

文章编号: 0258-7025(2003)04-0322-03

扰动幅度引导混沌系统到周期振荡解

吕 翎, 李成仁

(辽宁师范大学物理系, 辽宁 大连 116029)

摘要 通过对单模激光混沌系统增加一个周期扰动, 构造一种具有外部周期扰动的新动力学系统, 基于数值法研究了系统的混沌态在周期扰动下的动力学行为。结果表明, 扰动幅度是系统的控制参数, 随着周期扰动幅度数值的变化, 系统的状态由混沌态转变为 2^n 周期 ($2^n p$) 振荡态。

关键词 理论物理学; 单模激光系统; 周期扰动; 幅度; 混沌; 振荡

中图分类号 O 415.5 **文献标识码** A

Direct Chaotic System Towards Periodic Oscillation Solution Based on Perturbation Amplitude

LÜ Ling, LI Cheng-ren

(Department of Physics, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning, 116029, China)

Abstract Based on single-mode laser system, a new dynamical system under external periodic perturbation modulation is constructed and investigated by using of the numerical analysis method. The results show that the perturbation amplitude (PA) is control parameter of the system, the state of the system takes on $2^n p$ oscillation patterns as the PA is in different numerical regions.

Key words theoretical physics; single-mode laser system; periodic perturbation; amplitude; chaos; oscillation

1 引 言

单模激光系统可以导致混沌现象的出现, 其动力学性质已得到了充分的研究^[1,2]。近年来, 随着研究的不断深入, 普遍认识到外力作用在非线形系统上, 可以改变系统的局部和整体的稳定性质, 由外力作用的方式和性质的不同产生了不同的控制混沌的方法^[3~5]。迄今已有的混沌控制方法一般分为两种: 一种是对混沌动力学系统的参数施加扰动, 随时间适当调整扰动, 迫使系统向目标轨道移动, 利用对参数所允许的最大扰动量, 经过反复调整, 最终使所需要的周期轨道得到稳定。这种控制以 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出的参数微扰法 (OGY 法) 为典型代表; 另一种则是对混沌动力学系统的变量进行扰动或反馈, 从而使系统达到期望的周期轨道。本文对单模激光系统施加外部周期扰动力, 并采用

数值研究的方法确定了新构造的系统在周期扰动调制下的动力学行为。研究结果发现, 在周期扰动的引导下, 系统的动力学行为发生了变化, 呈现出多种新的演化模式, 由未加扰动的混沌态演变为 2^n 周期 ($2^n p$) 的多周期振荡态。此控制方法简便有效, 易于实现。

2 周期扰动下的单模激光系统

单模激光系统是一个包含三个变量且呈现混沌行为的动力学模型, 它可以由下列微分方程组描述

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x) \\ dy/dt &= (\mu - z)x - y \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned} \quad (1)$$

其中 σ, μ, b 为参数, $\sigma = 10, \mu = 30, b = 8/3$ 。在上述参数范围内, (1) 式所描述的系统是不稳定的。不稳

收稿日期: 2002-01-07; 收到修改稿日期: 2002-04-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 10175032) 资助项目。

作者简介: 吕翎 (1960—), 女, 教授, 理学硕士, 主要从事非线性物理研究。E-mail: lshdg@sina.com.cn

定的非线性系统的演化模式可以通过求系统的 Lyapunov 指数来判定。作出该系统的最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} 随参数 μ 变化的关系曲线如图 1 所示,由图中曲线可以看出,系统参数 σ, μ, b 取上述数值时,最大 Lyapunov 指数为正值,可以判定系统此时的演化模式为混沌态^[6]。作出 xz 平面内的混沌吸引子如图 2 所示。

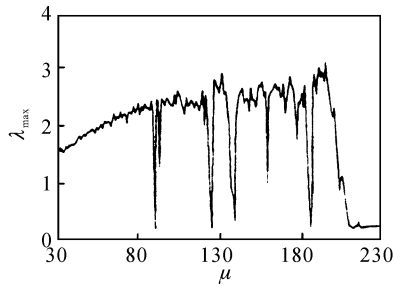


图 1 Lyapunov 指数曲线

Fig. 1 Lyapunov exponent
($\sigma = 10, b = 8/3$)

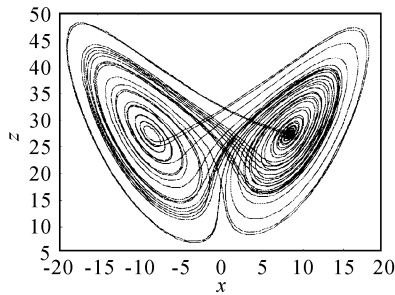


图 2 混沌吸引子

Fig. 2 Chaotic attractor
($\sigma = 10, \mu = 30, b = 8/3$)

对(1)式所描述的单模激光系统施加周期扰动,得到

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y-x) + a \sin \varphi \\ dy/dt &= (\mu-z)x - y \\ dz/dt &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

其中 a 为归一化的调制幅度, φ 为调制位相, $\varphi = \omega t$ (ω 为调制角频率)。在施加了这种周期扰动后,构造出的新的动力学系统(2)式将呈现多种新的动力学演化模式。

3 数值结果与分析

采用 Adomian 提出的逆算符算法对新构造的单模激光系统(2)式进行数值研究,该方法在求解非线性方程中较其他算法精度更高,收敛性更快。为

此,令

$$\begin{aligned} L &= d/dt, & R_{11} &= -\sigma, & R_{12} &= \sigma, \\ R_{21} &= \mu, & R_{22} &= -1, & R_{31} &= -b \\ Ny &= -xz = \sum a_n, & Nz &= xy = \sum b_n, \\ X_w(t) &= a \sin \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

于是(2)式就可以写成

$$\begin{aligned} Lx &= R_{11}x + R_{12}y + x_w(t) \\ Ly &= R_{21}x + R_{22}y + Ny \\ Lz &= R_{31}z + Nz \end{aligned} \quad (4)$$

将等式两边分别用逆算符 L^{-1} 作用,并将方程参数化后得

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= L^{-1}R_{11}x_n + L^{-1}R_{12}y_n + L^{-1}x_w \\ y_{n+1} &= L^{-1}R_{21}x_n + L^{-1}R_{22}y_n + L^{-1}a_n \\ z_{n+1} &= L^{-1}R_{31}z_n + L^{-1}b_n \end{aligned} \quad (5)$$

其中 Adomian 多项式的具体表达式为

$$\begin{aligned} a_0 &= -x_0 z_0 \\ a_1 &= -x_0 z_1 - x_1 z_0 \\ a_2 &= -x_0 z_2 - x_2 z_0 - 2x_1 z_1 \\ &\dots\dots \\ b_0 &= x_0 y_0 \\ b_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ b_2 &= x_0 y_2 + x_2 y_0 + 2x_1 y_1 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (6)$$

这样,由(5),(6)和(7)式就可以在计算机上自动导出 x, y, z 的 n 阶逼近解析表达式。以逆算符算法的结果作为数值计算的公式,从计算机上完成在不同的扰动幅度区间内系统演化模式的数值模拟,即通过固定其他参数而仅改变扰动幅度 a 来确定系统的演化模式。

固定位相 φ 的数值为 2,幅度 a 从零开始逐渐增加,当 a 的数值较小时,发现调制下的单模激光系统的最大 Lyapunov 指数仍为正值,但指数曲线的形状有所改变,此时虽然系统仍处于混沌态,但通过相图可以发现,混沌吸引子的形状和内部结构有所改变。当 a 的数值增加到一定数值时,系统的最大 Lyapunov 指数出现了负值,说明系统的动力学行为发生了变化,出现了新的演化模式,例如取 a 为 95 时,计算机数值模拟出的演化模式为周期 $8(8p)$ 振荡态,而 a 分别取 100 和 105 时,演化模式分别为周期 $4(4p)$ 和周期 $2(2p)$ 振荡态。分别作出周期 4 和周期 2 在 xz 相平面内的轨迹如图 3(a),(b)所示。

出现这种倍周期振荡演化模式应该是单模激光系统与外加周期力相互作用的结果。实际上,受外

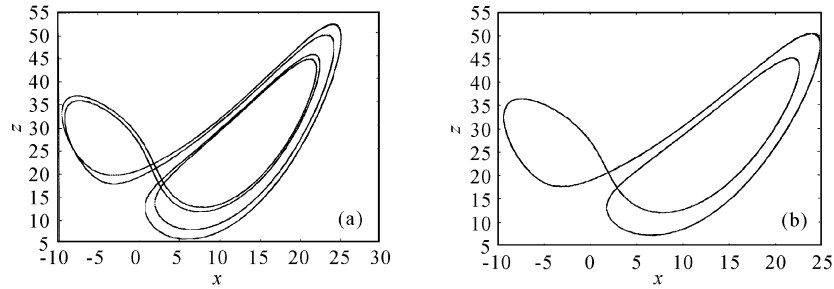


图 3 周期 4(a)和周期 2(b)轨道

Fig. 3 $4p$ (a) and $2p$ (b) periodic orbit(a) $\varphi = 2, a = 100$; (b) $\varphi = 2, a = 105$

部周期扰动力作用的(2)式可以看成是由两个系统构成的,其中之一是(1)式表示的非线性系统;另一个是(2)式中外加的周期扰动力 $a \sin \omega t$ 。两个系统相互作用的强弱是通过调节扰动幅度 a 来实现的。当 a 很小时,外加扰动力比较弱,对非线性系统的影响不足以改变原系统的动力学行为;但当 a 较大时,外加周期扰动力对原非线性系统的影响达到了足够的程度,迫使原系统改变了原来的动力学行为,演化出 $2^n p$ 这样新的多周期振荡态。由此可见, $2^n p$ 振荡态的出现可以看作是在扰动幅度 a 的引导下,非线性系统与外加周期扰动力相互作用程度的产物。

在数值计算中还发现,利用扰动幅度 a 作为控制参数调节系统时,在计算机上实现迅速、直接,变换方便,说明扰动幅度作为控制参数引导系统从混沌态到多周期振荡态确实灵敏有效。

参 考 文 献

- 1 Lü Ling, Li Chengren. Fractal dimension of chaotic attractor in single mode laser system [J]. *Appl. Opt.* (应用光学), 2000, **21**(1):11~12 (in Chinese)
- 2 Lü Ling, Li Chengren, Lu B Q. Theoretical research of chaotic behavior about single mode laser [J]. *Opt. Tech.* (光学技术), 1998, **24**(2):35~43 (in Chinese)
- 3 E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke. Controlling chaos [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**(11):1196~1199
- 4 W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano. Experimental control of chaos [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **65**(26):3211~3214
- 5 J. Y. Chen, K. W. Wong, J. W. Shuai. Properties of phase locking with weak phase-coherent attractors [J]. *Phys. Lett. A*, 2001, **285**:312~318
- 6 Lü Ling. *Nonlinear Dynamics and Chaos* [M]. Dalian: Dalian Publishing House, 2000. 130~133 (in Chinese)