

文章编号: 0258-7025(2003)08-0721-05

# 轴对称流场的计算流动显示算法

吴颖川<sup>1</sup>, 乐嘉陵<sup>1</sup>, 贺安之<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> 中国空气动力研究与发展中心, 四川 绵阳 621000; <sup>2</sup> 南京理工大学应用物理系, 江苏 南京 210094)

**摘要** 讨论了全息干涉、纹影、阴影的计算光学原理, 对数值计算的结果进行图形处理以模拟光学仪器的工作过程。针对轴对称流场的特殊性, 对三维的光程积分计算进行简化, 采用环带法用二维的计算网格计算出三维的沿光线的积分结果, 发展了一套轴对称流场的计算流动显示的快速算法。通过计算流场图像与试验流场图像的直接比较, 可以验证数值计算的有效性。示例给出了弹道靶中高超声速钝锥流动的应用。

**关键词** 信息处理; 计算流动显示; 图形处理; 轴对称

**中图分类号** TP 391 **文献标识码** A

## Computational Flow Imaging of Axis-symmetric Flow

WU Ying-chuan<sup>1</sup>, LE Jia-ling<sup>1</sup>, HE An-zhi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>China Aerodynamics Research Development Center, Mianyan, Sichuan 621000, China  
<sup>2</sup>Applied Physics Department of Nanjing University of Science & Technology,  
Nianjing, Jiangsu 210094, China

**Abstract** The optical modeling of computational shadowgraph, schlieren and interferometry is discussed. The results of CFD (computational fluid dynamics) and transmission of optical waves through theoretical flowfield are used to generate digital pictures that simulate real observations. Concerning the specialty of the axis-symmetric flow, the integral calculation in the equations of the optical model is simplified. A ring-belt method is developed to obtain three-dimensional integral results from two-dimensional CFD results to process graphic rendering of computational flow imaging for axis-symmetric flow. This technology provides a better insight into the flow physics and is extremely useful to experimentally validate CFD codes. An example for hypersonic blunted cone flow in ballistic range is illustrated.

**Key words** information processing; computational flow imaging; graphic rendering; axis-symmetric

## 1 引 言

计算流动显示(CFI)是流动显示的一个新分支,它完全在计算机上实现。CFI技术能够把数值计算(CFD)获得的流场中的温度、密度、压力等各种物理场,经过与实验相同的计算光学(全息干涉、纹影、阴影、平面激光诱导荧光)的过程转换为所需的各个方向流动显示图像。与通常的实验流场显示相对应,目前最实用的CFI技术是计算纹影、计算阴影、计算干涉和计算平面激光诱导荧光技术。CFI

最大的特点是它的流场图像能够与试验的流场图像进行直接比较,从而验证CFD的有效性,使CFD与气动试验有机地结合,并能对复杂流动现象做出更加深入的物理分析。

对于二维非化学反应气体的流动,可以直接比较CFD的密度场的等值线和干涉图。对于轴对称和三维流场,由于干涉图是沿光线的积分结果,CFD和干涉图的直接比较是不可能的。通过CFI的方法,可以将CFD的计算结果转化为数值干涉图像,从而能够与试验干涉图进行直接的对比。

收稿日期:2002-04-11; 收到修改稿日期:2002-06-28

基金项目:国防自然科学基金(编号:19889209)资助项目。

作者简介:吴颖川(1967—),男,四川广汉市人,中国空气动力研究与发展中心副研究员,南京理工大学在读博士,光学工程专业。E-mail:wyc2000@sina.com, mywyc@163.com

国外于 20 世纪 70 年代中就开展 CFI 的研究, 由于当时计算机技术受到限制, 没有能够得到高分辨率的数字图像, CFI 仅仅是沿着干涉条纹中心画的线段或流场的等值线, 没有得到广泛的应用, 直到 20 世纪 90 年代初, Tamura 等<sup>[1]</sup>和 Yates<sup>[2]</sup>将高分辨率数字图像处理技术引入 CFI, 得到了可以与试验照片进行直接比较的数字图像, CFI 才开始进入实际应用。国外对 CFI 的研究已发表了一些文章<sup>[1~7]</sup>, 但是许多研究仅仅涉及到二维问题。Rock<sup>[5]</sup>的研究涉及到几个组元, 没有考虑电离时自由电子的影响。尽管 Tamura 等<sup>[1]</sup>, Yates<sup>[2]</sup>和 Lanen 等<sup>[6]</sup>的方法是三维的, 但是在进行沿光线积分时, 由于没有考虑 CFD 为多块交叉或重叠网格的情况, 他们的方法有可能会产生积分错误。国外发表的多数是二维情况, 三维较少; 简单的介质(比热比为常数)较多, 复杂介质(燃烧与化学反应情况, 介质组元是变化的)较少。

CFI 技术涉及到计算流体力学、并行计算、计算光学、高精度数字图像处理技术及实验流体力学、激光全息光学实验、光学层析技术等多个研究领域技术的综合, 需要各方面的合作。

我们提出了一套包括计算干涉、计算阴影、计算(彩色)纹影和计算平面激光诱导荧光技术的完整的理论体系, 提供了可用于复杂三维流场, 能够模拟高温燃烧化学反应、等离子体流动的计算光学流动显示软件系统, 并且已经大量用于爆炸波、弹道靶高速流动、高温气体非平衡流动等研究项目中的 CFD 和风洞试验的相互验证。

CFI 分为三个部分: 首先是对复杂流场进行 CFD 模拟, 获得有关物理量; 其次是建立仿真流场光学测量系统的物理模型, 得到光场的强度计算公式; 最后也是最主要的是在计算机中实现光场强度计算的图形处理方法, 以及把光强度映射为显示器像素亮度的高分辨率图像生成技术。对于三维流场需要用直接体视化方法来从三维体数据生成二维图像。本文重点讨论轴对称情况下光场强度计算的图形处理方法。

## 2 计算流动显示的计算光学模型

阴影法记录的是偏折位置差, 反映的是折射率梯度的变化(即折射率  $n$  的二阶导数); 纹影法记录的是偏折角度差, 反映的是折射率的梯度(即折射率  $n$  的一阶导数); 干涉法记录的是光波相位差, 反映

的是折射率本身。下面以 Mach-Zehnder 干涉和全息干涉法为例说明如何在计算机上对物理光学模型进行计算。

在干涉仪中照相板上形成的干涉条纹是由于两束光波产生干涉后光强度的变化造成的。首先计算出干涉图上每个点的光强度, 然后点的物理坐标映射为显示器的像素坐标, 点的光强度按比例转换为像素亮度, 就可以在显示器上得到计算干涉图像。把干涉图上的一个点的光强度转化为显示器上一个像素的亮度值的过程并不复杂, 关键是如何得到干涉图上某点的光强度值。

对于两束光强分别为  $I_1$  和  $I_2$  的光波, 当它们产生干涉时, 干涉条纹的光强度用  $I$  表示为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \delta \quad (1)$$

其中  $\Delta \delta$  为两束光的相位差。

对于 Mach-Zehnder 和全息干涉,  $I_1 = I_2$ , 公式(1)变成

$$I = 2I_1(1 + \cos \Delta \delta) = 4I_1 \cos^2(\Delta \delta / 2) = 4I_1 \cos^2(\pi F) \quad (2)$$

所以 Mach-Zehnder 和全息干涉图上的光强度  $I$  与条纹位移  $F$  的关系为

$$I \sim \cos^2(\pi F) \quad (3)$$

要得到光强度值, 必须先得到条纹位移。在干涉图中亮条纹满足以下方程<sup>[8]</sup>

$$2\epsilon x + \int_{s_i} [n(x, y, z) - n_0] dz = i\lambda \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

其中  $[n(x, y, z) - n_0]$  为相对于参考场  $n_0$  的密度,  $s_i$  为光路,  $\epsilon$  为 Mach-Zehnder 干涉仪两块分光板的的角度差,  $i$  为条纹级数,  $\lambda$  为光波长。

如果  $\epsilon = 0$ , 干涉图是无限条纹模式; 如果  $\epsilon > 0$  或  $\epsilon < 0$ , 干涉图是有限条纹模式。

用连续的条纹位移  $F$  代替  $i$  作为  $n(x, y, z)$  的函数, 就得到计算条纹位移公式

$$F(x, y) = \frac{2\epsilon x}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{z_1}^{z_2} [n(x, y, z) - n_0] dz \quad (5)$$

其中光线路径沿  $z$  方向, 从  $z_1$  到  $z_2$ 。

由公式(5)可知, 需要对折射率进行积分计算出条纹位移。CFD 不能直接计算出折射率, 它可以计算出气体的密度、温度、组元的密度和浓度等物理量。气体的折射率  $n$  和密度  $\rho$  之间关系可用 Gladstone-Dale(G-D)公式表示, 非化学反应空气的 G-D 公式为

$$n - 1 = K\rho \quad (6)$$

其中  $K$  为空气的 G-D 常数,  $\rho$  为空气的密度。

几种组元的混合气体的 G-D 常数是各组元的 Gladstone-Dale 常数的线性组合

$$K = \sum_i K_i \frac{\rho_i}{\rho} = \sum_i K_i a_i \quad (7)$$

其中  $K_i$  为第  $i$  个组元的 G-D 常数,  $a_i$  为第  $i$  个组元的质量分数。

这个线性组合的 G-D 常数的定义,不仅可以用于空气和其他中性气体混合物,而且可以用于高温气体动力学中化学上各向同性的气体。其中分子或者有不同的激发态,或者是离解的,甚至可以是电离的。

气体在很高的温度时可能电离成为等离子体,自由电子对质量密度的贡献虽然微不足道,但在电离气体混合物中电子的折射率差度  $(n-1)$  比每个原子的折射率差度至少大一个数量级,并且为负值。等离子体的 G-D 公式为

$$n-1 = K\rho + N_e K_e \quad (8)$$

其中  $\rho$  为混合密度,  $K$  为各组元的组合 G-D 常数,  $N_e$  为电子数密度,  $K_e$  为电子气体的 G-D 常数。

由关于 G-D 公式的讨论可知,对于空气,由折射率分布可以直接得到密度分布。但是对于混合气体、化学反应气体或等离子体,由折射率只能得到总密度。而且公式(5)需要积分计算。这些对于试验图片的处理都是至关重要的。以干涉图为例,二维和轴对称的干涉照片经过处理可以得到流场的折射率分布(关于干涉图的处理技术超出了本文的范围,不在此作详细讨论),但是对于三维流场,由一个方向的干涉图不能得到流场的折射率分布,必须由多个方向的干涉图经过处理后用一种光学层析<sup>[9]</sup>(Optical Computerized Tomograph)技术才能得到。但是在实际风洞流场中要得到完备的多方向的干涉图是很困难的,因为干涉仪的拍摄角度有限制,而且试验模型本身遮挡了部分图像。所以不完全数据情况下的光学层析技术仍然是个难题。对于混合气体、化学反应气体或等离子体,往往最关心组份的密度分布,从试验照片不能得到,而从 CFD 可以得到,但是 CFD 的最大问题是其有效性需要进行验证。以前验证数值计算的方法一般是用单点的测量信息(如压力、温度等),这种方法不能对全场进行验证。流动显示的图像如阴影、纹影和干涉图片可以提供全面的流场信息,但是对于上述三维情况和混合气体、化学反应气体或等离子体的情况,试验照片与 CFD 的计算结果进行直接比较是不可能的。只有通过计算流动显示技术,在 CFD 的计算结果基础

上,仿真试验流动显示的光学原理,生成与试验照片进行直接比较的计算流动图像,才能全面验证 CFD 的计算结果。

综上所述,计算流动显示的光学模型中公式(5)需要进行积分计算,同时要考虑混合气体、化学反应气体或等离子体的情况下 G-D 常数的变化。因为 CFD 的计算结果是离散的,在求积分时一般根据梯形法则用离散点的积分和得到。在三维离散流场中求沿光线的积分比较复杂,下面只讨论轴对称流场的情况。

### 3 轴对称流场干涉条纹位移量的积分计算方法

对于轴对称流场,折射率分布是半径的函数,设折射率以  $x$  轴为对称轴呈轴对称分布。对于  $x$  为常数的某一截面内的折射率分布,如图 1 所示,这时折射率仅是  $r$  的函数。设光线与  $z$  轴距离为  $y$  并平行于  $z$  轴,  $R$  为不均匀区半径,  $r$  为光线坐标。探测光线沿  $z$  方向传播时,因为

$$z = \sqrt{r^2 - y^2} \quad (9)$$

对式(9)微分得

$$dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (10)$$

并考虑到积分是在定常的  $y$  值下进行的,积分限是  $y$  的函数,即

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (11)$$

利用式(11)进行积分限的变换,  $z_1 = 0, r_1 = y, z_2 = z_0, r = r_0$ 。则在柱坐标中,公式(5)变为

$$F(y) = \frac{2\epsilon x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \int_y^{r_0} \frac{[n(r) - n_0]rdr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (12)$$

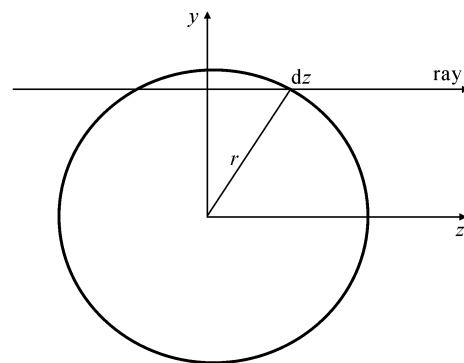


图 1 光线通过轴对称流场

Fig. 1 Schematic view of ray tracing through axis-symmetric flow field

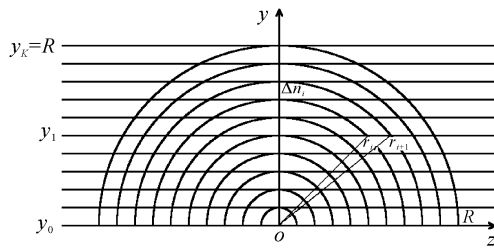


图 2 轴对称流场环带法示意图

Fig. 2 Schematic view of ring-belt method of the axis-symmetric flow field

下面采用环带法对公式(12)进行离散处理。

首先应设想将被测轴对称流场分割成  $k$  个  $\Delta r_i$  ( $\sum_{i=1}^k \Delta r_i = R$ ) 的若干个同心环状区域,通过被测流场的光束也分割成  $k$  个条形区域,如图 2 所示。然后对环状区域元内的折射率变化( $\Delta n_i(r)$ ),折射率梯度变化( $\text{grad}[\Delta n_i(r)]$ )和折射率二阶导数变化( $\text{grad}\{\text{grad}[\Delta n_i(r)]\}$ )进行某种近似。例如,可以假设每个环状元内的变化量为常数。公式(12)可以用下列求和形式来替代。通过轴对称流场的第  $l$  条光线(相应坐标为  $y_l = r_l$ )的条纹位移量  $F_l$  为

$$F_l = \frac{2}{\lambda} \sum_{i=l}^{k-1} \Delta n_i(r) \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 - r_i^2)}} \quad (13)$$

(13)式中的积分值为

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 - r_i^2)}} = \sqrt{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \sqrt{r_i^2 - r_i^2} \quad (14)$$

代入 G-D 公式,得到

$$F_l = \frac{2K\rho_0}{\lambda} \sum_{i=l}^{k-1} (\sqrt{r_{i+1}^2 - r_i^2} - \sqrt{r_i^2 - r_i^2}) \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 \right) \quad (15)$$

从公式(15)可以看出,对于流场中的某一个网格点应用环带法时,  $r_l$  就是该点的  $y$  坐标值,  $r_i$  是从该点出发,沿着  $y$  方向的采样点。通过这些公式,  $z$  方向的光程积分计算可以转换到  $y$  方向来进行。对于  $x$  为常数的某个截面,只需要  $y$  坐标的值。对于全流场,只需要  $x, y$  平面的密度场数据就可以计算出所有的沿光线的积分结果。对于正交的计算网格,网格方向与坐标方向一致,公式(15)的积分和可以直接由网格点得到;对于非正交的计算网格,必须在  $y$  方向进行重新采样,采样点可以通过求  $y$  轴与计算网格的交点来得到,相对于复杂的三维空间插值计算,二维插值要容易得多,而且大大加快了处理速度。

## 4 误差分析

主要有两个方面的误差。首先是通过流场的光线并不是沿着直线,会有一些的偏折量,在密度变化剧烈的地方(如激波),偏折角比较大,不过在实际超声速和高超声速风洞试验中,风洞尺寸和模型的尺寸(一般几十个毫米)都比较小,而且激波很薄,只有几个分子自由程,所以实际偏折量很小。Yates<sup>[2]</sup>给出了一个误差分析,认为误差在 1/10 个条纹位移。其次用离散的方法求积分肯定会有误差,求积分和的离散点是通过光线与原 CFD 的网格点的交点得到的,也就是说积分计算精度与 CFD 的计算精度相当,所以即使在环带法中假设每个环状元内的密度变化量为常数,得到的积分结果也能够准确地反映数值计算的结果。

## 5 举例

下面这个例子用来说明计算干涉图的应用,目的是验证数值计算方法的有效性,同时可以辅助试验干涉图的处理。背景项目是对弹道靶中钝锥的高超声速气动特性的研究,钝锥底部半径为 12 cm,高 72 cm,锥形的半锥角为  $8^\circ$ ,钝度比 0.125,底部直径 24 mm。试验的雷诺数接近  $10^5$ ,速度为 10 马赫,壁面温度 294 K。试验干涉图由全息干涉系统得到。数值模拟采用全 Navier-Stokes 方程,在曲线坐标系下,带化学非平衡反应的非定常无量纲化全 Navier-Stokes 方程可以写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \zeta} \right) + S \quad (16)$$

对于上面的控制方程,采用隐式的有限体积方法进行离散。显示部分,对流项采用带 MUSCL 型差分的 Steger 分裂,粘性项采用中心差分格式;隐式部分,应用最大特征值分裂,将矩阵运算转化为代数运算。零攻角时按轴对称进行计算,网格数大约 2 万左右;有攻角时按三维进行计算,网格数大约 30 万左右。

这里只给出零攻角时轴对称流动的有限条纹的干涉图,在此例中生成图像的处理时间在 PIII800 型微机上只用了大约 30 s 时间,应用计算干涉技术首先可以通过实验照片与计算图像的对比来验证 CFD 的有效性。图 3 的上半部分是试验照片,下半部分是计算图像。参考条纹不是垂直的,有  $5^\circ$  的倾斜。钝锥头部激波的脱体距离、激波位置、回流区大

小和再附激波方面都符合得较好,钝锥尾部后面较远处的湍流区域有较大差异。通过对比可知,计算图像与试验照片符合较好,数值计算是有效的。

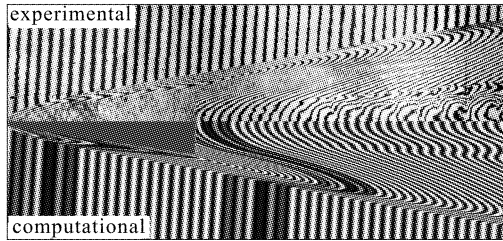


图3 弹道靶中钝锥轴对称流场的计算干涉图与试验干涉图的比较

Fig.3 Comparison of experimental and computational interferograms for blunted cone hypersonic flow in a ballistic range (axis-symmetric flow)

由于激波强折射现象,在图3的试验照片中可以发现干涉条纹的不连续性,即激波外的参考条纹通过激波后不能连上激波内的干涉条纹。试验干涉照片的处理是以干涉条纹的连续性为基础的,在计算干涉图像中可以人为地给某些条纹加上颜色,通过图3中计算干涉图与试验干涉图的对比,可以得到:第23条黄色条纹与钝锥底部后面的第一条黄色条纹相连。通过条纹计数就可以把试验照片中所有的参考条纹和钝锥后流场的条纹连结起来。这样,我们通过计算干涉技术的进一步应用,辅助了试验干涉图的处理。

## 6 结 论

轴对称流动是一种特殊的三维流动,更具其关于 $x$ 轴对称的特性,可以用二维的CFD的计算结果计算出光线沿三维密度场积分的结果。用环带法对光线积分进行离散处理,将 $z$ 方向的光程计算可以转换到 $y$ 方向来进行,将沿光路的三维空间插值计

算转化为二维插值计算,大大加快了处理速度。从示例中可以看出,计算图像与试验照片基本符合,可以进行比较研究。

## 参 考 文 献

- 1 Y. Tamura, K. Fuji. Visualization for computational fluid dynamics and the comparison with experiments [C]. *AIAA Paper* 90-3031, August 1990
- 2 L. A. Yates. Images constructed from computed flowfields [C]. *AIAA Paper* 92-4030, AIAA 17th Aerospace Ground Testing Conference, Nashville, TN, July 1992
- 3 George Havener. Computational flow imaging: fundamentals and history [C]. *AIAA Paper* 94-2615, AIAA 18th Aerospace Ground Testing Conference, Colorado Spring, CO, June 1994
- 4 A. G. Havener, L. A. Obergefell. Computational interferometric description of nested flow fields [J]. *Opt. Eng.*, 1985, **24**(3):441~445
- 5 Stacey G. Rock. CFI-interferometry analysis of hypervelocity ballistic flow fields [C]. *AIAA Paper* 94-2617, AIAA 18th Aerospace Ground Testing Conference, Colorado Spring, CO, June 1994
- 6 T. A. W. M. Lanen, E. M. Houtman, P. G. Bakker. Comparison of interferometric measurements with 3-D Euler computations for circular cones in supersonic flow [C]. *AIAA Paper* 92-2691 CP
- 7 E. M. Houtman, W. J. Bannink, B. H. Timmerman. Experimental and Computational Study of a Blunt Cylinder-Flare Model in High Supersonic Flow [R]. Report LR-796. Faculty of Aero-space Engineering, Delft, The Netherlands, October, 1995, 38, ISBN 90-5623-029-8
- 8 Wolfgang Merzkirch. Flow Visualization [M]. Academic Press, 1974
- 9 Yao Wei, He Anzhi, Yan Dapeng. Theories and Techniques on Phase Field Interferometric Tomography [D]. PhD Thesis of Nanjing University of Science and Technology, 1998 (in Chinese)