

文章编号: 0258-7025(2003)09-0814-05

开放的 Lower-ladder 型和 V 型系统的 非线性动力学研究

樊锡君¹, 刘呈普¹, 田淑芬², 徐 慧¹, 李 健¹, 刘 杰¹

(¹ 山东师范大学¹ 物理系, ² 传播学院, 山东 济南 250014)

摘要 在开放的共振 Lower-ladder 型和 V 型系统中, 无激光解的失稳既可以通过 Pitchfork 分岔发生而导致连续无反转激光输出, 也可以通过 Hopf 分岔实现而导致自脉动无反转激光输出。分析了非饱和增益系数、腔损耗速率、粒子注入速率比和粒子退出速率等系统参量的变化对两种失稳的影响。

关键词 激光物理; 无反转激光; 开放系统; 失稳; 分岔

中图分类号 O 431.2 **文献标识码** A

Nonlinear Dynamics Study of Lasing without Inversion for Open Lower-ladder and V Systems

FAN Xi-jun¹, LIU Cheng-pu¹, TIAN Shu-fen², XU Hui¹, LI Jian¹, LIU Jie¹

(¹ Physics Department, ² Communication College, Shandong Normal University, Jinan, Shandong 250014, China)

Abstract The study result shows that in open resonant lower-ladder and V systems, the destabilization of the nonlasing solution can occur through a Pitchfork bifurcation giving rise to continuous wave lasing without inversion (LWD), and also through a Hopf bifurcation giving rise to self-pulsing LWI. This paper also analyzes the effect of the unsaturated gain parameter, damping rate of cavity, ratio of the atomic injection rates and atomic exit rate on the two instabilities.

Key words laser physics; lasing without inversion; open system; destabilization; bifurcation

1 引 言

近年来, 无粒子数反转激光 (Lasing without inversion 简称 LWI) 的研究一直引起人们的极大兴趣 (例如可参见最近的关于 LWI 的评论^[1~3])。因为这一研究不仅具有重要的理论意义, 而且有广泛的应用前景。最近, Mompert 等^[4] 研究了封闭的 Lower-ladder 型和 V 型系统共振情况下的失稳特性。他们发现: 对于 Lower-ladder 型系统, 定态无激光解只能通过 Hopf 分岔产生失稳而导致自脉动无反转激光输出; 而 V 型系统则只能通过 Pitchfork 分岔产生失稳而得到连续无反转激光输出。本文从非线性动力学的角度研究了在开放的 Lower-ladder

型^[5] 和 V 型^[6,7] 系统中共振情况下无反转激光的产生。研究表明, 对于这两种开放系统的每一个都既能通过 Hopf 分岔产生自脉动无反转激光输出, 又能通过 Pitchfork 分岔产生连续无反转激光输出。另外还通过数值计算结果分别讨论了系统非饱和增益系数、腔的损耗速率、粒子注入速率之比和粒子退出速率等系统参量的变化对两种失稳的影响。

2 运动方程

考虑开放的 Lower-ladder 型和 V 型系统 (图 1)。为了统一处理这两种系统, 与文献^[5] 和^[6~8] 相比, 此处对两种系统的标记方式进行了必要的修

收稿日期: 2002-05-10; 收到修改稿日期: 2002-07-16

基金项目: 国家自然科学基金 (批准号: 69978011) 和山东省自然科学基金 (批准号: Y2001A07) 资助项目。

作者简介: 樊锡君 (1947—), 男, 山东师范大学物理系教授。主要研究领域为非线性光学和量子光学。E-mail: fanxj108@beelink.com

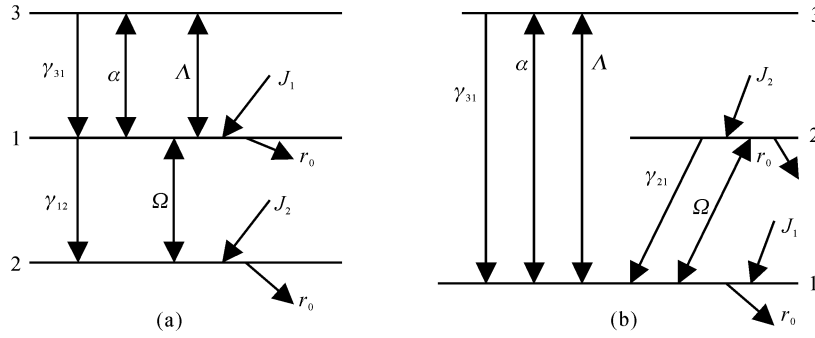


图 1 开放的共振三能级系统

(a) Lower-ladder 型; (b) V 型

Fig. 1 Open LWI schemes

(a) lower-ladder scheme; (b) V scheme

改。激活介质的三个能级分别标记为 1, 2 和 3。Rabi 频率为 Ω 的驱动场与能级 1 和 2 间的跃迁共振。非相干抽运场的抽运速率为 Λ 。较弱的相干探测激光场 (Rabi 频率为 α) 耦合能级 1 和 3。介质放置在激光腔中, 腔场与激光跃迁 $1 \leftrightarrow 3$ 共振。能级 2 和 3 间的跃迁是禁戒的。共振条件允许取 α 和 Ω 为实数, 且相互作用表象中密度矩阵元可采用以下形式

$$\rho_{21} = -ix_{21}, \quad \rho_{31} = -ix_{31}, \quad \rho_{32} = x_{32} \quad (1)$$

其中 x_{21}, x_{31} 和 x_{32} 是实的依赖于时间的变量。在标记中, 如果 $x_{31} > 0$, 系统探测场获得增益; 如果 $x_{31} < 0$, 探测场将被减弱。在旋波、慢变振幅以及平均场近似下, 开放的共振 Lower-ladder 型和 V 型系统的密度矩阵运动方程组可统一写为如下形式

$$\begin{aligned} d\rho_{11}/dt &= R_1 + 2\Omega x_{21} + 2\alpha x_{31} - r_0\rho_{11} + J_1 \\ d\rho_{22}/dt &= R_2 - 2\Omega x_{21} - r_0\rho_{22} + J_2 \\ dx_{21}/dt &= -\gamma_a x_{21} - \Omega(\rho_{11} - \rho_{22}) + \alpha x_{32} \\ dx_{31}/dt &= -\gamma_a x_{31} + \alpha(1 - 2\rho_{11} - \rho_{22}) + \Omega x_{32} \\ dx_{32}/dt &= -\gamma_b x_{32} - \alpha x_{21} - \Omega x_{31} \\ da/dt &= -ka + gx_{31} \end{aligned} \quad (2)$$

方程组(2)中使用了条件 $\rho_{33} = 1 - \rho_{11} - \rho_{22}$ 。其中, k 表示腔的损耗系数, g 表示激光场的非饱和增益系数, $J_1 (J_2)$ 表示能级 1(2) 上的粒子注入速率, r_0 表示粒子与场相互作用后从腔中退出的速率。在下面的讨论中, 总使 $J_1 + J_2 = r_0$, 以保证系统中的粒子总数不变。在辐射极限条件下, 相干衰变速率 γ_a, γ_b 和 γ_d 分别为

$$\begin{aligned} \gamma_a &= (\omega_{31} + \omega_{13} + \omega_{21})/2 \\ \gamma_b &= (\omega_{13} + \omega_{12})/2 \\ \gamma_d &= (\omega_{31} + \omega_{12} + \omega_{21})/2 \end{aligned} \quad (3)$$

R_1 和 R_2 的表达式为

$$R_1 = P\rho_{11} + Q\rho_{22} + \omega_{13}, \quad R_2 = \omega_{21}\rho_{11} - \omega_{12}\rho_{22} \quad (4)$$

其中

$$P = -(\omega_{21} + \omega_{31} + \omega_{13}), \quad Q = \omega_{12} - \omega_{13} \quad (5)$$

表达式(3), (4) 和(5)中的 $\omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{13}$ 和 ω_{31} 的确定取决于特定系统的选择。对于 Lower-ladder 型系统(图 1(a))

$$\omega_{12} = 0, \quad \omega_{21} = \gamma_{12}, \quad \omega_{13} = \gamma_{31} + \Lambda, \quad \omega_{31} = \Lambda \quad (6)$$

对于 V 型系统(图 1(b))

$$\omega_{12} = \gamma_{21}, \quad \omega_{21} = 0, \quad \omega_{13} = \gamma_{31} + \Lambda, \quad \omega_{31} = \Lambda \quad (7)$$

其中 γ_{ij} 表示能级 i 到能级 j 的自发衰变速率。

3 定态无激光解及其失稳

取方程组(2)中的 $\alpha = 0$ 及所有时间微分项等于零, 便可得到定态无激光解如下

$$\begin{aligned} x_{31} &= x_{32} = 0 \\ x_{21} &= x_{21}^0 = \Omega(\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0)/\gamma_d \\ \rho_{11}^0 &= \{2\Omega^2(\omega_{13} + r_0) + \gamma_d[QJ_2 + (r_0 + \omega_{12})(J_1 + \omega_{13})]\}/D \\ \rho_{22}^0 &= \{2\Omega^2(\omega_{13} + r_0) + \gamma_d[J_2(r_0 - P) + \omega_{21}(J_1 + \omega_{13})]\}/D \\ \rho_{33}^0 &= 1 - \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$D = -2\Omega^2(P + Q + \omega_{21} - \omega_{12} - 2r_0) + \gamma_d(r_0^2 + r_0\omega_{12} - r_0P - \omega_{12}P - Q\omega_{21}) \quad (9)$$

定义粒子数差为

$$n_{ij} = \rho_{ii}^0 - \rho_{jj}^0 \quad (10)$$

无粒子数反转条件意味着 $n_{13} > 0$ 。

从非线性动力学的观点来看, 激光解总是对应着定态无激光解的稳定性的丧失。把解(8)代入方

程组(2)后线性化,将 Jacobian 矩阵分成两个独立的子矩阵,其中一个决定变量 α, x_{31} 和 x_{32} 的稳定性,从而也就决定了激光场的产生。此子矩阵的特征多项式为

$$\lambda^3 + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \quad (11)$$

其中的系数分别为

$$\begin{aligned} A_2 &= k + \gamma_a + \gamma_b \\ A_1 &= k(\gamma_a + \gamma_b) + \gamma_a\gamma_b + \Omega^2 + gn_{13} \\ A_0 &= k(\Omega^2 + \gamma_a\gamma_b) + g\left(\frac{\Omega^2}{\gamma_a}n_{21} + \gamma_b n_{13}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

应用 Hurwitz 判据来断定与上面的多项式相关的稳定性:如果 $A_2, A_1, A_0 > 0$,同时 $H_2 = A_2A_1 - A_0 > 0$,则(11)式的所有本征值的实部全是负的,这就意味着定态无激光解是稳定的。从(12)式知道无反转情况($n_{13} > 0$)下 A_2 和 A_1 总是正的。因此,无激光解只能在 $A_0 < 0$ 时通过 Pitchfork 分岔产生失稳(静态失稳);或者是在 $H_2 < 0$ 时通过 Hopf 分岔产

生失稳(脉动失稳)。在第二种情况下,由 $\sqrt{A_1}$ 给出在失稳点处的脉动角频率。这里的 H_2 由下式给出

$$H_2 = (\gamma_a + \gamma_b)[k(k + \gamma_a + \gamma_b) + \gamma_a\gamma_b + \Omega^2] + g[(k + \gamma_a)n_{13} - \Omega x_{21}] \quad (13)$$

3.1 开放的 Lower-ladder 型系统

Mompart 等^[4]指出:对于一个封闭的 Lower-ladder 型系统,无激光解的失稳只能通过 Hopf 分岔产生,并获得脉动的无反转激光输出。但在相应的开放 Lower-ladder 型系统(具有式(6)所表示的 $\omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{13}$ 和 ω_{31})中,只要适当选择系统参量的取值, Hopf 分岔和 Pitchfork 分岔都是可能存在的。

3.1.1 Hopf 分岔

从式(13)可以看出,在保证 $n_{13} > 0$ (粒子数无反转)的情况下,要满足 Hopf 分岔的条件 ($H_2 < 0$), $x_{21} > 0$ 是必要的,这意味着能级 1 和 2 之间也必须是无反转的(参见(8)式)。可以通过选择适当的参数以满足 $H_2 < 0$ 。对 $\Omega = 0$ 以及很大的 Ω^2 的

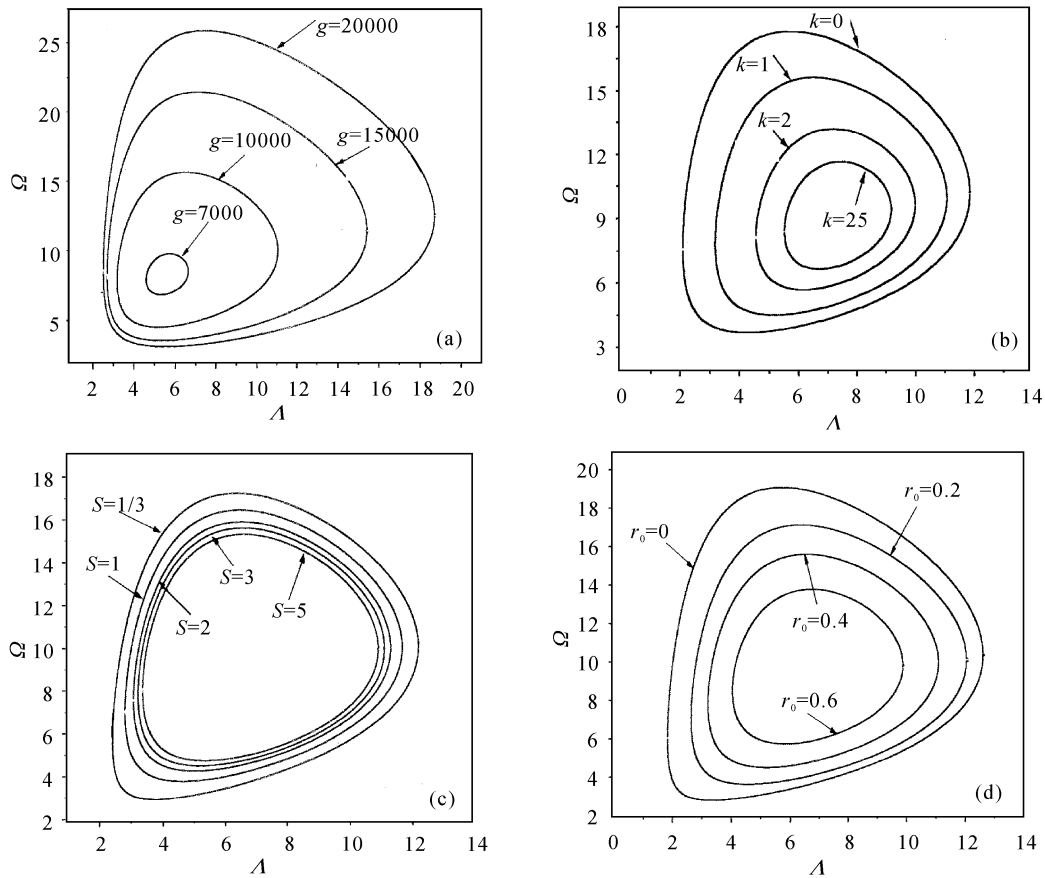


图 2 Ω - Λ 平面上可获得无反转激光的区域。共同参数 $\gamma_{31} = 3.5, \gamma_{12} = 19$

Fig. 2 Regions getting LWI in the Ω - Λ plane

(a) $k = 1.0, r_0 = 0.4, S = 3$; (b) $g = 10000, r_0 = 0.4, S = 3$; (c) $g = 10000, k = 1.0, r_0 = 0.4$;
(d) $g = 10000, k = 1.0, S = 3$. In the all cases $\gamma_{31} = 3.5, \gamma_{12} = 19$

值, H_2 是正的从而无激光解是稳定的。所以要想使 $H_2 < 0$, 驱动场强度的取值范围有一个限制。当 $H_2 = 0$ 时, 图 2(a)~(d) 分别给出了改变非饱和和增益系数 g , 腔损耗速率 k , 粒子注入速率比 $S(= J_1/J_2)$ 和粒子退出速率 r_0 的值而得到的 Ω - Δ 关系曲线。其中 g 的单位是 MHz^2 , 其他参数的单位都是 MHz 。

对于任何确定的参数(比如图 2(a)中的 g), Ω 和 Δ 的值若处于 Ω - Δ 平面上封闭曲线之外, 则使 $H_2 > 0$, 从而无激光解是稳定的, 不可能获得无反转激光; 若处于封闭曲线之内, 则使 $H_2 < 0$, 从而无激光解是不稳定的, 可获得无反转激光。由图 2 可以看出, 较大的非饱和和增益系数 g 和较小的腔损耗速率 k , 粒子注入速率比 S , 退出速率 r_0 对获得无反转激光是有利的; 封闭系统($r_0 = 0$) 要比对应的开放系统($r_0 > 0$) 有更大的无反转激光产生区域。

3.1.2 Pitchfork 分岔

类似于在 3.1.1 一节对 Hopf 分岔的讨论, 根据数值计算结果来分析非饱和和增益系数 g , 腔损耗

速率 k , 粒子注入速率比 S 以及粒子退出速率 r_0 对无激光解失稳的影响。当 $A_0 = 0$ 时, 图 3(a)~(d) 分别给出了改变增益系数 g , 腔损耗速率 k , 粒子注入速率比 $S(= J_1/J_2)$ 以及粒子退出速率 r_0 的值而得到的 Ω - Δ 关系曲线。其中 g 的单位是 MHz^2 , 其他参数的单位都是 MHz 。

对于任何确定的参数(比如图 3(a)中的 g), Ω 和 Δ 的值若处于 Ω - Δ 平面上封闭曲线之外, 则使 $A_0 > 0$, 从而无激光解是稳定的, 不可能获得无反转激光; 若处于封闭曲线之内, 则使 $A_0 < 0$, 从而无激光解是不稳定的, 可获得无反转激光。比较图 3 和图 2 发现: 1) 系统参数 $g(k)$ 对在 Ω - Δ 平面上获取无反转激光的区域的影响是类似的, 即 $g(k)$ 的取值越大, 区域面积越大(小)。2) 与 Hopf 分岔相反, 在 Pitchfork 分岔中无反转激光的区域随着 $S(r_0)$ 的减小而减小。这一点从物理的观点来看是很容易理解的。考虑极限情况, 当 $S = r_0 = 0$ 时, 开放系统就转变为封闭系统, 此时应该不可能出现 Pitchfork 分岔

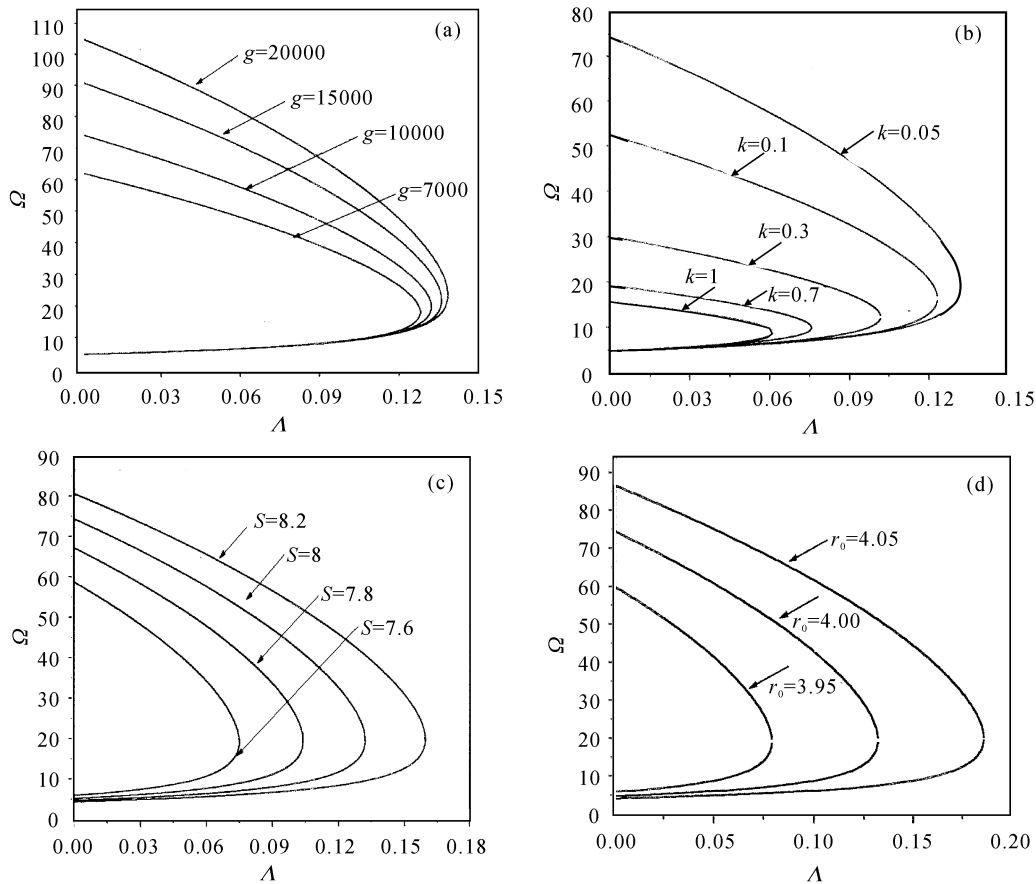


图 3 Ω - Δ 平面上可获得无反转激光的区域。共同参数 $\gamma_{31} = 2.0, \gamma_{12} = 1.0$

Fig. 3 Regions getting LWI in the Ω - Δ plane

(a) $k = 0.05, r_0 = 4.0, S = 8$; (b) $g = 10000, r_0 = 4.0, S = 8$; (c) $g = 10000, k = 0.05, r_0 = 4.0$;
(d) $S = 8, g = 10000, k = 0.05$. In the all cases $\gamma_{31} = 2.0, \gamma_{12} = 1.0$

的。3) 在 Pitchfork 分岔中, 获取无反转激光的 Ω 的取值量级要比 Λ 的取值量级大得多; 而在 Hopf 分岔中, 二者有相同的数量级。

3.2 开放的 V 型系统

Mompart 等^[4]指出: 对于一个封闭的 V 型系统, 无激光解的失稳只能通过 Pitchfork 分岔产生, 并获得连续的无反转激光输出。而在相应的开放 V 型系统(具有式(7)所表示的 w_{12}, w_{21}, w_{13} 和 w_{31}) 中, 只要选择合适的参数, Hopf 分岔和 Pitchfork 分岔都是可以实现的。产生 Pitchfork 分岔 ($A_0 < 0$) 的必要条件是 $n_{21} < 0$ (参见式(12)), 这意味着能级 1 和 2 之间是无反转的。而产生 Hopf 分岔 ($H_2 < 0$) 的必要条件是 $x_{21} > 0$ (参见式(13)), 这意味着能级 1 和 2 之间是反转的, 正如刚才所说的, 这个条件在开放的 V 型系统中是可以实现的, 而在相应的封闭的 V 型系统是无法满足的。很明显, 对能级 1 和 2 之间粒子数反转或无反转的要求恰恰跟开放的 Lower-ladder 型系统相反。根据数值计算结果表明: 1) 类似于开放的 Lower-ladder 型系统, 在开放的 V 型系统中, 无激光解的失稳可以通过 Hopf 分岔和 Pitchfork 分岔实现并产生无反转激光, 但两种失稳是互相排斥的。2) 系统参量 g, k, S 和 r_0 对 Ω 和 Λ 的使无激光解失稳并进而产生无反转激光输出的取值范围的影响, 在开放的 V 型系统的 Hopf (Pitchfork) 分岔中的情况与在开放的 Lower-ladder 系统的 Pitchfork (Hopf) 分岔中的情况类似。如果考虑到两种系统在 Hopf (Pitchfork) 分岔中对能级 1 和 2 之间粒子数反转或无反转的要求, 这个特征是容易理解的。

4 结 论

本文以非线性动力学的观点对开放的共振 Lower-ladder 型和 V 型系统中无反转激光的产生作了较为详细的考察。研究结果表明: 每种系统的无激光解的失稳不仅能够通过 Pitchfork 分岔产生并导致连续的无反转激光输出, 也能够通过 Hopf 分岔产生并导致脉动的无反转激光输出。这一点与

由相应的封闭共振系统所得到的结论大不相同。两种失稳是相互排斥的, 因为它们对被驱动场耦合的两能级间的粒子数反转或无反转的要求恰恰相反。在开放的 Lower-ladder 型系统中能够出现 Pitchfork 分岔但在相应的封闭系统中则不能, 开放的 V 型系统能够出现 Hopf 分岔但在相应的封闭系统中则不能, 其根本原因就在于: 在开放系统中可以通过调整粒子注入速率比 S 和退出速率 r_0 来改变被驱动场耦合的能级间粒子数差的性质(即反转或无反转)。数值计算结果表明, 较大的非饱和增益系数和较小的腔损耗速率对获得无激光解的失稳进而产生无反转激光是有利的, 而粒子注入速率比和退出速率数值大小对无激光解的失稳及无反转激光的产生的影响则与系统类型和分岔类型密切相关。

参 考 文 献

- 1 O. Kocharovskaya. Lasing without inversion: problems and prospects [J]. *Hyperfine Interactions*, 1997, **107**(1~4):187~195
- 2 M. O. Scully, M. S. Zubairy. *Quantum Optics* [M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1997
- 3 J. Mompart, R. Corbalan. Lasing without inversion [J]. *J. Optics B: Quantum and Semiclas. Opt.*, 2000, **2**(3):R4~R27
- 4 J. Mompart, C. Peters, R. Corbalan. Lasing without inversion in three-level systems: Self-pulsing in the cascade schemes [J]. *Phys. Rev. A*, 1998, **57**(3):2163~2168
- 5 Liu Chengpu, Zhang Junliang, Li Ping *et al.*. Nonlinear gain and dispersion in an open off-resonance ladder-type inversionless lasing system [J]. *Acta Photonica Sinica* (光子学报), 2001, **30**(8):942~948 (in Chinese)
- 6 Fan Xijun, Tian Shufen. Nonlinear theory of lasing without inversion in an open V type three level system, 1998, OSA Annual Meeting/ILS-XIV, TuQ19, (Baltimore, USA)
- 7 Fan Xijun, Li Ping, Tian Shufen *et al.*. A nonlinear analytical and numerical study for an open system with coherent off-resonance fields [J]. *Chin. Phys.*, 2001, **10**(7):613~620
- 8 S. F. Yelin, M. D. Lukin, M. O. Scully *et al.*. Gain without inversion in the frequency up-conversion regime [J]. *Phys. Rev. A*, 1998, **57**(5):3858~3868