式。为说明主要物理

问题, 本文以一维厄米-高斯光束的相干合成为例进行分析研究。容易看出, 所用方法的结果可直接推广用于研究二维厄米-高斯光束和拉盖尔-高斯光束的相干合成。由于多模激光是实际工作中经常遇到的一类光束, 本文的方法和结果对高功率平顶光束的产生和应用有实际意义。

## 参 考 文 献

- 1 A. Parent, M. Morin, P. Lavigne. Propagation of super-Gaussian field distributions [J]. *Opt. & Quantum Electron.*, 1992, **24**(9):s1071~s1079
- 2 Baida Lü, Hong Ma, Bin Zhang. Propagation properties of cosh-Gaussian beams [J]. *Opt. Commun.*, 1999, **164**:165~170
- 3 A. T. Tovar. Propagation of flat-topped multi-Gaussian laser beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2001, **18**(8):1897~1904
- 4 R. Borghi. Elegant Laguerre-Gaussian beams as a new tool for describing axisymmetric flattened Gaussian beams [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2001, **18**(7):1627~1633
- 5 Baida Lü, Hong Ma. The beam quality in coherent and incoherent combinations of one-dimensional off-axis Hermite-Gaussian beams [J]. *Optik*, 2000, **111**(6):269~272
- 6 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. 7<sup>th</sup> ed., London: Cambridge University Press, 1999. 557~578
- 7 M. J. Bastiaans. The Wigner distribution function applied to optical signals and systems [J]. *Opt. Commun.*, 1978, **25**(1):26~30
- 8 M. J. Bastiaans. Application of the Wigner distribution function of partially coherent light [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986, **3**(8):1227~1238
- 9 A. E. Siegman. New developments in laser resonators [C]. *SPIE*, 1990, **1224**:2~14
- 10 R. Martinez-Herrero, G. Piquero, P. M. Mejias. On the propagation of the kurtosis parameter of general beams [J]. *Opt. Commun.*, 1995, **115**:225~232