

文章编号: 0258-7025(2003)05-0431-04

分数傅里叶变换计算全息图

谢世伟, 高峰, 曾阳素, 高福华, 郭永康

(四川大学物理学院, 四川 成都 610064)

摘要 提出了分数傅里叶变换计算全息图(FRTCCH)。采用分数傅里叶变换的快速算法和罗曼 III型迂回位相编码方法设计并制作了一个物体不同分数阶的分数傅里叶变换计算全息图,用罗曼 I 型分数傅里叶变换光学系统再现原物体,得到了物体清晰的像。分析了 FRTCCH 和再现图像随分数阶变化的规律,讨论了分数傅里叶变换计算全息图与菲涅耳计算全息图之间的关系。

关键词 信息光学; 分数傅里叶变换(FRT); 分数阶; 计算全息图(CGH)

中图分类号 O 438.1 文献标识码 A

Computer-generated Hologram of Fractional Fourier Transform

XIE Shi-wei, GAO Feng, ZENG Yang-su, GAO Fu-hua, GUO Yong-kang

(Institute of Physics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, China)

Abstract Computer-generated hologram of fractional Fourier transform is presented. With fast arithmetic of fractional Fourier transform and Lohmann III detour phase coding method, fractional Fourier transform CGH in different fractional orders of one object are programmed and fabricated. These holograms are reconstructed with Lohmann I fractional Fourier transform optical system and a clear images are obtained. The changing rule of FRTCCH and reconstructed images is analyzed as fractional orders change. The relationship between fractional Fourier transform CGH and Fresnel CGH is discussed.

Key words information optics; fractional Fourier transform; fractional order; computer-generated hologram

分数傅里叶变换由 Namias 在 1980 年引入量子力学求解偏微分方程^[1], 后由 MacBride 等给出了更严格的定义^[2]。1993 年 Mendlovic 和 Ozaktas 等从光在二次方梯度折射率介质中的传播入手, 给出了分数傅里叶变换的级数形式的表达式^[3,4]。Lohmann 利用 Wigner 相空间旋转的概念给出了分数傅里叶变换的积分形式^[5]。分数傅里叶变换将其分数阶作为一个新的自由度, 大大丰富了光学信息处理的内容, 目前已在很多方面得到了应用, 如分数卷积、分数相关^[6]、分数傅里叶变换域滤波等^[7]。同时, 分数傅里叶变换也是分析光束传输和光学系统的有力工具。

分数傅里叶变换全息图是一种新型全息图, 已报道了它的若干重要性质和应用, 全息图的记录和

再现方式的数字式实现是目前全息术发展的重要方向。本文提出的分数傅里叶变换计算全息图和一般计算全息图一样, 具有制作灵活方便, 抗外界干扰能力强, 噪声小, 易于复制, 无需昂贵的设备和仪器, 不用复杂的光路排布等优点。更为重要的是, 与傅里叶变换计算全息图相比, 分数傅里叶变换计算全息图由于引入了分数阶这一自由度, 它不仅能记录物体的信息, 同时也记录了记录系统的信息, 因而可开拓分数傅里叶变换和全息术的更多应用领域。

1 分数傅里叶变换计算全息图的理论与制作

1.1 分数傅里叶变换的离散表示及其快速算法

收稿日期: 2002-04-12; 收到修改稿日期: 2002-06-07

作者简介: 谢世伟(1976—), 男, 四川大学物理系硕士研究生, 主要从事衍射光学、信息光学研究。E-mail: xie_shiwei@hotmail.com

设输入函数为 $f(x)$, 则其 P 阶分数傅里叶变换 定义为^[1]

$$F^P[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) B_P(x, u) dx \tag{1}$$

$$B_P(x, u) = \frac{\exp[-i(\frac{\pi\phi}{4} - \frac{\phi}{2})]}{|\sin\phi|^{1/2}} \exp[i\pi(x^2 \cot\phi - 2xucsc\phi + u^2 \cot\phi)] \tag{2}$$

其中, $B_P(x, u)$ 为核函数, $\phi = P\pi/2, \phi = \text{sgn}(\sin\phi), P$ 为分数阶。

将(1) 式改写为

$$F^P[f(x)] = A_\phi e^{i\pi\alpha x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\beta ux} [e^{i\pi\alpha x^2} f(x)] dx \tag{3}$$

其中, $\alpha = \cot\phi, \beta = \csc\phi, A_\phi = \frac{\exp[-i\pi\text{sgn}(\sin\phi)/4 + i\phi/2]}{|\sin\phi|^{1/2}}, \phi = P\pi/2$ 。

假设 $f(\cdot)$ 的 Wigner 分布在直径为 Δx 的圆以外为 0, 同时限制分数阶 P 在区间 $0.5 \leq |P| \leq 1.5$ 以内(分数阶在此范围之外时可对其作周期延拓), 则受调制的函数 $e^{i\pi\alpha x^2} f(x)$ 在频域中被限制在 $[-\Delta u, \Delta u]$ 以内, 根据抽样定理, 有

$$e^{i\pi\alpha x^2} f(x) = \sum_{n=-N}^{N-1} e^{i\pi\alpha(n/2\Delta u)^2} f\left[\frac{n}{2\Delta u}\right] \text{sinc}\left[2\Delta u\left(x - \frac{n}{2\Delta u}\right)\right] \tag{4}$$

其中, $N = (\Delta u)^2$ 。由于假设了 $f(x)$ 在 $[-\Delta u/2, \Delta u/2]$ 以外为 0, 因此积分范围为 $-N$ 到 $N-1$ 。将式(4) 代入式(3) 并改变积分及求和的次序, 可得

$$F^P[f(x)] = A_\phi e^{i\pi\alpha x^2} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{i\pi\alpha(n/2\Delta u)^2} f\left[\frac{n}{2\Delta u}\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\beta ux} \text{sinc}\left[2\Delta u\left(x - \frac{n}{2\Delta u}\right)\right] dx \tag{5}$$

(5) 式的积分等于 $e^{-i2\pi\beta u(n/2\Delta u)} (1/2\Delta u) \text{rect}(\beta u/2\Delta u)$ 。在 $|u| \leq \Delta u/2$ 条件下, $\text{rect}(\beta u/2\Delta u) \equiv 1$, 因此有

$$F^P[f(x)] = \frac{A_\phi}{2\Delta u} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{i\pi\alpha x^2} e^{-i2\pi\beta u(n/2\Delta u)} e^{i\pi\alpha(n/2\Delta u)^2} \cdot f\left[\frac{n}{2\Delta u}\right] \tag{6}$$

(6) 式即为分数傅里叶变换的离散形式, 经抽样以后得到

$$F^P\left[f\left[\frac{m}{2\Delta u}\right]\right] = \frac{A_\phi}{2\Delta u} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{i\pi[\alpha(m/2\Delta u)^2 - 2\beta mn/(2\Delta u)^2 + \alpha(n/2\Delta u)^2]} \cdot f\left[\frac{n}{2\Delta u}\right] \tag{7}$$

这是一个有限的求和, 直接计算需要作 $O(N^2)$ 次乘法, 如用上式设计分数傅里叶变换全息图, 计算量将很大, 使得菲涅耳计算全息的设计非常困难。将(7) 式作如下的变换

$$F^P\left[f\left[\frac{m}{2\Delta u}\right]\right] = \frac{A_\phi}{2\Delta u} e^{i\pi(\alpha - \beta)(m/2\Delta u)^2} \sum_{n=-N}^{N-1} e^{i\pi\beta[(m-n)/2\Delta u]^2} e^{i\pi(\alpha - \beta)(n/2\Delta u)^2} \cdot f\left[\frac{n}{2\Delta u}\right] \tag{8}$$

上式中的求和项可看作 $e^{i\pi\beta(n/2\Delta u)^2}$ 与受啁啾调制的物函数 $f(\cdot)$ 的卷积。调用现成的 FFT 算法, 很快就可求出该卷积。这样, 利用快速傅里叶变换算法计算分数傅里叶变换, 可以将运算量从 $O(N^2)$ 降低到 $O(N \log N)$, 大大降低直接计算的运算量。算出的值再乘以一个啁啾调制项, 得到最后的输出值。采用这种算法, 为我们设计分数傅里叶变换全息图提供了有力工具。

1.2 分数傅里叶变换与菲涅耳衍射的关系

将分数傅里叶变换表示为以下的卷积形式

$$g(U, V) = \frac{\exp[i(\phi - \phi_s)]}{|\sin\phi|} \exp\left[-\frac{i\pi\sin^2\phi}{\lambda}(U^2 + V^2)\right] f(U, V) * \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}(U^2 + V^2)\right] \tag{9}$$

菲涅耳衍射的积分形式表示为

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \iint f(s, t) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}[(x-s)^2 + (y-t)^2]\right] ds dt$$

$$\text{即 } U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} f(x, y) * \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)\right] \tag{10}$$

将(9) 式和(10) 式比较, 结果形式上分数傅里叶变换只比一般的菲涅耳衍射多一个二次位相因子

$$\exp\left[-\frac{i\pi\sin^2\phi}{\lambda}(U^2 + V^2)\right] \tag{11}$$

以及一个缩放因子

$$i\lambda \frac{\exp[i(\phi - \phi_s)]}{|\sin\phi|} \tag{12}$$

1.3 分数傅里叶变换计算全息图的制作

首先, 在满足抽样定理的条件下将含有字母“E”的平面作为待编码图像进行抽样。根据抽样定理, 在 x 方向选抽样点, δ_x 为间距, 其抽样单元数为 $L = \Delta x / \delta_x$; 在 y 方向, δ_y 为间距, 其抽样单元数为 $K = \Delta y / \delta_y$ 。选取 $\Delta x = \Delta y$, $\delta_x = \delta_y$, 即 $L = K$, 物面上抽样点总数为 $L \times K$ 。物函数 $f(x, y)$ 在抽样点处的值为 0 或 1, 对字母“E”的抽样值为 1, 图像其他地方的抽样值为 0。

其次, 利用上述快速分数傅里叶变换算法对抽样得到的数据阵列进行分数阶为 P 的分数傅里叶变换, 得到物函数 $f(x, y)$ 的 P 阶分数傅里叶变换函数 $F^P(U, V)$, 或称 P 阶分数域谱。 $F^P(U, V)$ 是复数, 可求出振幅和位相。然后进行编码, 编码之前需要对振幅和位相进行归一化处理。编码采用罗曼 III 型迂回位相编码方法^[8], 具体做法是在每个抽样单元中设置一个矩形透光孔径, 矩形的宽度为单元宽度的一半, 并且保持不变。以矩形的高度来调制波面的振幅, 以矩形的位置(矩形中心到单元中心的距离)来调制波面的位相。

最后经过计算机输出、激光打印、缩板和冲洗就得到分数傅里叶变换计算全息图。需要说明的是, 物体抽样后得到的数据点阵要乘一个随机位相因子进行毛玻璃化, 其目的是降低计算全息图上各单元透过率变化的动态范围, 否则再现图像将丢失低频信息。

2 光学再现

采用罗曼 I 型分数傅里叶变换系统作为再现系统。将分数傅里叶变换计算全息图置于输入面, 输入面和输出面必须在特定阶的分数傅里叶变换系统中才能再现原物体的像, 如图 1 所示。输入面和输出面到透镜的距离均为 z , 透镜的焦距为 f 。当 z 和 f 满足下列条件时, 输出函数为输入函数的 P 阶分数傅里叶变换

$$z = f_1 \tan(P\pi/4), \quad f = f_1 / \sin(P\pi/2) \quad (13)$$

其中, f_1 称为标准焦距, 当变换系统一定时为常数。

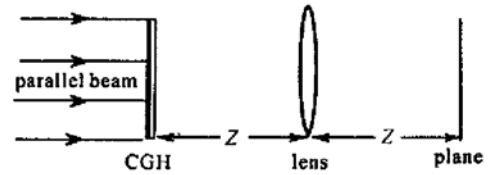


图 1 罗曼 I 型实现 P 阶分数傅里叶变换的光学装置
Fig. 1 Optical device of Lohmann I FRT system

再现系统的变换透镜焦距 $f = 30 \text{ cm}$ 。根据(13)式, 可计算出分数阶 P 分别为 0.75, 1.25 和 1.75 时距离 z 的大小分别为 18.5 cm, 41.5 cm 和 57.7 cm。经实验测量, 再现图像的位置与上述理论计算结果相同。

图 2(a)~(c) 及 (a')~(c') 为同一物体不同分数阶的 FRTCCH(无随机位相) 及再现像。

从图中可以看出, 不加随机位相的物函数按 Lohmann III 型迂回位相编码方法所得的 FRTCCH 是带衍射条纹的物体的图像, 即它是一种 Fresnel 衍射图样, 但它与同一物体直接产生的 Fresnel 衍射图样的条纹分布又不完全相同。这是由前文 2.2 节中所述, Fresnel 衍射积分式与分数傅里叶变换式的形式基本相同, 但后者比前者多一个二次位相因子(11)式和振幅缩放因子(12)式所致。由此可见, 分数傅里叶变换计算全息图是一种特殊的菲涅耳计算全息图, 从而可采用分数傅里叶变换的快速计算方法设计菲涅耳计算全息图。

从图中还可看出, 1) 物函数 $f(x, y)$ 不乘以随机位相时, 编码图样边缘没有矩孔, 即发生了信息丢失, 可见 $f(x, y)$ 在变换前乘以随机位相的必要性。2) P 在(0, 1)之间时为菲涅耳衍射, P 越接近 0 编码图样与物函数越接近; $P = 1$ 时为夫琅和费衍射, 编码图样恰是物函数的频谱, 分数阶在 0~1 之间时, 编码图样从物函数向其频谱转化。



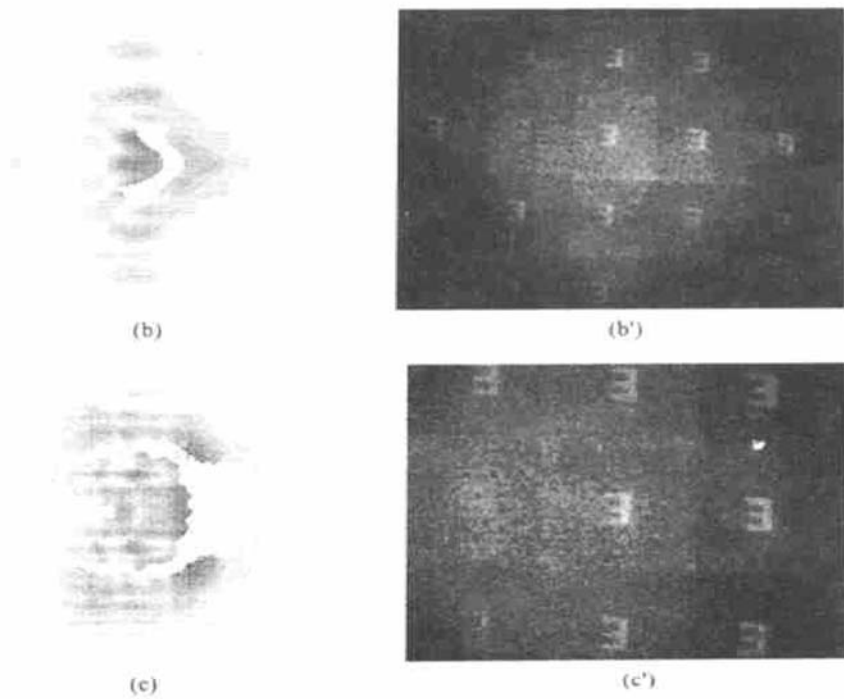


图 2 字母“E”的分数傅里叶变换计算全息

(a), (b), (c) 无随机位相的编码图样; (a'), (b'), (c') 加随机位相的再现图像

Fig. 2 FRTCGH of letter “E”

(a), (b), (c) encoded pattern without random phase; (a'), (b'), (c') reconstructed pattern with random phase

(a), (a') $P = 0.75$; (b), (b') $P = 1.25$; (c), (c') $P = 1.75$

3 结 论

自从分数傅里叶变换引入光学领域后,它的应用就一直受到人们的关注。目前已在信号分离、分数相关、分数卷积、分数子波变换、分数盖伯变换和分数域滤波等方面得到了应用。由于分数傅里叶变换计算全息图在制作上的优点,它可以更方便地应用于信号分离和滤波等。另外,利用分数傅里叶变换计算全息还可灵活地实现信号相减和相加,实现对光信息的处理。

参 考 文 献

1 V. Namias. The fractional order Fourier transform and its application in quantum mechanics [J]. *J. Inst. Maths. Appl.*, 1980, **25**: 241~ 265

2 A. C. MacBride, F. H. Kerr. On Namias' s fractional Fourier transforms [J]. *IMA J. Appl. Math.*, 1987, **39**: 159~ 175

3 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(9): 1875~ 1881

4 H. M. Ozaktas, D. Mendlovic. Fractional Fourier transforms and their optical implementation: II [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(12): 2522~ 2531

5 A. W. Lohmann. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1993, **10**(10): 2181~ 2186

6 D. Mendlovic, H. M. Ozaktas, A. W. Lohmann. Fractional correlation [J]. *Appl. Opt.*, 1995, **34**(2): 303~ 309

7 R. G. Dorsch, A. W. Lohmann, Y. Bitran *et al.*. Chirp filtering in the fractional Fourier domain [J]. *Appl. Opt.*, 1994, **33**(32): 7599~ 7602

8 Yu Zhuliang, Jin Guofan. Computer generated Hologram [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1984 (in Chinese)