

文章编号: 0258-7025(2003)07-0647-04

未知主轴各向异性介质的热导张量 光热测量方法研究

闫长春^{1,2}, 潘 隽², 顾济华²

(¹ 徐州师范大学物理系, 江苏 徐州 221009; ² 苏州大学物理系, 江苏 苏州 215006)

摘要 以在连续调制光辐照下的各向异性介质的热传导理论为基础, 通过 So(3) 群转动理论, 导出不透明各向异性介质的热导张量和热导主轴方向的光热测量方法。

关键词 材料科学; 各向异性介质; So(3) 群; 热导张量; 热导主轴方向

中图分类号 O 551.1 **文献标识码** A

Study of Photothermal Measuring Method of the Thermal Conductivity Tensor of Anisotropic Materials with Unknown Principal Axes

YAN Chang-chun^{1,2}, PAN Jun¹, GU Ji-hua¹

(¹ Department of Physics, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China
² Department of Physics, Xuzhou Normal University, Xuzhou, Jiangsu 221009, China)

Abstract According to thermal conduction theories of anisotropic materials that are irradiated with continuously modulated laser, a photothermal measuring method about the thermal conductivity tensor and the orientation of the principal axis of the conductivity of arbitrarily opaquely anisotropic materials is given based on the theories of So(3) group rotation.

Key words material science; anisotropic material; So(3) group; thermal conductivity tensor; orientation of the principal axis of the conductivity

1 引 言

随着社会的不断发展, 各向异性材料如石英、液晶、宇宙飞船的热屏蔽材料^[1]、诸多高分子材料等^[2]在科学和技术的各个领域有着大量的重要应用。因此, 掌握这些各向异性材料的热学特性尤为重要。对于各向同性材料的热学特性研究目前已发展得比较完善, 在实验上也有许多方法, 如光声技术, 光热偏转技术, 光热辐射 (PTR) 技术等等, 已成功测定热导率和热扩散率, 但对各向异性材料无论是理论还是实验的研究都相对较少。A. Salazar 等对各向异性材料的理论和试验做了一些工作, 尤其是文献 [3] 中给出各向异性材料主热导率的测量方法及相应的测量方法。但是, 必须是在各热导主轴的方向

确定的前提下, 才能测算出主热导率的大小。但一般热导主轴的方向不容易确定, 尤其是三主轴皆处于样品表面层内。因此, 文献 [3] 中的测量方法仍存在较大的局限性。

本文以各向异性介质的连续调制 PTR 技术的三维理论模型为基础, 通过 So(3) 群转动理论, 在不知介质任何热学特性的情况下, 同时导出确定任意不透明各向异性介质在任意笛卡儿坐标下的热导张量和热导主轴方向的测量方法。

2 基本理论

对于各向异性材料如有入射温度场, 则此介质中的热传导方程^[4]

收稿日期: 2002-03-14; 收到修改稿日期: 2002-05-31

基金项目: 江苏省教委自然科学基金 (2001~2003 编号: 01KJB140001) 资助项目。

作者简介: 闫长春 (1972—), 男, 徐州师范大学物理系讲师, 苏州大学物理系在读硕士, 主要从事红外物理及技术研究。

E-mail: yhchangchun@163.com

$$k_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + (k_{12} + k_{21}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + (k_{13} + k_{31}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + (k_{23} + k_{32}) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \rho_s C_s \frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta e^{-\beta z} s(x, y, t) \quad (1)$$

方程中 $\phi(x, y, z, t)$ 为介质相对环境的温度场分布, 入射光辐射于 z 平面上。 k_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 为热传导张量的元素。 $s(x, y, t)$ 为入射辐射场的分布函数。 $e^{-\beta z}$ 为衰减因子, β 为体吸收系数, η 为归一化因子, ρ_s, C_s 分别为材料的密度和热容。

当取主热导率 k_{11}, k_{22}, k_{33} 所在的方向为主轴坐

标系时, 热导率张量为 $\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$, 其中 k_{ii} 为主

热导率。如图 1 所示, 将 xyz 坐标旋转后, 使得 x 轴与 k_{11} 轴, y 轴与 k_{22} 轴, z 轴与 k_{33} 轴重合。由 $So(3)$ 群转动理论^[5], 并选用欧拉角表示, 即先绕 oz 轴逆时针转 γ 角, 在绕 oy' 轴逆时针转 β 角, 最后再绕 oz' 轴逆时针转 α 角所得 (不同于文献[3]中的两次转动)。对应的转动矩阵 R 为

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha)R(\beta)R(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

则在 xyz 坐标轴下的热导率张量为 $(k_{ij})'$, 即

$$\begin{bmatrix} k_{11}' & k_{12}' & k_{13}' \\ k_{21}' & k_{22}' & k_{23}' \\ k_{31}' & k_{32}' & k_{33}' \end{bmatrix} = R^+(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} R(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3)$$

其中

$$k_{11}' = \cos^2\gamma\cos^2\beta(\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\alpha k_{22}) + \frac{\sin 2\alpha\cos\beta\sin 2\gamma}{2}(k_{22} - k_{11}) + \sin^2\gamma(\sin^2\alpha k_{11} + \cos^2\alpha k_{22}) + \cos^2\gamma\sin^2\beta k_{33} \quad (4a)$$

$$k_{12}' = k_{21}' = \frac{\sin 2\gamma\cos^2\beta}{2}(\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\alpha k_{22}) + \frac{\cos 2\gamma\cos\beta\sin 2\alpha}{2}(k_{11} - k_{22}) - \frac{\sin 2\gamma}{2}(\sin^2\alpha k_{11} + \cos^2\alpha k_{22}) + \frac{\sin 2\gamma\sin^2\beta}{2}k_{33} \quad (4b)$$

$$k_{13}' = k_{31}' = -\frac{\cos\gamma\sin 2\beta}{2}(\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\alpha k_{22}) + \frac{\sin\gamma\sin\beta\sin 2\alpha}{2}(k_{11} - k_{22}) + \frac{\cos\gamma\sin 2\beta}{2}k_{33} \quad (4c)$$

$$k_{22}' = \sin^2\gamma\cos^2\beta(\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\alpha k_{22}) + \frac{\sin 2\gamma\cos\beta\sin 2\alpha}{2}(k_{11} - k_{22}) + \cos^2\gamma(\sin^2\alpha k_{11} + \cos^2\alpha k_{22}) + \sin^2\gamma\sin^2\beta k_{33} \quad (4d)$$

$$k_{32}' = k_{23}' = -\frac{\sin\gamma\sin 2\beta}{2}(\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\alpha k_{22}) + \frac{\cos\gamma\sin\beta\sin 2\alpha}{2}(k_{22} - k_{11}) + \frac{\sin\gamma\sin 2\beta}{2}k_{33} \quad (4e)$$

$$k_{33}' = \sin^2\beta\cos^2\alpha k_{11} + \sin^2\beta\sin^2\alpha k_{22} + \cos^2\beta k_{33} \quad (4f)$$

如令 $\alpha = \gamma = 0, \beta = \theta, k_{11} = k_{22} \neq k_{33}$, 则上矩阵简化为热单各向异性晶体所对应的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} k_{11}\cos^2\theta + k_{33}\sin^2\theta & 0 & (k_{33} - k_{11})\sin\theta\cos\theta \\ 0 & k_{11} & 0 \\ (k_{33} - k_{11})\sin\theta\cos\theta & 0 & k_{33}\cos^2\theta + k_{11}\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

于是方程(1)变为

$$k_{11}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_{22}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_{33}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2k_{12}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + 2k_{13}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + 2k_{23}' \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = \rho_s C_s \frac{\partial \phi}{\partial t} + \eta e^{-\beta z} s(x, y, t) \quad (6)$$

设入射辐射光是圆频率为 ω 的调制, $s(x, y, t) = s(x, y)e^{j\omega t}$, $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{j\omega t}$, 样品置于真空中, 则边界条件为

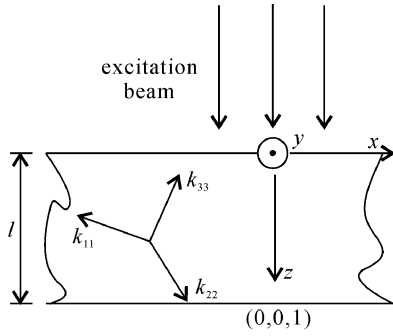


图1 连续调制光辐照下各向异性介质的三维图
Fig.1 3-D schematic of anisotropic media irradiated by modulated continuously beam

$$-k_{31}' \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{32}' \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_{33}' \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0,l} = 0 \quad (7)$$

与文献[4]中处理方法相似,对(6)式进行二维傅氏变换 $(x, y, z) \rightarrow (f_x, f_y, z)$ 后,代入(7)式的二维傅氏变换式,并设样品是不透明的 $e^{-\beta l} \approx 0$,且入射光束光斑比较大,样品相对尺寸较小,则 $s(x, y) \approx s_0$,最后进行逆傅氏变换可得后表面中心处温度场分布

$$\phi(0, 0, l) \propto \frac{1}{\sqrt{jR'}(e^{-\sqrt{jR'l}} - e^{\sqrt{jR'l}})} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (8)$$

其中

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R'} \sqrt{e^{\sqrt{2R'l}} + e^{-\sqrt{2R'l}} - 2\cos \sqrt{2R'l}}} \quad (9a)$$

$$\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\tan \frac{\sqrt{2R'l}}{2}}{\tanh \frac{\sqrt{2R'l}}{2}} \right] - \frac{\pi}{4} \quad (9b)$$

上两式中的 $R' = \frac{\omega \rho_s C_s}{k_{33}}$,这样由(9a)式可知,在 $(0, 0, l)$ 处测出 $A(\omega) \sim \omega$ 或 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 的变化关系

后,很容易通过计算机拟合得到 k_{33}' 的值,而 k_{33}' 满足

$$k_{33}' = \sin^2 \beta \cos^2 \alpha k_{11} + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha k_{22} + \cos^2 \beta k_{33} \quad (10)$$

由(10)式知,如果将样品在6个不同的方位上旋转,并作切割,同样可测出各种情况下的 $A(\omega) \sim \omega$ 变化关系,通过拟合可得6个不同的 k_{33}' 值(尽管(10)式中有 $\alpha, \beta, k_{11}, k_{22}, k_{33}$ 5个变量,但旋转后会多出 γ 变量,因此,需要6个 k_{33}' 的值),于是根据(10)式,可得6个方程所组成的方程组,从而可解得 k_{11}, k_{22}, k_{33} 及相应的欧拉角 α, β, γ 。这样将它们代入(4a)~(4f)式,可将任意笛卡儿坐标系下的热传导张量确定。

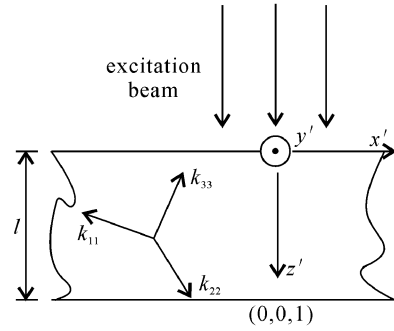


图2 切割后的三维图
Fig.2 3-D schematic of the sample incised

下面介绍如何找6个方程:

第一个方程为(10)式。用刀过 oy 轴且与 ox 轴夹角 θ 作两次切割,可得一薄层。如图2所示,建立新坐标系为 $x'y'z'$,热导主轴也旋转到另一个位置,这样, x', y', z' 三个轴可以认为经过欧拉角 α', β', γ' 转动到主轴 k_{11}, k_{22}, k_{33} 的位置。也可以认为先沿 oy' 轴逆时针转 θ ,再经欧拉角 α, β, γ 转到主轴位置,于是有关系

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha' \cos \beta' \cos \gamma' - \sin \alpha' \sin \gamma' & \cos \alpha' \cos \beta' \sin \gamma' + \sin \alpha' \cos \gamma' & -\cos \alpha' \sin \beta' \\ -\sin \alpha' \cos \beta' \cos \gamma' - \cos \alpha' \sin \gamma' & -\sin \alpha' \cos \beta' \sin \gamma' + \cos \alpha' \cos \gamma' & \sin \alpha' \sin \beta' \\ \sin \beta' \cos \gamma' & \sin \beta' \sin \gamma' & \cos \beta' \end{pmatrix} = R(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11)$$

由(11)式可得

$$-\cos \alpha' \sin \beta' = -\sin \theta (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) - \cos \theta \cos \alpha \cos \beta \quad (12a)$$

$$\cos \beta' = -\sin \theta \sin \beta \cos \gamma + \cos \theta \cos \beta \quad (12b)$$

将(12a), (12b)代入(10)式可得第二个方程为

$$k_{33}^{(\theta)} = (k_{11} - k_{22}) [\sin \theta (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) + \cos \theta \cos \alpha \sin \beta]^2 + k_{22} + (k_{33} - k_{22}) [-\sin \theta \sin \beta \cos \gamma + \cos \theta \cos \beta]^2 \quad (13)$$

当 θ 分别取 $20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 时,可得5个方程。对应5个 $k_{33}^{(\theta)}$ 也由拟合所得。最后介绍由解出的欧拉角 (α, β, γ) 如何确定主轴 k_{11}, k_{22}, k_{33} 的方向。

假设主轴 k_{33} 与 z 轴夹角 β (已求出),与 x 轴, y 轴夹角分别为 θ_1, θ_2 ;主轴 k_{11} 与 x 轴夹角为 θ_3 ;主轴 k_{22} 与 y 轴夹角为 θ_4 。由几何关系可导出 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 与 α, β, γ 之间的关系

$$\cos\theta_1 = \sin\beta\cos\gamma \quad (14a)$$

$$\cos\theta_2 = \sin\beta\sin\gamma \quad (14b)$$

$$\cos\theta_3 = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \quad (14c)$$

$$\cos\theta_4 = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma \quad (14d)$$

其中 α, β, γ 全部为逆时针旋转所得,由 $\beta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 完全可定出任意各向异性介质的热导主轴方向。

3 实验及结果

未知主轴各向异性介质的热导张量光热测量装置如图3所示,入射激光为15 W CO₂ 10.6 μm 红外激光,经斩波器调制后辐照到样品上。样品受调制光照后,引起内部周期性热效应,并产生热辐射的变化。用液氮制冷的 HgCdTe 探测器接受样品后表面中心处的热辐射,经前置放大器放大后,用双通道精密锁相放大器记录光热信号。

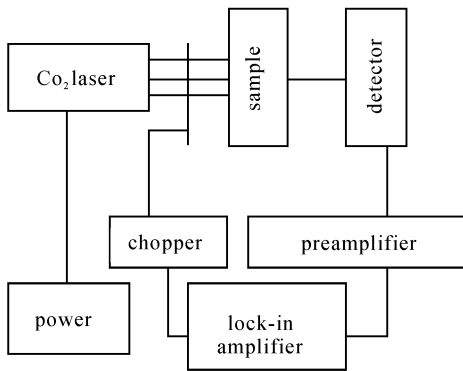


图3 实验装置图

Fig. 3 Schematic of experiment

由讨论可知,入射光的半径必须比样品尺寸大很多,才有(8)式一维结果。但由于难以实现,且频率较大时,三维模型可用一维模型代替^[6],故以下实验中只要满足频率较大即可。采用热单轴介质石墨作为实验样品,密度 $\rho = 2250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,比热 $c = 714 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ 。选样品任一平面作基面,并在此面上切一薄片,建立坐标系。随后再按上面方法切

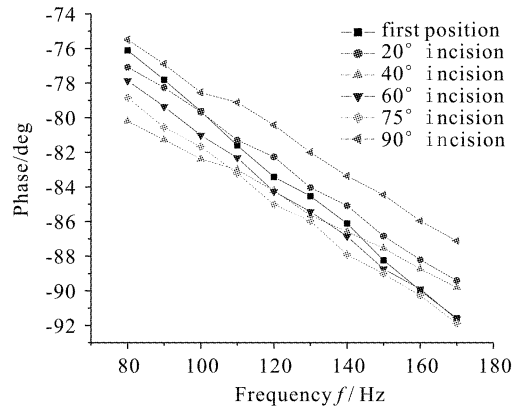


图4 位相随频率的变化关系曲线

Fig. 4 Curves of phase with frequency

5次。测得位相随频率变化关系如图4所示。按(9b)式对各种情况实验数据进行非线性拟合,可得 $k_{33}', k_{33}^{(20)}, k_{33}^{(40)}, k_{33}^{(60)}, k_{33}^{(75)}, k_{33}^{(90)}$ 。将拟合结果分别代入(10), (13)式,可解得 $k_{11} = 247.30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $k_{22} = 247.93 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $k_{33} = 83.56 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\alpha = 209.36^\circ, \beta = 50.04^\circ, \gamma = 46.19^\circ$,再将 α, β, γ 分别代入(14a)~(14d)可解得 $\theta_1 = 57.95^\circ, \theta_2 = 56.42^\circ, \theta_3 = 91.93^\circ, \theta_4 = 112.09^\circ$ 。从 k_{11}, k_{22} 的值近似相等可以证明此方法的正确。与石墨经典参数 $k_{11} = k_{22} = 250 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $k_{33} = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 比较,测量所得 k_{11}, k_{22}, k_{33} 的相对误差分别为1.08%, 0.83%, 4.45%。

参 考 文 献

- 1 M. N. Ozisik. Heat Conduction [M]. Beijing: Advanced Education Press, 1983. 663 (in Chinese)
- 2 Lu Xici. Intensity Distruction of Macromolecule Materials [M]. Chengdu: Sichun Education Press, 1988. 129~130 (in Chinese)
- 3 A. Salazar, A. Sánchez-Lavega, A. Ocariz et al.. Photothermal characterization of anisotropic materials with buried principal axes [J]. *Opt. Eng.*, 1997, **36** (2):391~399
- 4 M. Vaez, Iravani, M. Nikoonahad. Photothermal waves in anisotropic media [J]. *J. Appl. Phys.*, 1987, **62**: 4065~4071
- 5 A. W. Joshi. Elements of Group Theory for Physicists [M]. Beijing: Science Press, 1982. 126 ~ 128 (in Chinese)
- 6 Qian Lin, Li Peizan. The 3-D theoretical model of photothermal radiation modulated continuously [J]. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1990, **10**(3):276~279 (in Chinese)