

文章编号: 0258-7025(2003)03-0227-04

# 聚焦光束的傅里叶数值算法研究

卢光山, 胡巍, 傅喜泉, 喻松, 郭弘

(华南师范大学传输光学实验室, 广东广州 510631)

**摘要** 由于取样定理的限制, 常规的基于快速傅里叶变换(FFT) 光束传输模拟算法不能进行任意焦距聚焦光束的传输过程的模拟。为此提出了一种新算法: 将球面波因子提出, 将会聚光束的传输过程转化为非会聚光束的传输, 从而间接地求得了聚焦光束的光场分布。利用 Fresnel 数对两种传输过程的关系和聚焦光束的传输特性作了分析。

**关键词** 激光物理; 聚焦光束; 菲涅耳数; 取样定理; 带宽乘积

**中图分类号** O 437; TN 012 **文献标识码** A

## Research on the Fourier Numerical Algorithm of Focused Beam

LU Guang-shan, HU Wei, FU Xi-quan, YU Song, GUO Hong

(Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou, Guangdong 510631, China)

**Abstract** In simulation of focused beam propagation with arbitrary focal length, the traditional beam propagation algorithm based on Fast Fourier Transform will fail to give right results due to the limitation of the sampling theorem. A new algorithm is given, in which the factor of spherical wave front is removing explicitly. Thus the propagation of a focused beam could be evaluated indirectly from propagation of an unfocused beam. The results in two cases are connected inherently by Fresnel number, which plays a key role in focused beam propagation.

**Key words** laser physics; focused beam; Fresnel number; sampling theorem; bandwidth product

## 1 引言

对会聚球面波的传输行为, 特别是焦点附近的光场分布的研究一直是激光传输领域的重要问题。在大型高功率激光系统中, 在研究空间滤波器传输和堵孔现象<sup>[1, 2]</sup>、强激光焦斑分布<sup>[3, 4]</sup>等问题中, 都需要了解和计算光束聚焦性质和焦点附近的光强分布。在处理此类线性传输问题时, 一般采用傍轴条件下的 Huygens-Fresnel 积分公式<sup>[5]</sup>或傍轴方程, 两者在物理上和数学上是完全等价的。如果初始光束的空间分布是已知的, 可以用解析形式表示的, 就用解析积分的方法研究。而当输入光束分布无法用解析形式给出, 例如实验中测量值, 或其他数值模拟的结果, 这时就需要借助于计算机的数值模拟。常用的也是最成熟的数值算法是基于快速 Fourier 变换(FFT)的光束传输算法<sup>[6]</sup>。由于利用了 FFT 的

优点, 此算法不仅速度快而且精度高。

然而对于聚焦光束的传输问题, 由于取样定理<sup>[5, 7]</sup>的限制, 常规的 FFT 算法无法对任意焦距的聚焦光束进行正确的计算。本文将给出算法失效的原因, 并提出了一种新算法, 将聚焦光束的会聚球面波因子取出, 将聚焦光束的计算转化为非聚焦光束的计算, 从而间接地求得了聚焦光束的光场分布。利用 Fresnel 数不仅将两种光束之间的计算结果统一起来, 而且定性分析了聚焦光束的传输特性。

## 2 基本理论和算法

假定在初始输入平面和输出平面的光场复振幅包络分别为  $E_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2})$ , 根据 Huygens-Fresnel 衍射积分<sup>[5]</sup>, 有

收稿日期: 2001-11-19; 收到修改稿日期: 2002-03-11

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(69789801)、广东省自然科学基金团队项目(20003061)和国家高技术惯性约束聚变主题的部分资助。

作者简介: 卢光山(1977 ), 男, 硕士研究生, 专业光学, 方向为强激光传输研究。E-mail: stllto@sncu.edu.cn

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{1}{i\lambda z} \iint E_1(x_1, y_1) \times \exp\left\{i \frac{k}{2z} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 \quad (1)$$

其中  $z$  为传输距离。初始的聚焦光束可以表示为

$$E_1(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) \exp\left[-i \frac{k}{2R} (x_1 + y_1)^2\right] \quad (2)$$

其中指数项代表了曲率半径为  $R$  的聚焦球面波相因子,  $U_1(x_1, y_1)$  代表其余部分, 不妨称之为复振幅, 通常其平均波前为平面。实际中球面波因子也代表焦距为  $R$  的透镜, 而  $U_1(x_1, y_1)$  代表透镜前的入射平面波。

常规的 FFT 算法是根据卷积性质<sup>[7]</sup>, 采用两次 FFT 的算法计算衍射积分(1)式, 即先对输入光场作 FFT, 再乘以一个与距离有关的因子, 最后作反 FFT。但如果对初始的光强分布(2)式作二维离散取样时, 根本无法满足取样定理的要求, 因而导致计算失败。

### 2.1 常规傅里叶算法中存在的问题

取样定理<sup>[5, 7]</sup>要求取样点的频率必须大于被取样信号的最高频率的 2 倍, 离散数据点的最大频率应大于被取样信号的最大频率的 2 倍。具体地讲, 取样数组在频率域的窗口宽度要大于光束频率域的宽度, 同样取样数组在实空间的窗口宽度也要大于光束的实际宽度。用带宽乘积来表示这两方面的要求, 即数组的带宽乘积(实域中的窗口宽度与频率域的窗口宽度的乘积)要远远大于光束的带宽乘积。

对于每个维度  $N$  个取样点的二维 FFT 数据, 实空间的计算窗口宽度为  $N\delta$ , 其中  $\delta$  为取样间隔。在频率域的窗口宽度为  $1/\delta$ , 所以带宽乘积为  $N$ 。

若  $U_1(x_1, y_1)$  在实域中的光束宽度的平方为  $w_0^2$  (按照二阶矩的统计定义), 在空间频率域的宽度平方为  $\theta_0^2$ 。由于  $U_1(x_1, y_1)$  的平均波前为平面, 其所代表的光束的带宽乘积<sup>[8]</sup>为  $w_0\theta_0 = M^2/4\pi$ , 即  $1/4\pi$  倍的光束质量因子 ( $M^2$  因子)。由于一般光束的  $M^2$  因子远远小于取样点数  $N$ , 所以对非会聚光束的 FFT 算法是可行的。

而对于会聚波  $E_1(x_1, y_1)$ , 其传输前带宽乘积<sup>[9]</sup>为:  $\langle w^2 \rangle \langle \theta^2 \rangle \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \left( M^4 + \frac{k^2 w_0^4}{4R^2} \right)$ 。其中后一项可以化为 Rayleigh 距离<sup>[6]</sup>,  $Z_R = \pi w_0^2/\lambda$  与  $R$  的比值,  $w_0\theta \sim \frac{1}{4\pi} \sqrt{\left( M^4 + \frac{Z_R^2}{R^2} \right)}$ 。当  $R \ll Z_R$  时, 带宽乘积将主要取决于  $Z_R$  与  $R$  的比值,  $w_0\theta \approx Z_R/4\pi R$ 。所以

在大光圈数聚焦的系统中, 往往不能满足取样定理的要求, 导致计算失败。

以神光 - II 激光器中的参数为例:  $w_0 = 120$  mm, 曲率半径  $R = 750$  mm,  $\lambda = 1.053$   $\mu\text{m}$ ,  $Z_R = 4.3 \times 10^7$  mm, 所以  $w_0\theta_0 \sim 10^4$ , 远远大于计算中可以容忍的取样点数  $N \sim 10^3$ 。所以, 直接取样的结果必然导致高频成分的丢失, 使计算失败。

### 2.2 新算法: 球面波因子的处理

常规算法的困难在于聚焦球面波因子的影响, 所以考虑将该因子分离出, 即

$$E_1(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) \exp\left[-i \frac{k}{2R} (x_1^2 + y_1^2)\right]$$

$$E_2(x_2, y_2) = U_2(x_2, y_2) \exp\left[-i \frac{k}{2r} (x_2^2 + y_2^2)\right] \quad (3)$$

其中  $R, r$  分别为传输前后的波前曲率半径,  $U_1(x_1, y_1), U_2(x_2, y_2)$  表示复振幅。由几何光学可以得到  $z = R - r$ , 见图 1。将(3)式代入 Fresnel 衍射积分(2)式, 可得到

$$U(x_2, y_2) \exp\left[-\frac{ik(x_2^2 + y_2^2)}{2r}\right] = \frac{1}{i\lambda z} \iint U(x_1, y_1) \exp\left[-\frac{ik(x_1^2 + y_1^2)}{2R}\right] \times \exp\left\{\frac{ik}{2z} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 \quad (4)$$

令  $\eta_x = \frac{R}{r} x_2, \eta_y = \frac{R}{r} y_2, \xi = \frac{R}{r} z$ , 于是

$$U_2(x_2, y_2) = \frac{R}{r} \frac{1}{i\lambda \xi} \iint U_1(x_1, y_1) \times \exp\left\{\frac{ik}{2\xi} [(\eta_x - x_1)^2 + (\eta_y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 = \frac{R}{r} \hat{F}(x_1, y_1, \eta_x, \eta_y; \xi) \quad (5)$$

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{R}{r} \hat{F}(x_1, y_1, \eta_x, \eta_y; \xi) \times \exp\left[-i \frac{k}{2r} (x_2^2 + y_2^2)\right] \quad (6)$$

其中  $\hat{F}(x_1, y_1, \eta_x, \eta_y; \xi)$  表示非会聚的平面波复振幅  $U_1(x_1, y_1)$  传输到距离  $\xi$  处的 Fresnel 衍射积分。分步傅里叶变换处理衍射积分的过程并不改变空间取样点的宽度, 即  $\Delta\eta_x = \Delta x_1, \Delta\eta_y = \Delta y_1$ , 从而得到

$$\Delta x_2 = \frac{r}{R} \Delta\eta_x = \frac{r}{R} \Delta x_1$$

$$\Delta y_2 = \frac{r}{R} \Delta\eta_y = \frac{r}{R} \Delta y_1$$

在缩小的空间尺度上, 利用 FFT 方法得到近场的复振幅分布  $U_2(x_2, y_2)$  或场分布  $E_2(x_2, y_2)$ 。

将两种传输过程联系起来:一种普通无聚焦光束的传输,即  $\hat{F}(x_1, y_1, \eta_x, \eta_y; \xi)$ , 可以常规的 2 次 FFT 的算法计算;另一种是会聚光束(或透镜聚焦光束)的传输,可用通过剔除会聚球面波因子后间接得到,两者在有效的传输距离( $\xi \leftrightarrow z$ )、空间尺度( $\eta_x, \eta_y \leftrightarrow x_2, y_2$ )和振幅上都相差一个因子  $R/r$ 。这个因子来源于光束聚焦过程中光束宽度的减小和光强的增加,参见图 1。

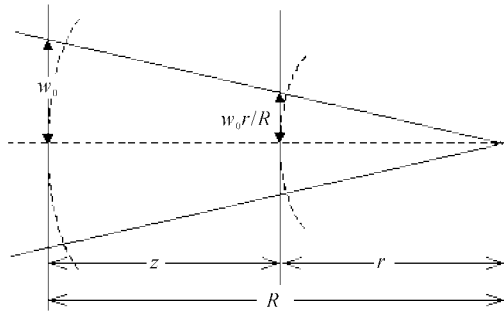


图 1 聚焦光束的示意图

初始光束宽度  $w_0$ , 波前曲率半径  $R$ ; 传输距离  $z$  处的光束宽度  $w_0 r/R$ , 光束面积缩小了  $(r/R)^2$  倍, 光强相应增强  $(R/r)^2$  倍

Fig. 1 Schematic diagram of the focused beam

$w_0$  and  $R$  are the initial beam width and wave front curvature radius, respectively. The intensity at the distance of  $z$  is multiplied by  $(R/r)^2$  since the beam width decreases to  $w_0 r/R$

对非会聚光束的传输,其 Fresnel 数为  $N = w_0^2/\lambda\xi = w_0^2/\lambda(1/z - 1/R)$ ; 对会聚光束的传输,其有效的 Fresnel 数为<sup>[10]</sup>  $N = w_0^2/\lambda z - w_0^2/\lambda R$ 。这两者 Fresnel 数的一致,说明了 Fresnel 数在衍射传输中的重要地位。对于普通光束的传输,当 Fresnel 数大于 1 时,是近场的 Fresnel 衍射;在 Fresnel 数小于 1 时,光束进入远场的 Fraunhofer 衍射区。在焦点附近处  $z \approx R$ , 由 Fresnel 数的表达式可以得到  $N \approx \frac{w_0^2}{\lambda R} \Delta$ ,  $\Delta = (R - z)/R$  是相对离焦量。所以  $N = 1$  对应的离焦量  $\Delta_1 = \lambda R/w_0^2 = \pi R/Z_R$  可以作为分界点,离焦量大于  $\Delta_1$  就是近场 Fresnel 衍射,离焦量小于  $\Delta_1$  则是远场 Fraunhofer 衍射。当  $R \ll Z_R$  时,  $\Delta_1$  的值非常小,如前面的例子,  $\Delta_1 = 5.5 \times 10^{-3}$ , 而绝对离焦量  $\delta_1 = \Delta_1 R = \lambda_0 (R/w_0)^2$  与透镜的孔径数的平方成正比,仅有 0.041 mm, 约 40 个波长的长度。

当传输距离  $z = R$  时,即传输到透镜的焦平面处时,有  $\xi = \infty$ , 对应为远场的 Fraunhofer 衍射,可以直接由 FFT 计算得到光场的分布。

### 3 应用举例

实际应用中,一般入射光是平面光束  $U_1(x_1, y_1)$ , 空间初始相位为一常数,可忽略不计,经透镜聚焦形成聚焦光束,透镜的焦距就是聚焦光束的初始曲率半径  $R$ 。如果需要计算焦平面处的光束分布,可以直接使用 FFT 计算远场的 Fraunhofer 衍射图样。对非焦点处 ( $z \neq R$ ) 的光束振幅分布  $U_2(x_2, y_2)$ , 可按照前面提出的算法求出;如果需要得到光场完整的复分布  $E_2(x_2, y_2)$ , 应该乘上相位因子  $\exp[-i \frac{k}{2r}(x_2^2 + y_2^2)]$ ;一般实际应用中只需要得到光强的分布,可以省略这一步,由复振幅  $U_2(x_2, y_2)$  求绝对值平方得强度。

作为例子,计算了如图 2 所示的环形光束的会聚过程,结果见图 3。环形光束的形式为  $U(r) = \text{circ}[r/(d_2/2)] - \text{circ}[r/(d_1/2)]$ , 计算半径  $d_2 = 240 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 48 \text{ mm}$ , 波长  $\lambda = 1.053 \mu\text{m}$ 。会聚透镜的焦距为  $R = 750 \text{ mm}$ 。

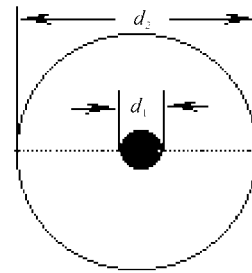


图 2 环形光束的示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the annular beam

图 3 给出了不同传输距离处的会聚光束的强度径向分布。依次为 Fresnel 数  $N = 1302, 100, 10, 1$ , 对应  $z = 700.014, 745.909, 749.589, 749.959 \text{ mm}$ 。光束的横向尺度变化非常大,在  $z = 700.014 \text{ mm}$  处,光束宽度只有原始值的 1/15。而在  $N < 10$  以后,  $R/r$  比值更超过 1000, 所以若不使用间接算法,普通的取样数据是无法兼顾如此剧烈变化的光束宽度的。

光束聚焦过程中任意  $z$  处的光强径向分布很难用解析计算得出,但是根据方程(1)容易得到环形光束汇聚后的轴上光强分布

$$I(z) = |E_2(r=0, z)|^2 = |U_2(0)|^2 = \frac{1}{(1-z/R)^2} \left| \exp\left[\frac{ik}{8}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right)d_1^2\right] - \exp\left[\frac{ik}{8}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right)d_2^2\right] \right|^2 \quad (6)$$

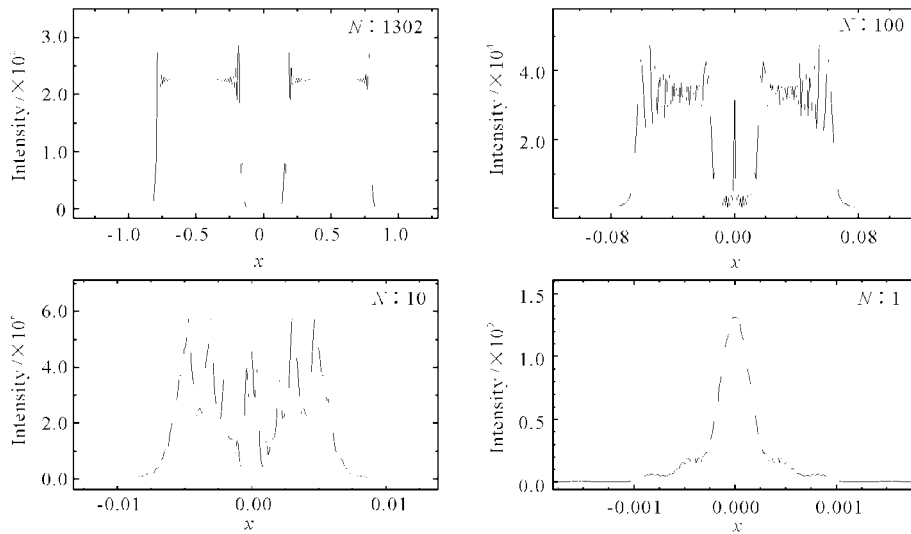


图 3 不同传输距离处的会聚光束的强度径向分布

Fig. 3 Radial intensity distribution of the focused annular beam in different distance

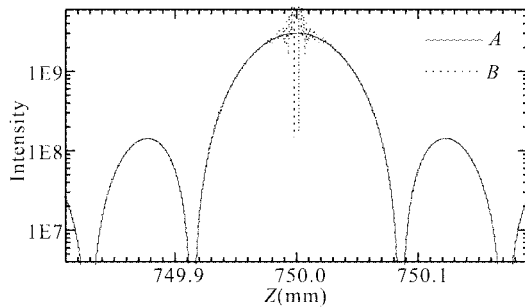


图 4 环形光束聚焦过程中轴上强度的数值计算结果与理论值的对比

Fig. 4 Comparison of the theoretical intensity (solid line A) of the focused beam and the numerical value (dotted line B) in different distance

数值计算结果与由(6)式给出的理论值的对比示于图4。实线A代表理论值,虚线B表示计算值,两者几乎在整个聚焦区重合得都很好,其中 $z = 749.959$  mm ( $N = 1$ )时的峰值为 $1.29135E9$ ,峰值误差仅为1.23%。与由式(6)得到的理论结果 $1.29745E9$ 相比,峰值误差仅为0.47%。在非涅耳数小于1的约 $40 \mu\text{m}$ 的夫琅和费衍射区内,计算值才逐渐与理论值发生较大的偏离。

#### 4 结果与讨论

提出了一种计算会聚球面波聚焦传输过程的新算法:通过分离球面波相位因子,缩小空间计算尺度,间接求得聚焦光束的光场分布。这里,联系两种

传输过程的关键是 Fresnel 数。利用 Fresnel 数,给出了聚焦光束传输的近场 Fresnel 衍射和远场 Fraunhofer 衍射的分界点,即 Fresnel 数  $N = 1$  对应的离焦位置 $\Delta_1 = \lambda R / w_0^2 = \pi R / Z_R$ ,离焦量大于 $\Delta_1$ 就是近场 Fresnel 衍射,离焦量小于 $\Delta_1$ 则是远场 Fraunhofer 衍射。

致谢 作者感谢刘承宜教授、文双春博士的深入讨论。

#### 参 考 文 献

- 1 J. T. Hunt, P. A. Renard, W. W. Simmons. Improved performance of fusion lasers using the imaging properties of multiple spatial filters [J]. *Appl. Opt.*, 1977, **16**(4):779~782
- 2 R. G. Bikmatov, C. Boley, I. N. Burdonsky *et al.*. Pinhole closure in spatial filters of large scale ICF laser systems [C]. *SPIE*, 1999, **3492**:510~523
- 3 J. K. Lawson. Focal spot characterization [C]. *SPIE*, 1997, **3047**:800~808
- 4 C. D. Boley, K. G. Estabrook, J. M. Auerback *et al.*. Modeling of laser knife-edge and pinhole experiments [C]. *SPIE*, 1999, **3492**:524~535
- 5 J. W. Goodman. Introduction to Fourier Optics [M]. New York: McGraw-Hill, 1968. 23,64 (in Chinese)
- 6 G. P. Agrawal. Nonlinear Fiber Optics [M]. 2nd ed., California: Academic Press, 1995. 50~54
- 7 W. H. Press *et al.*. Numerical Recipes in C [M]. 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1988. 398
- 8 A. E. Siegman. New developments in laser resonators [C]. *SPIE*, 1990, **1224**:2~14
- 9 M. A. Porras, J. Alda, E. Bernabeu. Nonlinear propagation and transformation of arbitrary laser beams by means of the generalized ABCD formalism [J]. *Appl. Opt.*, 1993, **32**(30):5885~5892
- 10 Fan Dian-yuan. The Fresnel number in terms of ray matrix elements [J]. *Acta Optica Sinica* (光学学报), 1983, **3**(4):319~325 (in Chinese)